MODELOS ALEATORIOS DE STOCK

La necesidad de mantener bienes físicos en almacenes para satisfacer la demanda de productos sobre un horizonte temporal supone un costo que en muchos casos puede ser optimizado. Se han estudiado ya varios modelos de gestión de inventarios bajo el supuesto de demanda determinística. Estos modelos son indicados para resolver una gran cantidad de casos reales. Sin embargo, el supuesto de demanda constante y conocida puede no ajustarse al sistema de inventario a optimizar. Trataremos aquí modelos aleatorios de stock, en los que la demanda se describe mediante una distribución de probabilidad.

Podemos clasificar los modelos estocásticos en dos grandes tipos: i) modelos de revisión continua y ii) modelos de revisión periódica. Resolver estos modelos supone calcular el tamaño del lote de reposición (Q) y el punto de pedido (S_R) que es el nivel de inventario en el que se debe solicitar el reabastecimiento. Una vez hecho el pedido, el lote de reposición ingresará al inventario luego de transcurrido un tiempo (LT), llamado tiempo de producción o "*lead time*".

Los modelos de revisión continua operan bajo el supuesto de que quién gestiona el sistema de inventario tiene acceso en forma permanente al dato del nivel de inventario. Alcanzado el punto de pedido (S_R), se solicitan unidades adicionales que ingresarán al sistema transcurrido el *"lead time"* (LT). Durante este lapso, la demanda sobre el inventario continúa; esta demanda es de naturaleza aleatoria. Al ingresar el lote de reposición al inventario, puede ocurrir que haya unidades en stock o que existan pedidos pendientes de entrega (stock negativo).

En los modelos de revisión periódica, quien gestiona el sistema de inventario accede a la información del nivel de stock a intervalos regulares de tiempo. Realiza un pedido cada vez que encuentra que el nivel del inventario es igual o inferior al punto de pedido (S_R). Igual que en los modelos de revisión continua, al ingresar el lote de reposición al inventario, puede ocurrir que haya unidades en stock o que existan pedidos pendientes de entrega.

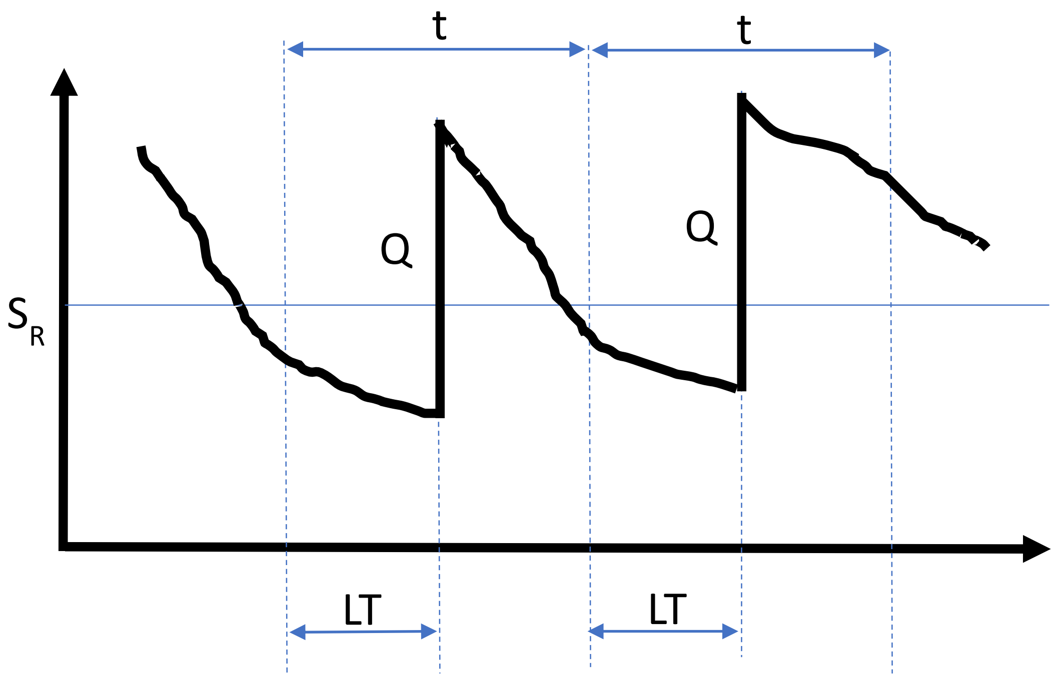
Una segunda forma de diferenciar los sistemas de gestión de inventarios es por la cantidad de unidades que se reponen. Puede gestionarse el sistema mediante la reposición de lotes fijos (Q) o mediante órdenes que completen el nivel de stock a un nivel fijado previamente (S).

Tenemos entonces cuatro formas básicas de gestionar inventarios.

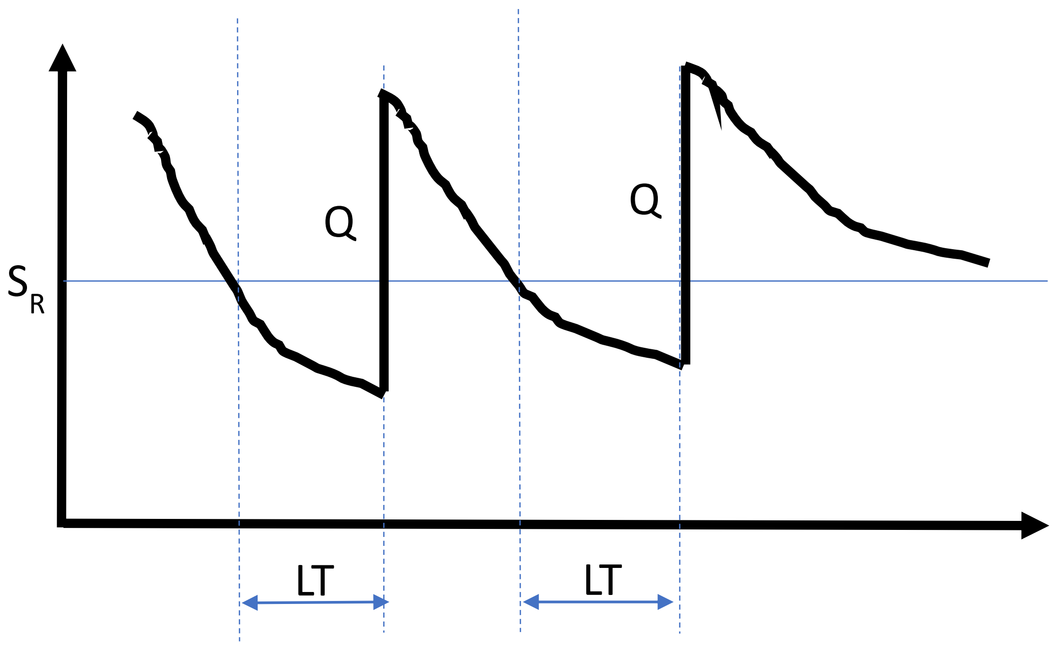
	Revisión Periódica	**Revisión Continua**
Reposición de lotes fijos	**(1)** Si al momento de la revisión, el nivel de inventario está por debajo de un nivel crítico (S_R), entonces se ordenan (Q) unidades. Las revisiones se realizan en intervalos de tiempo de duración (t).	**(2)** Tan pronto como el inventario cae debajo del nivel crítico (S_R), se ordena una cantidad de unidades (Q).
Reposición de lotes variables	**(3)** Si al momento de la revisión, el nivel de inventario está por debajo de un nivel crítico (S_R), entonces se ordena una cantidad de unidades que permita llevar el inventario a un nivel (S). Las revisiones se realizan en intervalos de tiempo de duración (t).	**(4)** Tan pronto como el inventario cae debajo del nivel crítico (S_R), se ordena una cantidad de unidades tal que permita llevar el inventario a un nivel (S).

Desarrollaremos aquí dos modelos del tipo (2) (Revisión Continua con Costo de Faltante y Revisión Continua con Nivel de Servicio); y un modelo del tipo (3).

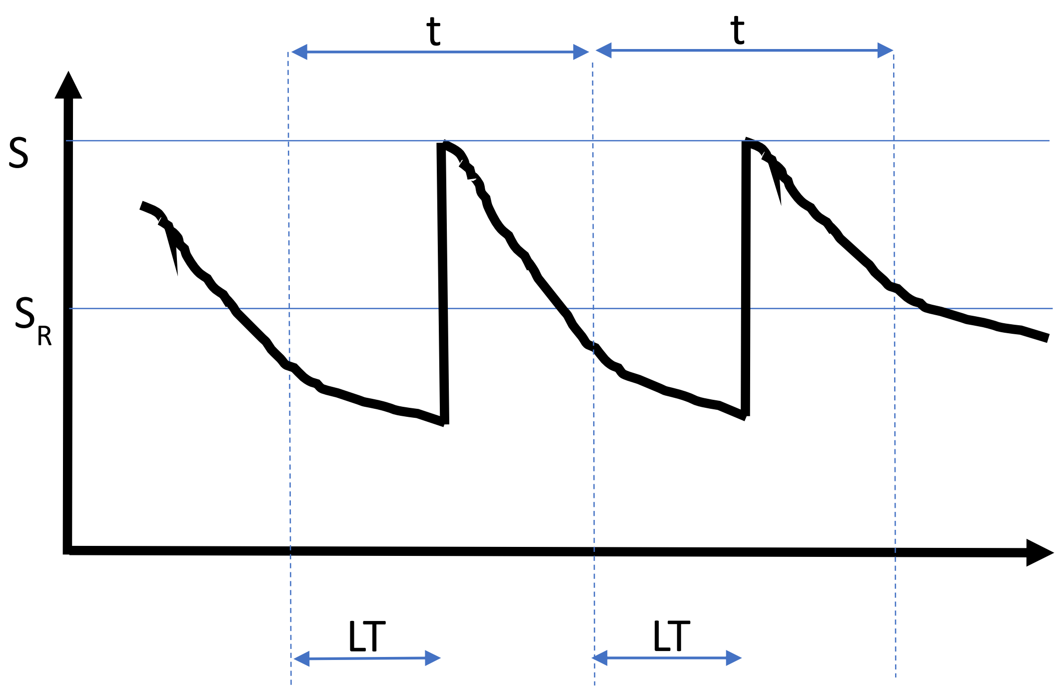
Lotes Fijos y Revisión Periódica



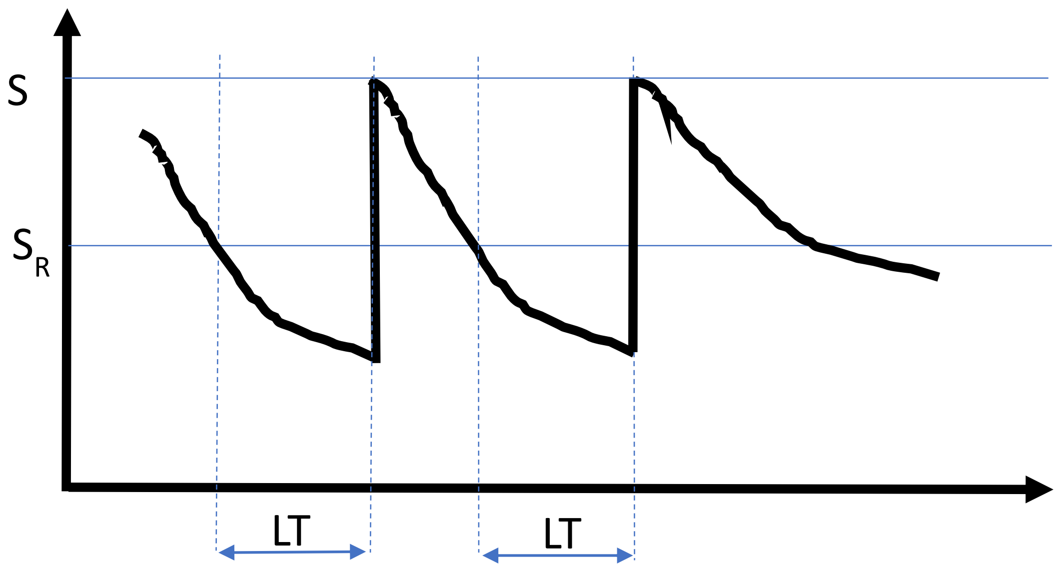
Lotes Fijos y Revisión Continua



Lotes Variables Revisión Periódica



Lotes Variables Revisión Continua



MODELO DE REVISIÓN CONTINUA Y COSTO CON FALTANTE

El propósito del modelo es determinar el lote de reposición y el punto de pedido de modo de minimizar el costo total. Se considera el costo de realizar las órdenes, el costo de mantenimiento del inventario (stock operativo + stock de seguridad) y el costo del faltante; es decir el costo de la escasez. El modelo supone que los pedidos no entregados no se pierden, sino que son entregados al momento de recibir el lote de reposición.

Hipótesis del modelo:

1. La demanda es aleatoria. Se conoce la distribución de probabilidad y es estacionaria, es decir que no cambia en el tiempo.
2. El tiempo de producción (*"lead time"*) se conoce y es constante.
3. La demanda no satisfecha durante un ciclo se acumula y es entregada cuando ingresa el lote de reposición.
4. El costo del faltante (demanda no satisfecha) es por unidad, independiente de la duración del período sin existencias.
5. El punto de reposición (S_R) es mayor que la demanda media durante el *"lead time".*
6. El inventario de seguridad, en promedio, siempre está en el inventario.

Variables:

- T: tiempo del horizonte de planeamiento [tiempo].
- D: demanda esperada en horizonte de planeamiento (T) [unidades].
- Q: cantidad de unidades del lote de reposición [unidades].
- S_R: punto de pedido. Nivel de inventario al que se realiza un pedido [unidades].
- LT: *"lead time"* o tiempo de producción [tiempo].
- k: costo de hacer un pedido [$].
- c_1: costo de mantener unidades en el inventario por unidad de tiempo [$/(unidad.tiempo)].
- $k_c = c_1.T$ [$/unidad]
- f_2: costo de las unidades faltantes [$/unidad]
- X: variable aleatoria que describe el comportamiento de la demanda durante el *"lead time".* [unidades].
- $f(X)$: función de distribución de probabilidad de la demanda durante el *"lead time".*
- $F(X)$: función de distribución de probabilidad acumulada de la demanda durante el *"lead time".*
- $\bar{X}$: número promedio de unidades demandadas durante el "lead time" es igual a $E\{X\}$.
- σ_X: desvío estándar de la demanda durante el *"lead time"*.

Cálculo del lote de reposición y del punto de pedido:

El costo total esperado (CTE) tiene cuatro componentes:

1. Costo de hacer los pedidos: En el horizonte de planeamiento T se realizarán $n = D/Q$ pedidos. Cada pedido tiene un costo k. El costo total de hacer los pedidos es entonces: $k.D/Q$.
2. Costo de mantener el stock operativo: En promedio encontraremos siempre $1/2.Q$ unidades como stock operativo. El costo total por mantener el stock operativo es: $\frac{1}{2}.Q.c_1.T = \frac{1}{2}.Q.k_c$.
3. Costo de mantener el stock de seguridad: El stock de seguridad es, en promedio, igual al punto de pedido menos las unidades demandadas en promedio durante el *"lead time"*: $S_R - \bar{X} = S_R - E\{X\}$. El costo es entonces $(S_R - E\{X\}).k_c$.
4. Costo del faltante: La probabilidad de ruptura de stock es la probabilidad de que $X \geq S_R = [1 - F(S_R)]$. La cantidad esperada de rupturas en un ciclo de abastecimiento es:

$$n(S_R) = \int_{S_R}^{\infty} (X - S_R).f(X).dX$$

   Como hemos supuesto que el costo del faltante es por unidad, el costo del faltante en un ciclo será $n(S_R).f_2$. Para el horizonte de planeamiento T, el costo del faltante será: $n(S_R).f_2.D/Q$.

Agregando los cuatro costos descriptos, obtenemos la función de costo total esperado (CTE).

$$CTE = k.\frac{D}{Q} + \frac{1}{2}.Q.k_c + (S_R - E\{X\}).k_c + f_2.\frac{D}{Q}.\int_{S_R}^{\infty} (X - S_R).f(X).dX$$

Para determinar los valores óptimos de Q y S_R, derivamos el costo total esperado respecto de estas variables e igualamos a cero.

$$\frac{\partial CTE}{\partial Q} = -\frac{kD}{Q^2} + \frac{k_c}{2} - \frac{n(S_R).f_2.D}{Q^2} = 0$$

$$\frac{\partial CTE}{\partial S_R} = k_c - f_2.\frac{D}{Q}.\int_{R}^{\infty} f(X).dX = 0$$

De estas ecuaciones obtenemos:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.D.(k + f_2.n(S_R))}{k_c}} \quad \dots (1)$$

$$\int_{S_R}^{\infty} f(X).dX = [1 - F(S_R)] = \frac{k_c.Q}{f_2.D} \quad \dots(2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) permiten obtener en forma simultánea los valores óptimos de Q y S_R mediante un proceso iterativo. Se comienza con $n(S_R) = 0$, se obtiene un primer lote óptimo (que coincide con el modelo básico para los valores medios). Con el lote óptimo y la ecuación (2) se calcula S_R. Con el valor calculado de S_R se calcula $n(S_R)$ y con la ecuación (1) se vuelve a calcular un nuevo lote óptimo. El proceso se repite hasta que los valores de Q y S_R se estabilizan.

Caso de demanda con distribución normal

Si la demanda M durante el *"lead time"* tiene distribución normal $X\colon N(\bar{X}, \sigma_X)$, la función

$$n(S_R) = \int_{S_R}^{\infty} (X - S_R).f(X).dX$$

puede calcularse a partir de la función estandarizada de pérdidas $L(Z)$.

$$L(Z) = \int_{Z}^{\infty} (t - Z).f(t).dt$$

Donde $f(t)$ es la función de distribución normal estándar 0,1.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} e^{-0.5t^2}$$

Se puede demostrar que:

$$n(S_R) = \sigma_X.L(Z) \quad \dots(3)$$

con

$$Z = \frac{S_R - \bar{X}}{\sigma_X}$$

$L(Z)$ se encuentra tabulada (ver anexo). Puede también calcularse como:

$$L(Z) = \int_{Z}^{\infty} (t - Z).f(t).dt = \int_{Z}^{\infty} t.f(t).dt - Z\int_{Z}^{\infty} f(t).dt$$

$$L(Z) = f(Z) - Z.[1 - F(Z)] \quad \dots(4)$$

La ecuación (4) es fácil de implementar en Excel® con la función: =DISTR.NORM.ESTAND.N(Z, *valor lógico*). Si *valor lógico*=FALSO, la función devuelve el valor de la función de densidad de la N(0,1) en Z; ($f(Z)$ en la ecuación 4). Si *valor lógico*=VERDADERO, la función devuelve el valor de la función acumulada hasta Z; ($F(Z)$ en la ecuación 4).

Ejemplo #1 (Taha)

Una fábrica utiliza 1000 litros de resina por mes en el proceso productivo. Cuesta $100 hacer un pedido para un lote nuevo. El costo de almacenamiento por litro y por mes es de $2 y el costo del faltante por litro es de $10. Los datos históricos muestran que la demanda, durante el tiempo de entrega (*"lead time"*) es uniforme dentro del intervalo 0-100 litros. Determinar la política óptima para operar el inventario supuesto que se disponen en forma permanente los datos del nivel de stock.

- D: 1000 [litro]
- T: 1 [mes]
- k: 100 [$]
- c_1: 2 [$/(litro.mes)]
- $k_c = c_1.T$: 2 [$/litro]
- f_2: 10 [$/litro]
- $f(X) = \frac{1}{100} \quad 0 \leq X \leq 100$ [litros]
- $E\{X\} = 50$ [litros]

Paso 1: Se calcula Q^* con la ecuación (1) y $n(S_R) = 0$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.D.k}{k_c}} = \sqrt{\frac{2\,.1000\,[litro]\,.100\,[\$].}{2\,[\frac{\$}{litro}]}} = 316{,}23\,[litro]$$

Paso 2: Con el valor calculado para Q^*se determina $F(R)$ con la ecuación (2) y R con la función de distribución de probabilidad de la demanda $f(X)$.

$$F(S_R) = 1 - \frac{k_c.Q}{f_2.D} = 1 - \frac{2\left[\frac{\$}{litro}\right].316{,}23\,[litro]}{10\left[\frac{\$}{litro}\right].1000\,[litro]} = 0{,}9368$$

$F(S_R) = 0{,}9368$ corresponde con un valor de $R = 93{,}68\,[litro]$

Paso 3: Calcular $n(S_R)$

$$n(S_R) = \int_{S_R}^{100} (X - S_R).\frac{1}{100}dX = \frac{S_R^2}{200} - S_R + 50$$

$$n(S_R) = \frac{93{,}68^2}{200} - 93{,}68 + 50 = 0{,}20\,[litro]$$

Paso 4: Calcular un nuevo valor de Q^* con la ecuación (1) considerando el valor de $n(S_R)$ calculado en el paso 3.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.D.(k + k_u.n(R))}{k_c}} = \sqrt{\frac{2.1000[litro].(100[\$] + 10\left[\frac{\$}{litro}\right].0{,}2\,[litro])}{2\,[\frac{\$}{litro}]}} = 319{,}37$$

Con este valor de Q^* se vuelve al paso 2 y se repite el proceso hasta que los valores de Q^*y S_R converjan. Los valores finales resultarán:

$$Q^* = 319{,}4\,[litro]$$

$$S_R = 93{,}6\,[litro]$$

El stock de protección promedio es: $S_R - E\{X\} = 93{,}6 - 50 = 43{,}6\,[litro]$. El costo total esperado se calcula remplazando Q^*y S_R en la ecuación de CTE.

Ejemplo #2 (Francy Ríos et al)

Una empresa mantiene en inventario una pieza que es relevante para su proceso productivo. Se requieren 100 piezas por mes (1200 piezas por año). Se ha observado que la demanda durante un mes es normal con un desvío estándar de 40. El costo por pedido es de $1000. El costo de mantenimiento es de 20 $/año y el costo del faltante es de 200 $/unidad.

- D: 1200 [pieza]
- T: 1 [año]
- k: 1000 [$]
- c_1: 20 [$/(pieza.año)]
- $k_c = c_1.T$: 20 [$/pieza]
- f_2: 200 [$/litro]
- $f(X) = N(100{,}40)$ [pieza]
- $E\{X\} = \bar{X} = 100$ [pieza]

Paso 1: Se calcula Q^* con la ecuación (1) y $n(S_R) = 0$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.D.k}{k_c}} = \sqrt{\frac{2\,.\,1200\ [pieza]\,.\,1000\ [\$].}{20\ [\frac{\$}{pieza}]}} = 346{,}410\ [pieza]$$

Paso 2: Con el valor calculado para Q^*se determina $F(S_R)$ con la ecuación (2) y S_R con la función de distribución de probabilidad de la demanda $f(X)$.

$$F(S_R) = 1 - \frac{k_c.Q}{f_2.D} = 1 - \frac{20\left[\frac{\$}{pieza}\right].346{,}410\ [pieza]}{200\left[\frac{\$}{pieza}\right].1200\ [pieza]} = 0{,}97113$$

En la distribución normal estándar acumulada, este valor corresponde a $Z = 1{,}8977$.

$$S_R = \bar{X} + \sigma_X.Z = 100 + 40\,.\,1{,}8977 = 175{,}908$$

Paso 3: Calcular $n(S_R)$ con las ecuaciones (3) y (4)

$L(Z) = f(Z) - Z.[1 - F(Z)] = 0{,}01112$

$n(S_R) = \sigma_X.L(Z) = 40\,.\,0{,}01112 = 0{,}44480$

Paso 4: Calcular un nuevo valor de Q^* con la ecuación (1) considerando el valor de $n(S_R)$ calculado en el paso 3.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.D.(k + f_2.n(S_R))}{k_c}} = \sqrt{\frac{2\,.\,1200[pieza].(1000[\$] + 200\left[\frac{\$}{pieza}\right].0{,}44480\ [pieza])}{20\ [\frac{\$}{pieza}]}}$$

$Q^* = 361{,}491\ [pieza]$

Con este valor de Q^* se vuelve al paso 2 y se repite el proceso hasta que los valores de Q^*y S_R convergen. Los valores finales resultarán:

$$Q^* = 362{,}26\ [pieza]$$

$$S_R = 175{,}12\ [pieza]$$

El stock de protección promedio es: $S_R - E\{X\} = 175{,}12 - 100 = 75{,}12\ [pieza]$. El costo total esperado se calcula remplazando Q^*y S_R en la ecuación de CTE.

$$CTE = k.\frac{D}{Q} + \frac{1}{2}.Q.k_c + (S_R - E\{X\}).k_c + f_2.\frac{D}{Q}.\int_{S_R}^{\infty}(X - S_R).f(X).dX$$

$$CTE = 1000.\frac{1200}{362{,}26} + \frac{1}{2}.362{,}26.20 + (75{,}12).20 + 200.\frac{1200}{362{,}26}.0{,}4680 = 8.747{,}7\ [\$]$$

MODELO DE REVISIÓN CONTINUA Y NIVEL DE SERVICIO

El objetivo del modelo es determinar el lote de reposición y el punto de pedido de modo de minimizar el costo total. Se considera el costo de realizar las órdenes, el costo de mantenimiento del inventario (stock operativo + stock de seguridad) y el costo del faltante; es decir el costo de la escasez. El modelo supone que los pedidos no entregados no se pierden, sino que son entregados al momento de recibir el lote de reposición. Se establece un nivel de servicio; es decir la fracción de pedidos que en promedio se desea satisfacer.

Hipótesis del modelo:

1. La demanda es aleatoria. Se conoce la distribución de probabilidad y es estacionaria, es decir que no cambia en el tiempo.
2. El tiempo de producción (*"lead time"*) se conoce y es constante.
3. La demanda no satisfecha durante un período se acumula y es entregada cuando ingresa el lote de reposición.
4. El costo del faltante (demanda no satisfecha) es por unidad, independiente de la duración del período sin existencias.
5. El punto de reposición (R) es mayor que la demanda media durante el *"lead time".*
6. El inventario de seguridad, en promedio, siempre está en el inventario.
7. Es un objetivo satisfacer, en promedio, una porción P de la demanda (nivel de servicio).

Variables:

- T: tiempo del horizonte de planeamiento [tiempo].
- D: demanda esperada en horizonte de planeamiento (T) [unidades].
- Q: cantidad de unidades del lote de reposición [unidades].
- S_R: punto de pedido. Nivel de inventario al que se realiza un pedido [unidades].
- LT: *"lead time"* o tiempo de producción [tiempo].
- k: costo de hacer un pedido [$].
- c_1: costo de mantener unidades en el inventario por unidad de tiempo [$/(unidad.tiempo)].
- $k_c = c_1.T$ [$/unidad]
- f_2: costo de las unidades faltantes [$/unidad]
- X: variable aleatoria que describe el comportamiento de la demanda durante el *"lead time".* [unidades].
- $f(X)$: función de distribución de probabilidad de la demanda durante el *"lead time".*
- $F(X)$: función de distribución de probabilidad acumulada de la demanda durante el *"lead time".*
- $\bar{X}$: número promedio de unidades demandadas durante el "lead time" es igual a $E\{M\}$.
- σ_X: desvío estándar de la demanda durante el *"lead time"*.
- P: nivel de servicio. Porción de la demanda que, en promedio, se desea satisfacer.

Cálculo del lote de reposición y del punto de pedido:

La cantidad de pedidos que se espera incumplir en un ciclo es:

$$n(S_R) = \int_{S_R}^{\infty} (X - S_R).f(X).dX$$

En cada ciclo se espera entregar, en promedio, la cantidad Q. La fracción de pedidos no entregados será entonces:

$$\frac{n(S_R)}{Q} = (1 - P)$$

$$n(S_R) = Q.(1 - P) \quad \dots (5)$$

Cuando está fijo P, hallar los valores óptimos de Q y S_R requiere también de un proceso iterativo. De la ecuación (2) podemos despejar f_2.

$$f_2 = \frac{k_c.Q}{[1 - F(S_R)].D}$$

Remplazamos f_2 en (1); en la ecuación de segundo grado obtenida despejamos Q.

$$Q = \frac{n(S_R)}{[1 - F(S_R)]} + \sqrt{\frac{2.k.D}{k_c} + \left(\frac{n(S_R)}{[1 - F(S_R)]}\right)^2} \quad \dots (6)$$

El procedimiento iterativo puede resumirse así:

Paso 1: Calcular un valor inicial de Q con la expresión: $Q = \sqrt{\frac{2.D.k}{k_c}}$

Paso 2: Calcular $n(S_R)$ con la ecuación (5): $n(S_R) = Q.(1 - P)$

A partir del valor de $n(S_R)$ con la función de $n(S_R)$ se pueden obtener S_R y $F(S_R)$.

Paso 3: Con S_R se vuelve a calcular Q en (6).

Los pasos 2 y 3 se repiten hasta que los valores de Q y S_R converjan.

Ejemplo #3 (Francy Ríos et al)

En el Ejemplo #2, se quiere operar con un nivel de servicio $P = 99\%$.

<u>Paso 1</u>: Se calcula $Q = \sqrt{\frac{2.D.k}{k_c}} = \sqrt{\frac{2\,.1200\,[pieza]\,.1000\,[\$].}{20\,[\frac{\$}{pieza}]}} = 346{,}410\,[pieza]$

<u>Paso 2</u>: Calcular $n(S_R)$ con la ecuación (5):

$n(S_R) = Q.(1-P) = 346{,}410\,[pieza].(1-0{,}99) = 3{,}46410\,[pieza]$

Como la distribución de la demanda es normal, podemos calcular S_R y Z con ayuda de la distribución estándar de pérdidas $L(Z)$.

$$L(Z) = \frac{n(S_R)}{\sigma_X} = \frac{3{,}46410}{40} = 0{,}08660$$

Para hallar el valor de Z, ingresamos en la tabla de la función estándar de pérdidas con $L(Z)$ y obtenemos Z. Alternativamente podemos iterar en la ecuación (4). Obtenemos un valor para $Z = 0{,}97960$ y para $[1 - F(Z)] = 0{,}16364$

Es posible ahora, calcular

$$S_R = \bar{X} + \sigma_X.Z = 100\,[pieza] + 40\,[pieza].0{,}97960 = 139{,}184\,[pieza]$$

<u>Paso 3</u>: Con S_R se vuelve a calcular Q (ahora con la ecuación (6))

$$Q = \frac{n(S_R)}{[1 - F(S_R)]} + \sqrt{\frac{2.k.D}{k_c} + \left(\frac{n(S_R)}{[1 - F(S_R)]}\right)^2}$$

$$Q = \frac{3{,}46410}{0{,}16364} + \sqrt{\frac{2\,.1000\,.1200}{20} + \left(\frac{3{,}46410}{0{,}16364}\right)^2} = 368{,}2252$$

Repitiendo los pasos 2 y 3, los valores de Q y S_R convergen en:

$$Q = 368{,}51[pieza]$$

$$S_R = 137{,}86\,[pieza]$$

El stock de protección promedio es: $S_R - E\{X\} = 137{,}86 - 100 = 37{,}86\ [pieza]$. El costo total esperado se calcula remplazando Q^*y S_R en la ecuación de CTE.

$$CTE = k.\frac{D}{Q} + \frac{1}{2}.Q.k_c + (S_R - E\{X\}).k_c + f_2.\frac{D}{Q}.\int_{S_R}^{\infty}(X - S_R).f(X).dX$$

$$CTE = 1000.\frac{1200}{368{,}51} + \frac{1}{2}.368{,}51.20 + (37{,}86).20 + 200.\frac{1200}{368{,}51}.3{,}6851 = 10.098{,}8\ [\$]$$

MODELO DE REVISIÓN PERIÓDICA Y AGOTAMIENTO

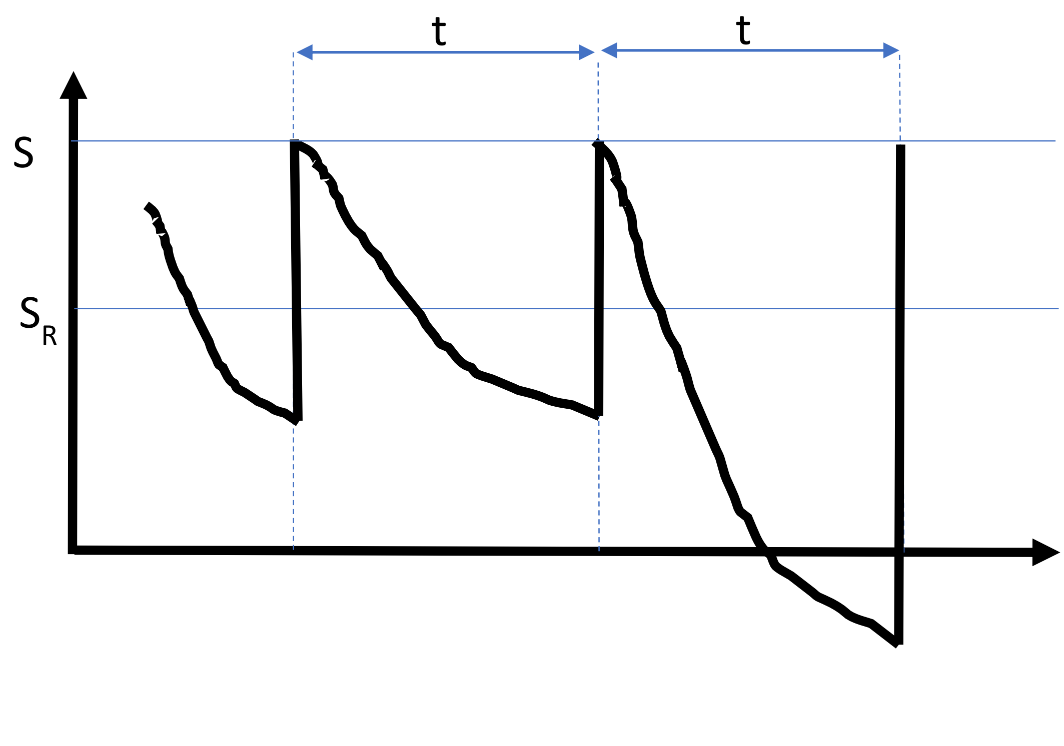
El objetivo del modelo que describiremos a continuación es determinar el nivel óptimo de inventario (S) que debe alcanzarse al realizar cada una de las reposiciones de inventario. Las reposiciones de inventario se realizan a intervalos regulares de tiempo (t). Consideramos los costos de mantenimiento (c_1) y de ruptura (c_2). No se considerará el costo de reposición al optimizar la función de costos ya que será constante e independiente del nivel de inventario. La demanda durante el período (t) es una variable aleatoria continua y uniforme en el tiempo.

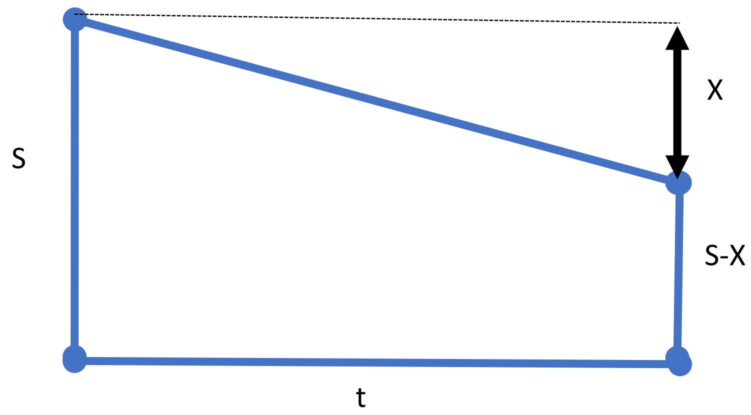
Hipótesis del modelo:

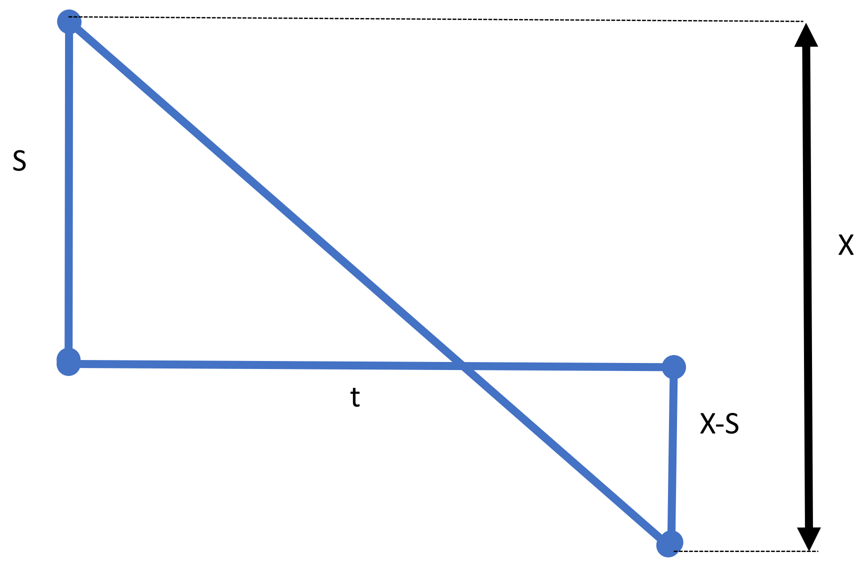
1. La demanda es aleatoria. Se conoce la distribución de probabilidad y es estacionaria, es decir que no cambia en el tiempo.
2. Las revisiones del inventario se realizan a intervalos regulares de tiempo (t).
3. El tiempo de producción (*"lead time"*) es cero.
4. La demanda no satisfecha durante un período se acumula y es entregada cuando ingresa el lote de reposición.
5. El costo del faltante (demanda no satisfecha) es por unidad, y por unidad de tiempo

Variables:

- S: cantidad de unidades del lote de reposición [unidades].
- t: tiempo entre revisiones del inventario.
- c_1: costo de mantener unidades en el inventario por unidad de tiempo [$/(unidad.tiempo)].
- c_2: costo de escasez o ruptura de stock [$/(unidad.tiempo)].
- X: variable aleatoria que describe el comportamiento de la demanda.
- $f(X)$: función de distribución de probabilidad de la demanda.







Existen dos situaciones posibles al finalizar un ciclo: a) que exista un nivel positivo de inventario ($X \leq S$) o b) que haya ocurrido una ruptura de stock y el inventario sea negativo ($X > S$).

Llamaremos $I_a(X)$ al inventario promedio durante un ciclo, e $I_b(X)$ a la rotura media durante un ciclo. Ambas variables dependen de la demanda.

Los valores medios en función de la demanda X y el nivel de inventario S son:

	Demanda durante el ciclo	
	$\boldsymbol{X \leq S}$	$\boldsymbol{X > S}$
Inventario promedio $I_a(X) =$	$S - X/2$	$S^2/2X$
Rotura promedio $I_b(X) =$	0	$(X-S)^2/2X$

El nivel de inventario esperado positivo es:

$$E[I_a(X)] = \int_0^S \left(S - \frac{X}{2}\right).f(X).dX + \int_S^\infty \frac{S^2}{2X}.f(X).dX$$

El nivel de inventario esperado negativo es:

$$E[I_b(X)] = \int_S^\infty \frac{(X-S)^2}{2X}.f(X).dX$$

El costo total es $C(S) = c_1.E[I_a(X)] + c_2.E[I_b(X)]$

$$C(S) = c_1 \int_0^S \left(S - \frac{X}{2}\right).f(X).dX + c_1 \int_S^\infty \frac{S^2}{2X}.f(X).dX + c_2 \int_S^\infty \frac{(X-S)^2}{2X}.f(X).dX$$

Para hallar el mínimo, derivamos $C(S)$ respecto de S (ver nota)

$$\frac{\partial\, C(S)}{\partial S} = (c_1 + c_2)\left[\int_0^S f(X).dX + \int_S^\infty \frac{S}{X}.f(X).dX\right] - c_2$$

Igualando a cero, obtenemos el nivel de inventario óptimo S^*:

$$\int_0^{S^*} f(X).dX + \int_{S^*}^\infty \frac{S^*}{X}.f(X).dX = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

$$F(S^*) + S^* \int_{S^*}^\infty \frac{f(X)}{X}.dX = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

Si la demanda es de aleatoria discreta, puede demostrarse (ver en Kaufmann, Arnold) que el nivel del stock óptimo S^*se calcula como:

$$H(S^* - 1) < \frac{c_2}{c_1 + c_2} < H(S^*)$$

Donde:

$$H(S) = p(X \leq S) + \left(S + \frac{1}{2}\right) . \sum_{S+1}^{\infty} \frac{p(X)}{X}$$

El costo total es:

$$C(S) = c_1 \sum_{X=0}^{S} \left(S - \frac{X}{2}\right) p(X) + c_1 \sum_{X=S+1}^{\infty} \left(\frac{S^2}{2X}\right) . p(X) + c_2 \sum_{X=S+1}^{\infty} \frac{(X-S)^2}{2X} . p(X)$$

<u>Nota</u>

Dada una función: $F(t) = \int_{A(t)}^{B(t)} G(t,x) \, . \, dx$

su derivada es:

$\frac{\partial \, F(t)}{\partial t} = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial G}{\partial x} . \, dx + G[t, B(t)] \frac{\partial B(t)}{\partial t} + G[t, A(t)] \frac{\partial A(t)}{\partial t}$

Ejemplo #4 (Kaufmann)

- c_1: 1 [k.$/(unidad.mes)]
- c_2: 20 [k.$/(unidad.mes)].
- X: variable aleatoria que describe el comportamiento de la demanda

X(unidades)	0	1	2	3	4	5
$p(X)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

$$\rho = \frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{20}{20+1} = 0{,}9524$$

$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{p(X)}$	$\boldsymbol{\frac{p(X)}{X}}$	$\boldsymbol{\sum_{M=S+1}^{\infty} \frac{p(X)}{X}}$	$\boldsymbol{\left(S+\frac{1}{2}\right).\sum_{S+1}^{\infty} \frac{p(X)}{X}}$	$\boldsymbol{p(X \leq S)}$	$\boldsymbol{H(S)}$
0	0	0,1	∞	0,445	0,2225	0,1	0,3225
1	1	0,2	0,200	0,245	0,3675	0,3	0,6675
2	2	0,2	0,100	0,145	0,3625	0,5	0,8625
3	3	0,3	0,100	0,045	0,1575	0,8	0,9575
4	4	0,1	0,025	0,020	0,0900	0,9	0,9900
5	5	0,1	0,020	0,000	0,0000	1	1
>5	>5	0	0,000	0,000	0,0000	1	1

$H(2) \leq \rho \leq H(3)$ por tanto, el tamaño del stock óptimo es $S^* = 3$

El costo total resulta:

$$C(S) = c_1 \sum_{X=0}^{S} \left(S - \frac{X}{2}\right) p(X) + c_1 \sum_{X=S+1}^{\infty} \left(\frac{S^2}{2X}\right).p(X) + c_2 \sum_{X=S+1}^{\infty} \frac{(X-S)^2}{X}.p(X)$$

$C(S) = 1\,.\,1{,}65 + 1\,.\,0{,}2025 + 20\,.\,0{,}0525 = 2{,}9$ [k.$/mes]

ANEXO

FUNCIÓN DE ESTÁNDAR DE PÉRDIDAS

z	F(Z)	L(Z)
-4,0	0,00003	4,00001
-3,9	0,00005	3,90001
-3,8	0,00007	3,80002
-3,7	0,00011	3,70003
-3,6	0,00016	3,60004
-3,5	0,00023	3,50006
-3,4	0,00034	3,40009
-3,3	0,00048	3,30013
-3,2	0,00069	3,20019
-3,1	0,00097	3,10027
-3,0	0,00135	3,00038
-2,9	0,00187	2,90054
-2,8	0,00256	2,80076
-2,7	0,00347	2,70106
-2,6	0,00466	2,60146
-2,5	0,00621	2,50200
-2,4	0,00820	2,40272
-2,3	0,01072	2,30366
-2,2	0,01390	2,20489
-2,1	0,01786	2,10647
-2,0	0,02275	2,00849
-1,9	0,02872	1,91105
-1,8	0,03593	1,81428
-1,7	0,04457	1,71829
-1,6	0,05480	1,62324
-1,5	0,06681	1,52931
-1,4	0,08076	1,43667
-1,3	0,09680	1,34553
-1,2	0,11507	1,25610
-1,1	0,13567	1,16862
-1,0	0,15866	1,08332
-0,9	0,18406	1,00043
-0,8	0,21186	0,92021
-0,7	0,24196	0,84288
-0,6	0,27425	0,76867
-0,5	0,30854	0,69780
-0,4	0,34458	0,63044
-0,3	0,38209	0,56676
-0,2	0,42074	0,50689
-0,1	0,46017	0,45094
0,0	0,50000	0,39894

z	F(Z)	L(Z)
0,0	0,50000	0,39894
0,1	0,53983	0,35094
0,2	0,57926	0,30689
0,3	0,61791	0,26676
0,4	0,65542	0,23044
0,5	0,69146	0,19780
0,6	0,72575	0,16867
0,7	0,75804	0,14288
0,8	0,78814	0,12021
0,9	0,81594	0,10043
1,0	0,84134	0,08332
1,1	0,86433	0,06862
1,2	0,88493	0,05610
1,3	0,90320	0,04553
1,4	0,91924	0,03667
1,5	0,93319	0,02931
1,6	0,94520	0,02324
1,7	0,95543	0,01829
1,8	0,96407	0,01428
1,9	0,97128	0,01105
2,0	0,97725	0,00849
2,1	0,98214	0,00647
2,2	0,98610	0,00489
2,3	0,98928	0,00366
2,4	0,99180	0,00272
2,5	0,99379	0,00200
2,6	0,99534	0,00146
2,7	0,99653	0,00106
2,8	0,99744	0,00076
2,9	0,99813	0,00054
3,0	0,99865	0,00038
3,1	0,99903	0,00027
3,2	0,99931	0,00019
3,3	0,99952	0,00013
3,4	0,99966	0,00009
3,5	0,99977	0,00006
3,6	0,99984	0,00004
3,7	0,99989	0,00003
3,8	0,99993	0,00002
3,9	0,99995	0,00001
4,0	0,99997	0,00001

Bibliografía

TAHA, HAMDY A. Investigación de Operaciones, 7ma edición. Pearson Educación, México 2004.

KAUFMANN, ARNOLD, Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones. Cia Editorial Continental S.A de C.V., Mexico (1984).

RÍOS, FRANCY; MARTÍNEZ, ANDRÉS; PALOMO, TERESA; CÁCERES, SUSANA y DÍAZ, MARISOL. Inventarios probabilísticos con demanda independiente de revisión continua, modelos con nuevos pedidos. CIENCIA ergo sum. Vol. 15-3 noviembre 2008-febrero 2009. Universidad Autónoma de México, Toluca México, pp. 251-258.

van RYZIN, GARRETT J. Analyzing Inventory Cost and Service in Supply Chains. Columbia Business School, April 2001.

ANDRADE, ANDREW; SIKORSKI, CLAUDIA. Numerical Approximation of the Inverse Standarized Loss Function for Inventory Control Subject to Uncertain Demand. Canadian Operations Research Society. 2016 Conference.