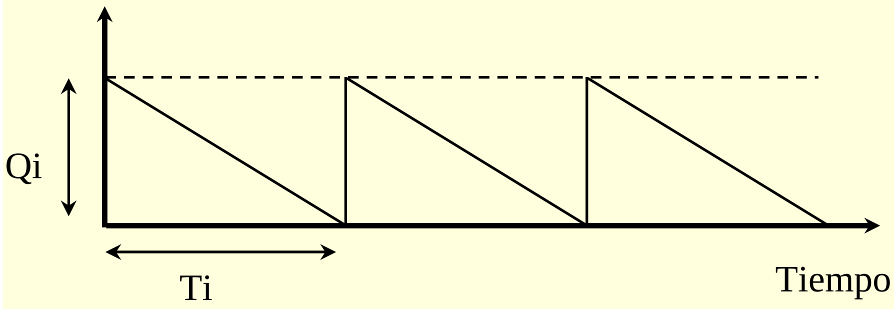
MODELOS DE INVENTARIO MULTI - PRODUCTOS

La clase anterior....

MODELO BÁSICO DE STOCKS



Hipótesis:

1- Demanda Constante y Conocida.
2-Resposición Instantánea.
3-Costo unitario de almacenamiento por unidad de tiempo c1, constante.
4-Costo de Reposición k, constante.
5-Costo unitario de producto b, constante.
6-No existen otros costos.
7-No existen restricciones.
8-Al comienzo de cada período no hay stock ni pedidos insatisfechos.

Costos Involucrados

Costo de Compra (b \$/unidad)

Costo Fijo del Pedido (k \$)

Costo de Almacenamiento (c1 \$/unidad. t)

El objetivo es hallar el valor de Qi que hace mínimo el Costo Total en el período T.

CT=(1/2).c1.Qi.T + k.D/Qi + b.D   MIN

dCT(Qi)/dQi=0   o sea:

(1/2).c1.T - k.D/Qi^2 = 0   de donde:

Q* = $\sqrt{\dfrac{2.k.D}{c_1.T}}$ T* = $\sqrt{\dfrac{2.k.T}{c_1.D}}$

CT*= $\sqrt{2.k.D.c_1.T} + D.b$

Programa de la Clase

- Análisis gráfico de modelos multi-producto (dos productos)
- Restricciones en modelos multi-producto
- Formulación de modelos de un solo producto con restricciones de desigualdad. Condiciones de Kuhn y Tucker
- Formulación de modelos multi-producto con restricciones

BIBLIOGRAFIA

Taha (7ma ed. Capítulo 11 [11.2.3])
Marin; CEI Tomo II
Kaufman (Tomo I sección 87)
Salvador (apunte en www.ioperativa.com.ar)

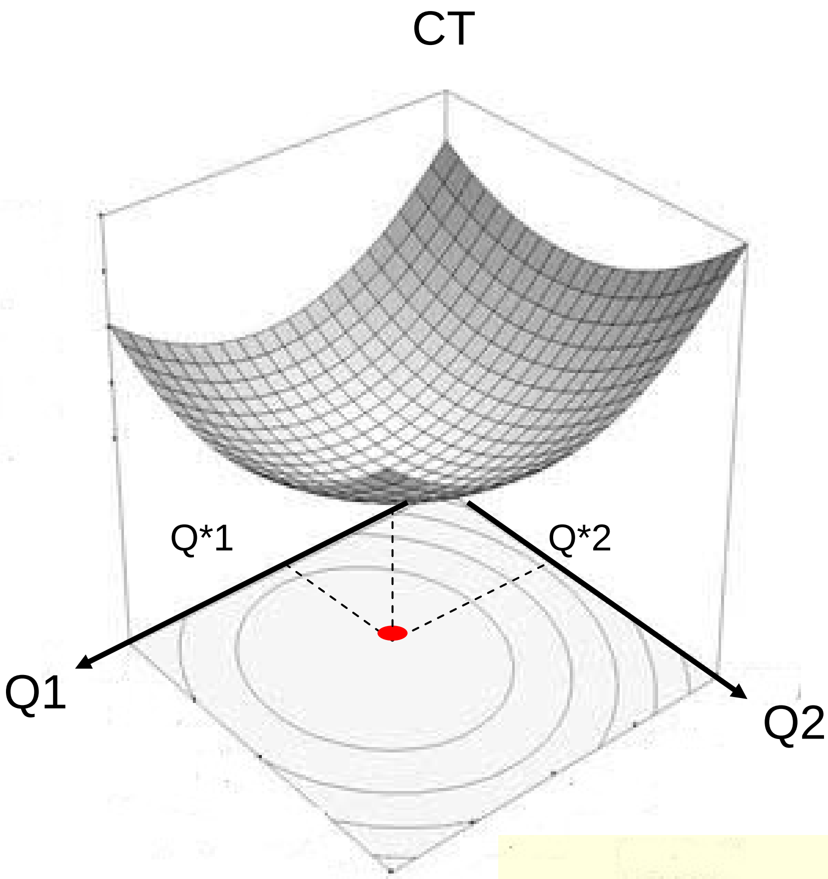
PROBLEMAS

Guía TP: problemas 7.7; 7.8; 7.9; 7.12; 7.13; 7.14; 7.15

Programa de la Clase

- **Análisis gráfico de modelos multi-producto (dos productos)**
- Restricciones en modelos multi-producto
- Formulación de modelos de un solo producto con restricciones de desigualdad. Condiciones de Kuhn y Tucker
- Formulación de modelos multi-producto con restricciones

Análisis Gráfico de Modelos Multi-Producto



Si simultáneamente se maneja más de un producto, el modelo básico de inventarios debe ser adaptado para optimizar el costo total de operación.

Supongamos que se opera con dos productos para los que se cumplen las hipótesis del modelo básico:

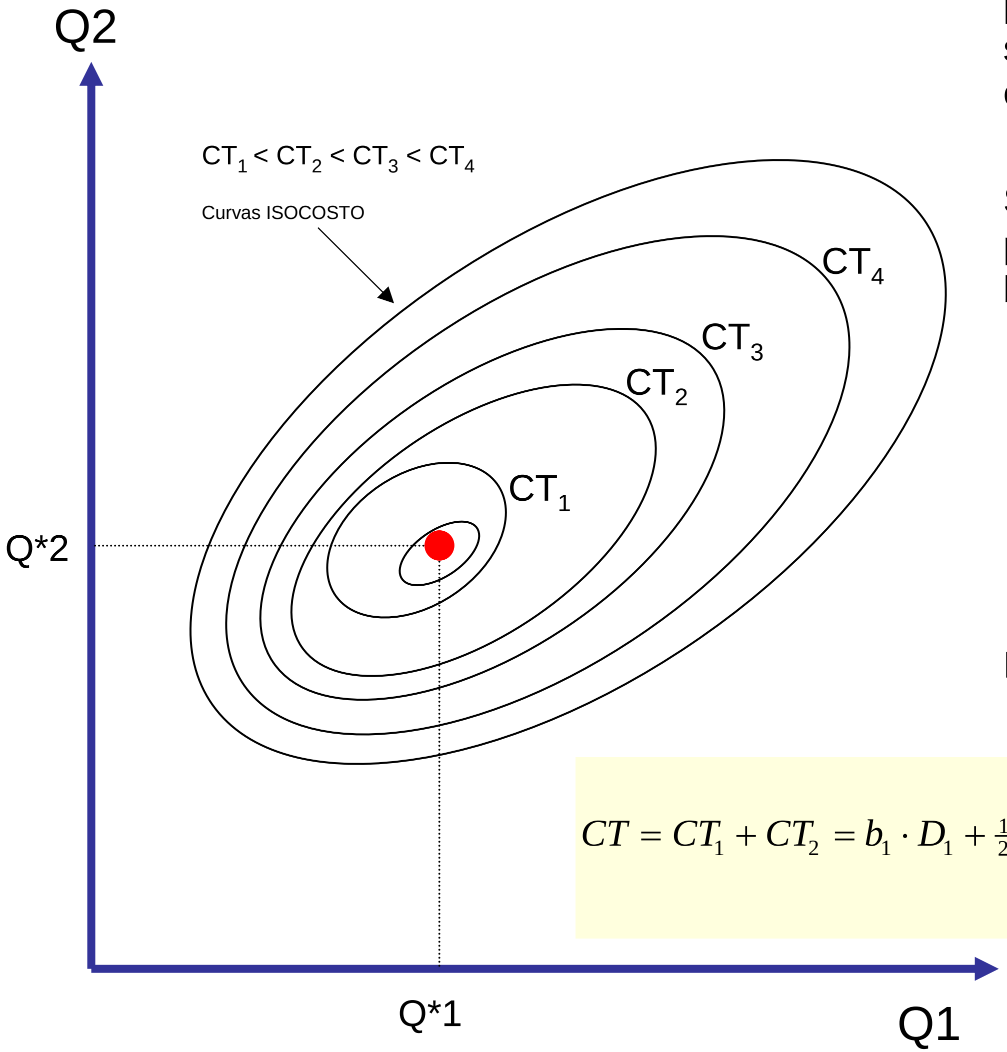
$$CT_1 = b_1 \cdot D_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot Q_{i1} \cdot T + K_1 \cdot \frac{D_1}{Q_{i1}}$$

$$CT_2 = b_2 \cdot D_2 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot Q_{i2} \cdot T + K_2 \cdot \frac{D_2}{Q_{i2}}$$

El costo total será la suma de CT_1 y CT_2:

$$CT = CT_1 + CT_2 = b_1 \cdot D_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot Q_{i1} \cdot T + K_1 \cdot \frac{D_1}{Q_{i1}} + b_2 \cdot D_2 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot Q_{i2} \cdot T + K_2 \cdot \frac{D_2}{Q_{i2}}$$

Análisis Gráfico de Modelos Multi-Producto



Si simultáneamente se maneja más de un producto, el modelo básico de inventarios debe ser adaptado para optimizar el costo total de operación.

Supongamos que se opera con dos productos para los que se cumplen las hipótesis del modelo básico:

$$CT_1 = b_1 \cdot D_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot Q_{i1} \cdot T + K_1 \cdot \frac{D_1}{Q_{i1}}$$

$$CT_2 = b_2 \cdot D_2 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot Q_{i2} \cdot T + K_2 \cdot \frac{D_2}{Q_{i2}}$$

El costo total será la suma de CT_1 y CT_2:

$$CT = CT_1 + CT_2 = b_1 \cdot D_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot Q_{i1} \cdot T + K_1 \cdot \frac{D_1}{Q_{i1}} + b_2 \cdot D_2 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot Q_{i2} \cdot T + K_2 \cdot \frac{D_2}{Q_{i2}}$$

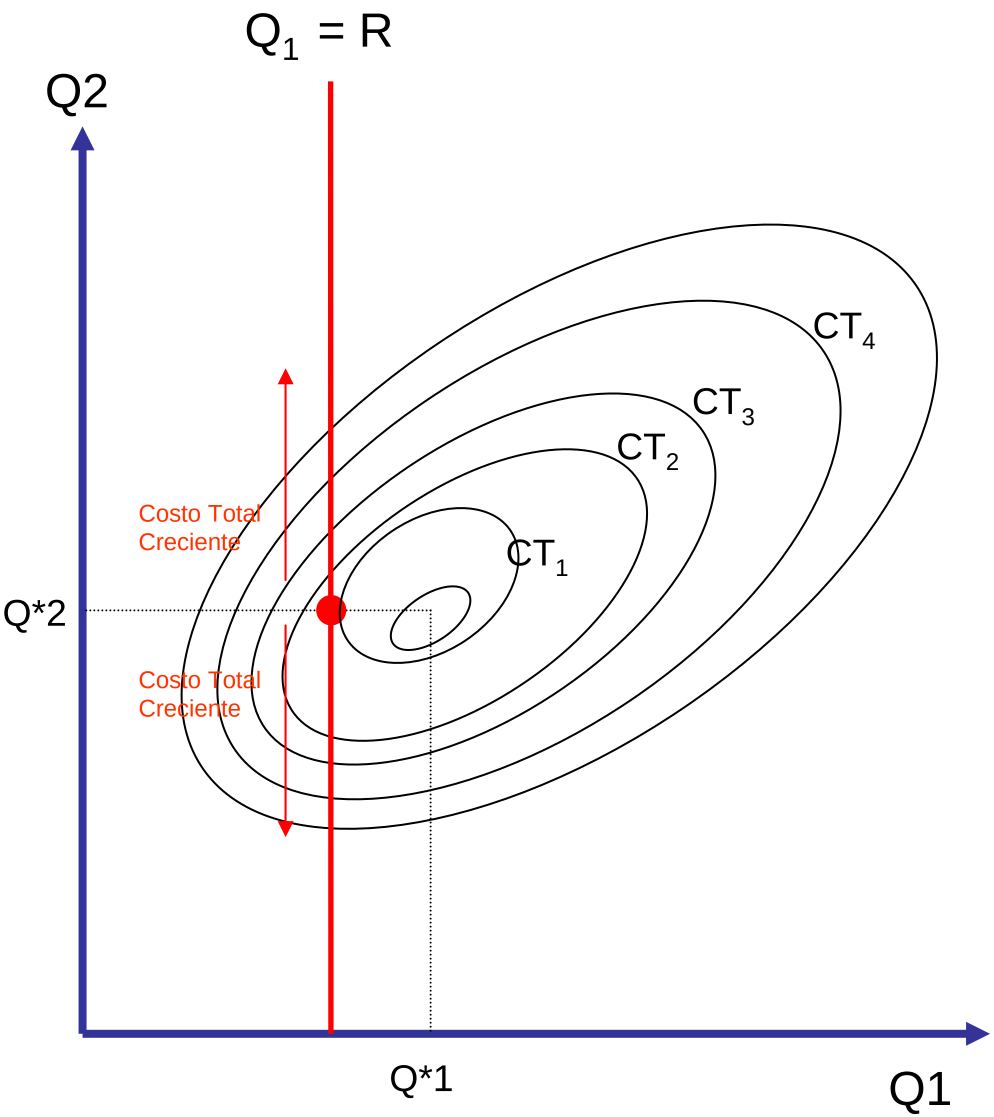
Programa de la Clase

- Análisis gráfico de modelos multi-producto (dos productos)
- **Restricciones en modelos multi-producto**
- Formulación de modelos de un solo producto con restricciones de desigualdad. Condiciones de Kuhn y Tucker
- Formulación de modelos multi-producto con restricciones

Restricciones en modelos Multi-Producto

Tipos de restricciones	Formulación
Limitación del espacio disponible para almacenaje	$v_1.Q_1 + v_2.Q_2 < V$
Limitación del capital promedio inmovilizado	$(1/2).b_1.Q_1 + (1/2).b_2.Q_2 < B$
Costo del capital inmovilizado	$(1/2).i.b_1.Q_1 + (1/2).i.b_2.Q_2 < S$
Limitación en la cantidad de ordenes a emitir en un período	$D_1 / Q_1 + D_2 / Q_2 < TO$

Restricciones en Modelos Multi-Producto

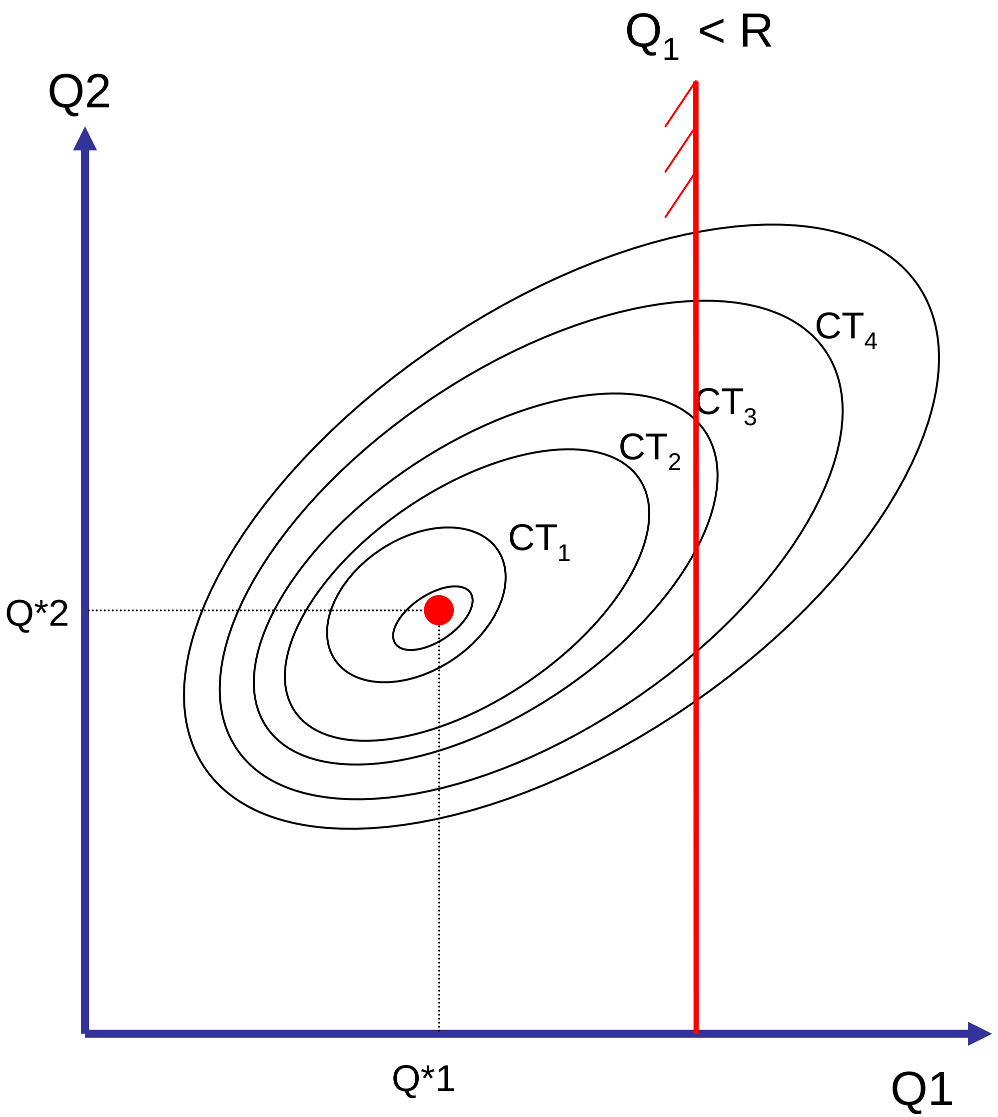


Si se impone una restricción de igualdad para Q_1 el conjunto de soluciones posibles es una semirecta paralela al eje Q_2

El valor óptimo para Q_2 es el mismo que minimiza el costo total del producto 2 considerado individualmente.

El lote óptimo para el producto 1 es el único posible: R

Restricciones en Modelos Multi-Producto

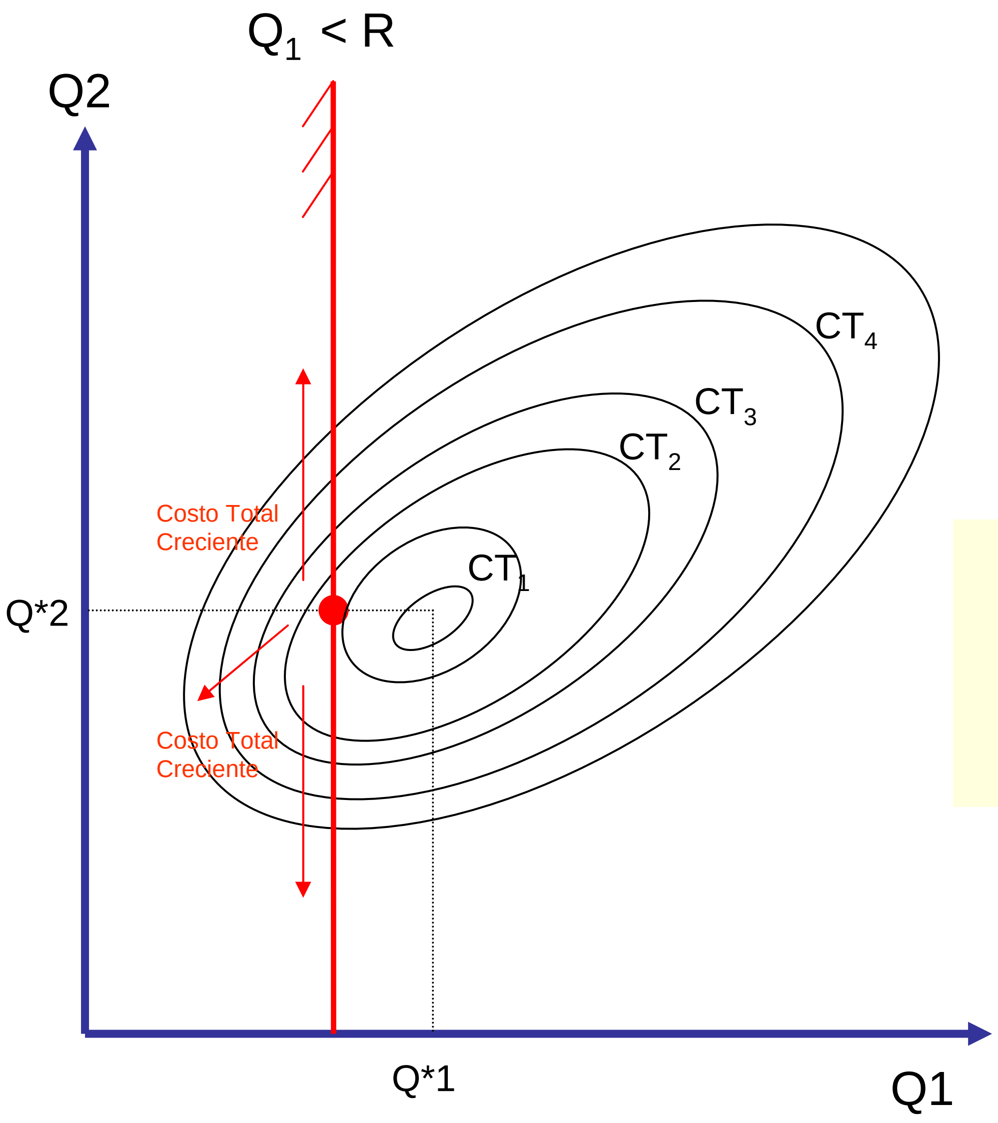


Si la restricción que se impone para el producto 1 es de desigualdad, pero no excluye el valor óptimo sin restricciones.

El valor óptimo para Q_2 es el mismo que minimiza el costo total del producto 2 considerado individualmente.

El valor óptimo del producto 1 tampoco cambia respecto del considerado individualmente.

Restricciones en Modelos Multi-Producto



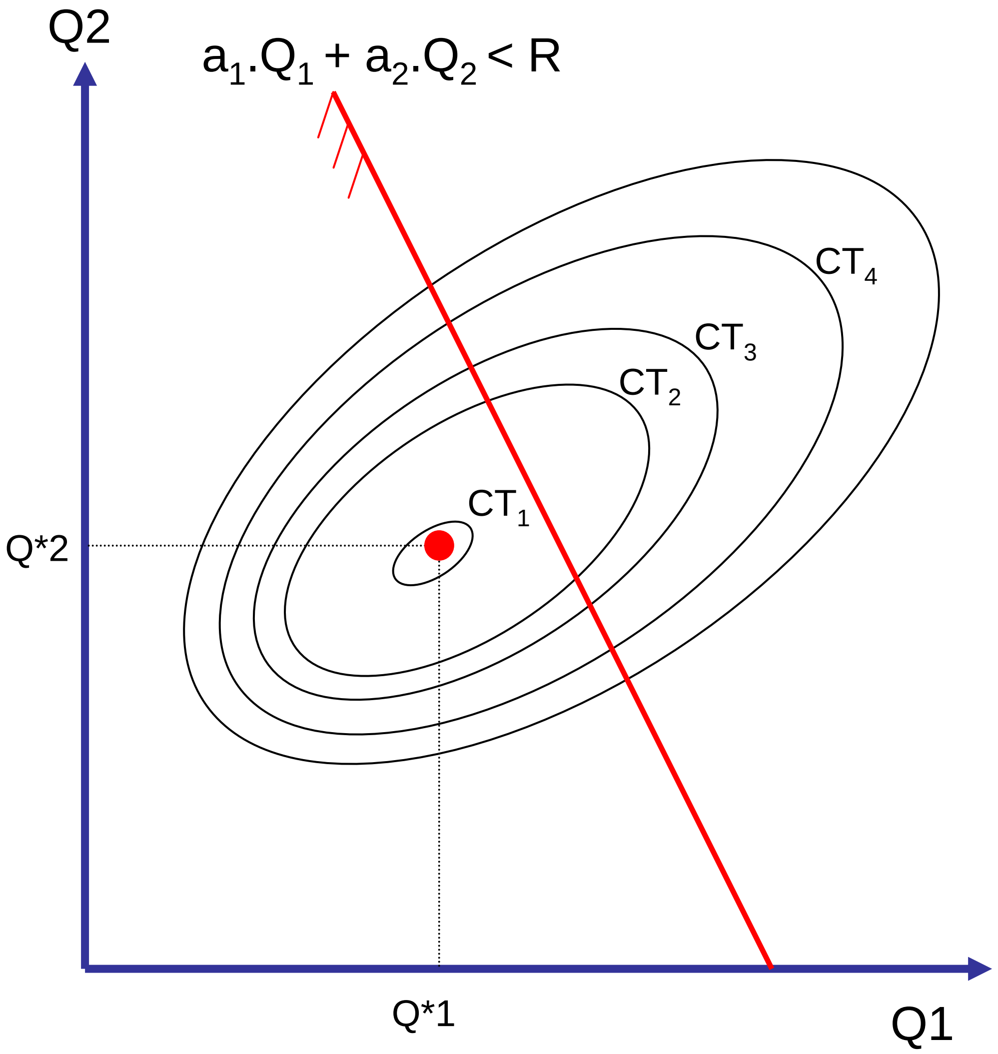
Si la restricción que se impone para el producto 1 es de desigualdad, y la restricción excluye el valor óptimo sin restricciones.

Entonces el valor óptimo del producto se ajustará a la restricción.

El valor del lote óptimo para el producto 2 no cambia respecto del óptimo sin restricciones.

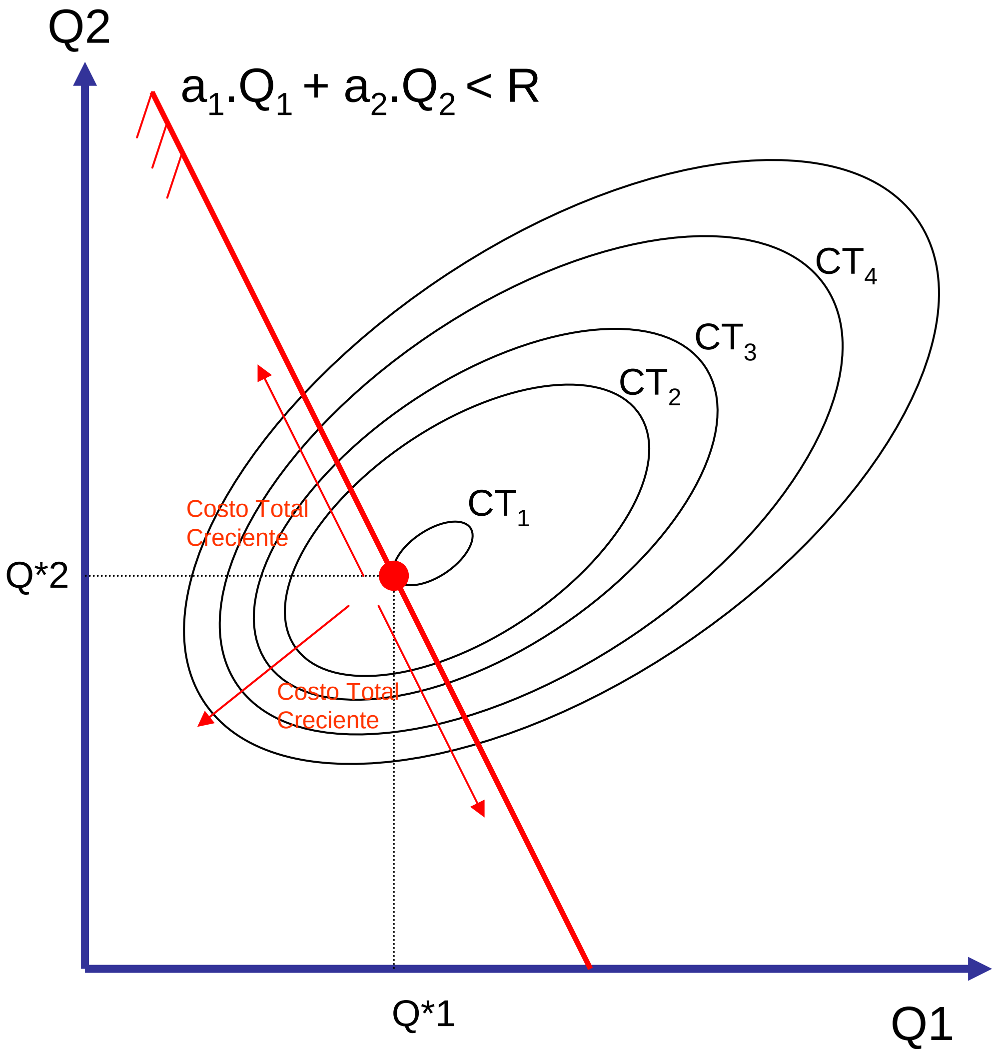
SI LAS RESTRICCIONES SON INDEPENDIENTES, PUEDE HALLARSE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA PARA EL CONJUNTO, OPTIMIZANDO CADA PRODUCTO POR SEPARADO

Restricciones en Modelos Multi-Producto



Si la restricción es común a ambos productos, e incluye el óptimo sin restricciones, los lotes óptimos coincidirán con los calculados para cada producto en forma independiente.

Restricciones en Modelos Multi-Producto

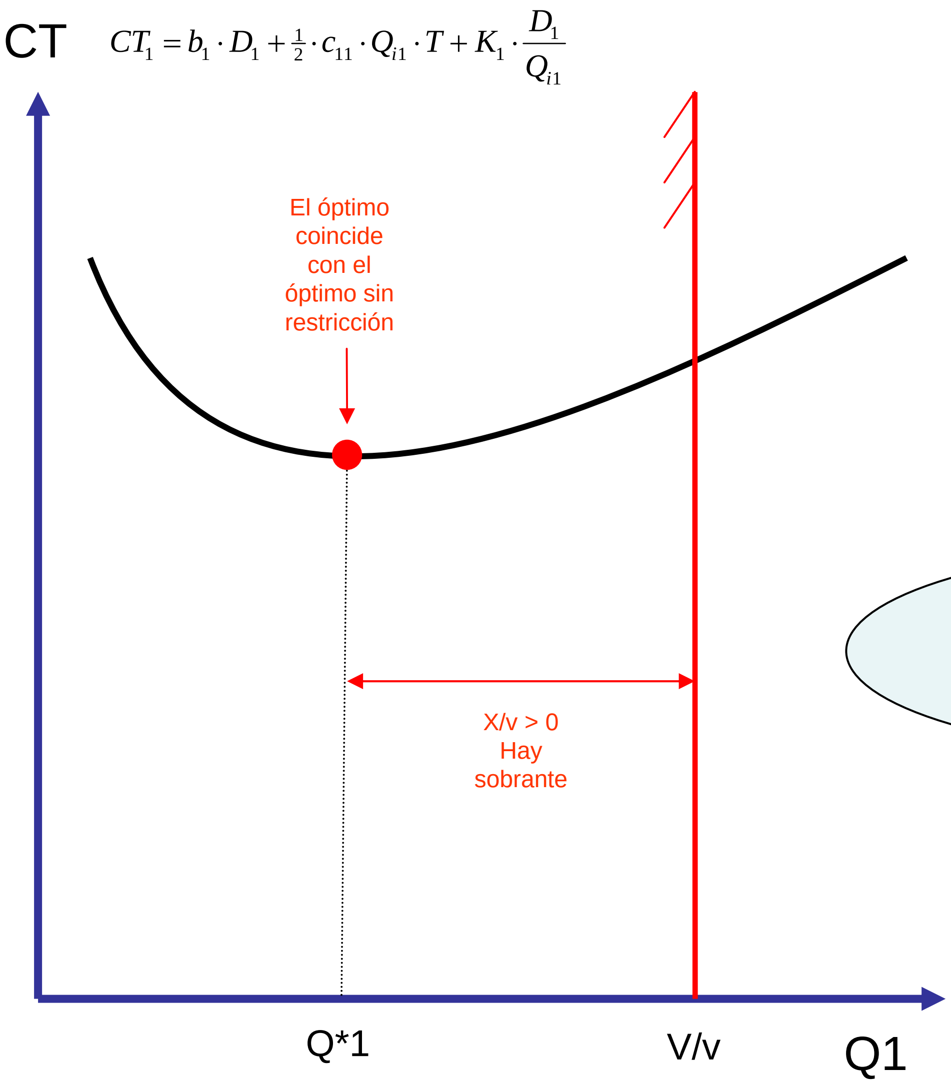


Si la restricción es común a ambos productos, y excluye el óptimo sin restricciones, los lotes óptimos corresponderán con la curva de isocosto tangente a la restricción.

Programa de la Clase

- Análisis gráfico de modelos multi-producto (dos productos)
- Restricciones en modelos multi-producto
- **Formulación de modelos de un solo producto con restricciones de desigualdad. Condiciones de Kuhn y Tucker**
- Formulación de modelos multi-producto con restricciones

Modelos de un solo producto con restricciones



Espacio ocupado por unidad de producto: v_1

Espacio total disponible: V

$v_1.Q_1 < V$

Para transformar la desigualdad en una igualdad se incorpora la variable slack X

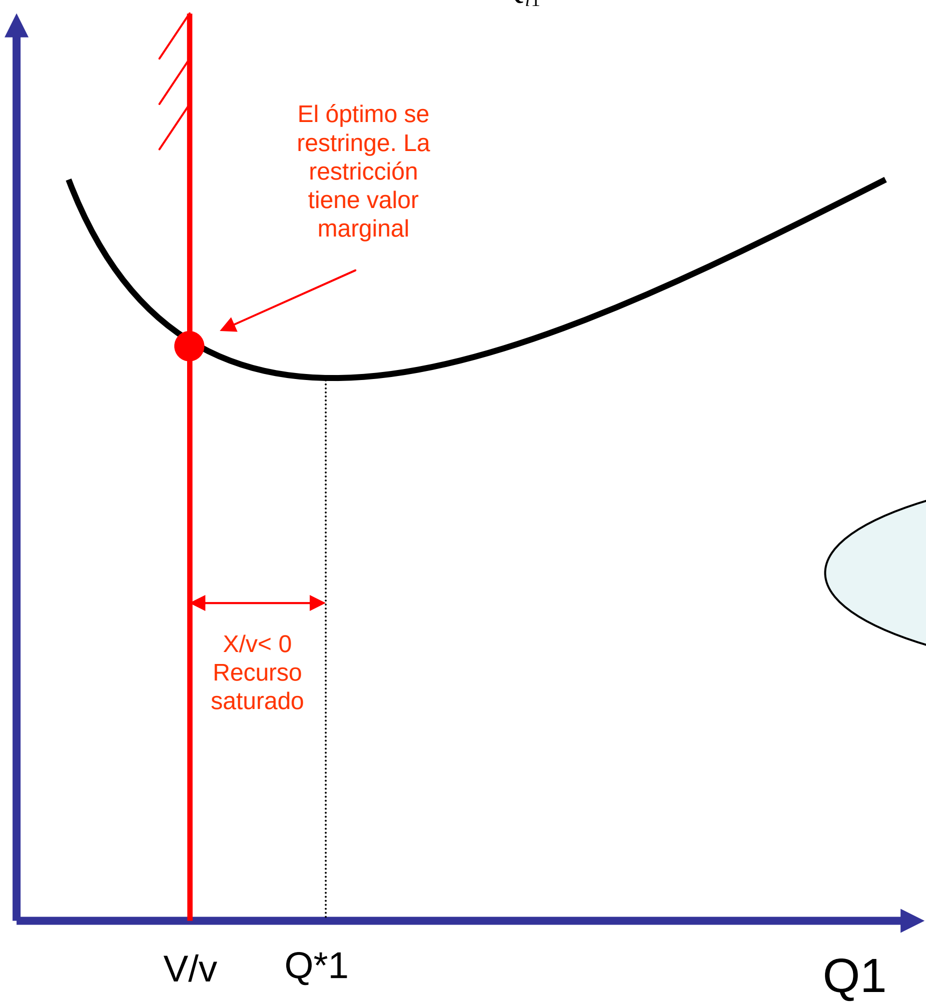
$v_1.Q_1 + X = V$

X > 0

Valor marginal de la restricción = 0

Modelos de un solo producto con restricciones

CT $$CT_1 = b_1 \cdot D_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot Q_{i1} \cdot T + K_1 \cdot \frac{D_1}{Q_{i1}}$$



Espacio ocupado por unidad de producto: v_1

Espacio total disponible: V

$$v_1.Q_1 < V$$

Para transformar la desigualdad en una igualdad se incorpora la variable slack X

$$v_1.Q_1 + X = V$$

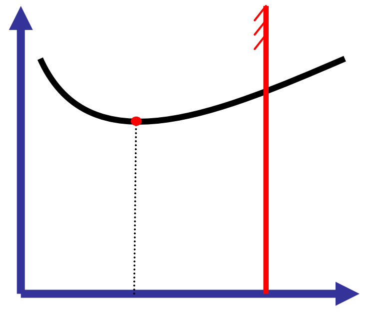
X = 0

Valor marginal de la restricción < 0

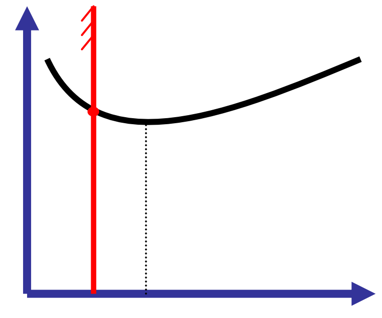
$\uparrow V \quad CT \downarrow$

Condiciones de Kuhn y Tucker (*)

Recurso excedente



Recurso saturado



X > 0

Valor marginal de la restricción Y = 0

X = 0

Valor marginal de la restricción Y < 0

Método de Lagrange
(restricciones de =)

dL/dQi = 0

dL/dY=0

X .Y = 0

X >= 0

Y <= 0

(*) También conocidas como condiciones Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Modelos de un solo producto con restricciones

$$CT = b \cdot D + \tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \frac{D}{Q_i} \qquad V \geq v \cdot Q_i \qquad v \cdot Q_i + X = V$$

$$L(Q_i ; Y) = b \cdot D + \tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \frac{D}{Q_i} - Y \cdot (v \cdot Q_i + X - V)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - K \cdot \frac{D}{Q_i^2} - Y \cdot v = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -v \cdot Q_i - X + V = 0 \qquad [2]$$

$$X \cdot Y = 0 \qquad [3]$$

$$X \geq 0 \qquad [4]$$

$$Y \leq 0 \qquad [5]$$

Y=0

$$Q_i = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{c_1 \cdot T}}$$

Se remplaza Qi en [2] y se despeja X

Si **X es no negativo** se ha obtenido la solución.

Si no debe rechazarse que Y=0

X=0

$$Q_i = \frac{V}{v}$$

$$Y = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - K \cdot \frac{D}{Q_i^2}}{v} = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - K \cdot \frac{D}{\left(\frac{V}{v}\right)^2}}{v}$$

Si **Y es negativo** se ha alcanzado la solución.

Si no se debe descartar que X=0

Modelos de un solo producto con restricciones

Interpretación de Y:

$$L(Q_i;Y) = b \cdot D + \tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \frac{D}{Q_i} - Y \cdot (v \cdot Q_i + X - V)$$

$$\frac{\partial L(Q_i;Y;V)}{\partial V} = Y$$

Un incremento unitario en la disponibilidad del volumen V produce una variación de costo total de Y.

Por eso decimos que Y es el **valor marginal** de la restricción.

Programa de la Clase

- Análisis gráfico de modelos multi-producto (dos productos)
- Restricciones en modelos multi-producto
- Formulación de modelos de un solo producto con restricciones de desigualdad. Condiciones de Kuhn y Tucker
- **Formulación de modelos multi-producto con restricciones**

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones (*)

Minimizar

$$CT = \sum_{j=1}^{m} CT_j = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} kj \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} \le V \longrightarrow \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} + X = V$$

El Langrangiano es:

$$L = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{J=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} k \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}} - Y\left(\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} + X - V \right)$$

Las condiciones de Kuhn y Tucker para el óptimo son:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{ij}} = \sum_{J=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} k \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}^{\,2}} - Y \cdot v_j = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} - X + V = 0 \qquad [2]$$

$$Y \le 0 \qquad [3]$$

$$X \ge 0 \qquad [4]$$

$$X \cdot Y = 0 \qquad [5]$$

Y=0

Se cumplen [3] y [5]

De [1] $\quad Q_{ij} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot k \cdot D_j}{C_{1j} \cdot T}}$

De [2] $\quad X = V - \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij}$

Si es no negativo, cumple [4] y se ha encontrado el óptimo

Si no, debe suponerse que Y<0 y X=0

(*) Este procedimiento es conocido también como Método de **Beckmann**

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones (*)

Minimizar

$$CT = \sum_{j=1}^{m} CT_j = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} kj \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} \le V \longrightarrow \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} + X = V$$

El Langrangiano es:

$$L = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{J=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} k \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}} - Y\left(\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} + X - V\right)$$

Las condiciones de Kuhn y Tucker para el óptimo son:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q_{ij}} = \sum_{J=1}^{m} \dfrac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} k \cdot \dfrac{D_j}{Q_{ij}^{\;2}} - Y \cdot v_j = 0 & [1] \\ \dfrac{\partial L}{\partial Y} = -\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} - X + V = 0 & [2] \\ Y \le 0 & [3] \\ X \ge 0 & [4] \\ X \cdot Y = 0 & [5] \end{cases}$$

X=0

Se cumplen [4] y [5]

De [1] $k \cdot \dfrac{D_j}{Q_{ij}^{\;2}} = \dfrac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot T - Y \cdot v_j \Rightarrow Q_{ij} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot k \cdot D_j}{C_{1j} \cdot T - Y . v_j}}$

De [2] $V = \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij}$

Se resuelve por tanteo, dándole valores a Y (<0), se
Obtienen los distintos Qij, los que se remplazan en V=....
Se varía Y hasta que se cumpla la igualdad en [2]

(*) Este procedimiento es conocido también como Método de **Beckmann**

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones

EJEMPLO I

- **2 Productos**
- **Modelo Básico en ambos productos**
- **Sujetos a una restricción lineal**

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones
EJEMPLO I

		Producto 1	Producto 2	
Demanda	u/año	32.000	135.000	D
Tasa de interés	% anual	10%	10%	i
Costo de reorden	$	1.000	5.000	k
Precio	$/u	40	60	b
Costo almacenamiento	$/u.año	4	6	c1
Costo agotamiento	$/u.año	infinito	infinito	c2
Reposición		instantánea	instantánea	
Lote óptimo sin restriciones	$Q_{ij} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D_j}{C_{1j} \cdot T}}$	4.000	15.000	Q_i

CT=$ 9.486.000

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones EJEMPLO I

		Producto 1	Producto 2	
Demanda	u/año	32.000	135.000	D
Tasa de interés	% anual	10%	10%	i
Costo de reorden	$	1.000	5.000	k
Precio	$/u	40	60	b
Costo almacenamiento	$/u.año	4	6	c1
Costo agotamiento	$/u.año	infinito	infinito	c2
Reposición		instantánea	instantánea	

Restricción de espacio

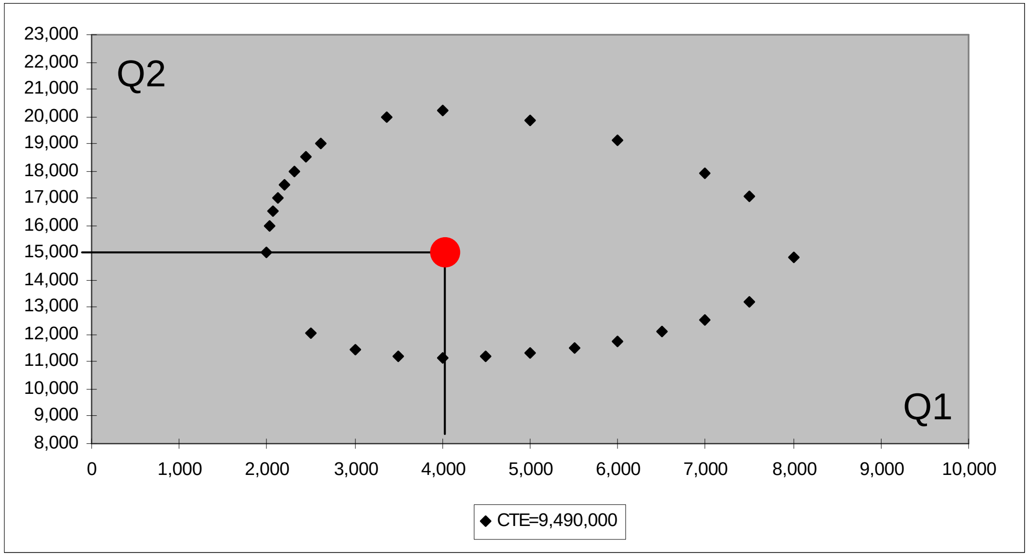
Espacio unitario	dm^3	3	5	v_i
Espacio disponible	dm^3	15.000		V

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones
EJEMPLO I

$$CT = CT_1 + CT_2 = k_1.\frac{D_1}{Q_{i1}} + b_1.D_1 + \frac{1}{2}.C_{11}.Q_{i1}.T + k_2.\frac{D_2}{Q_{i2}} + b_2.D_2 + \frac{1}{2}.C_{12}.Q_{i2}.T$$

$$CT = 1000.\frac{32000}{Q_{i1}} + 40.32000 + \frac{1}{2}.4.Q_{i1}.1 + 5000.\frac{135000}{Q_{i2}} + 60.135000 + \frac{1}{2}.6.Q_{i2}.1$$

$$CT = 9380000 + \frac{32000000}{Q_{i1}} + 2.Q_{i1}. + \frac{675000000}{Q_{i2}} + 3.Q_{i2}.$$



Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones EJEMPLO I

Minimizar

$$CT = 9380000 + \frac{32000000}{Q_{i1}} + 2.Q_{i1}. + \frac{675000000}{Q_{i2}} + 3.Q_{i2}.$$

Sujeto a:

$$3.Q_{i1}. + 5.Q_{i2}. \leq 15000$$

$$3.Q_{i1}. + 5.Q_{i2}. + X - 15000 = 0$$

$$CT = 9380000 + \frac{32000000}{Q_{i1}} + 2.Q_{i1}. + \frac{675000000}{Q_{i2}} + 3.Q_{i2}. - Y\left[3.Q_{i1}. + 5.Q_{i2}. + X - 15000\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial CT}{\partial Q_1} = 2 - \dfrac{32000000}{Q_1^2} - 3Y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial CT}{\partial Q_2} = 3 - \dfrac{675000000}{Q_2^2} - 5Y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial CT}{\partial Y} = 3.Q_1 + 5.Q_2 + X - 15000 = 0 \\[2ex] Y \leq 0 \\ X \geq 0 \\ X \cdot Y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{32000000}{2-3Y}}$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{675000000}{3-5Y}}$$

$$3Q_1 + 5Q_2 + X - 15000 = 0$$

$$Y \leq 0$$

$$X \geq 0$$

$$X \cdot Y = 0$$

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones EJEMPLO I

$$Q_1 = \sqrt{\frac{32000000}{2-3Y}}$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{675000000}{3-5Y}}$$

$$3Q_1 + 5Q_2 + X - 15000 = 0$$

$$Y \leq 0$$

$$X \geq 0$$

$$X \cdot Y = 0$$

Y=0

$$Q_1 = \sqrt{\frac{32000000}{2}} = 4000$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{675000000}{3}} = 15000$$

$$3.4000 + 5.15000 = 87500 > 15000$$

No cumple, por tanto Y es no nulo

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones
EJEMPLO I

$$Q_1 = \sqrt{\frac{32000000}{2-3Y}}$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{675000000}{3-5Y}}$$

$$3Q_1 + 5Q_2 + X - 15000 = 0$$

$$Y \leq 0$$

$$X \geq 0$$

$$X \cdot Y = 0$$

X=0

Y	Q_1	Q_2	$3Q_1+5Q_2$
-10	1000	3569	20844
-15	825	2942	17184
-19,9	720	2567	15000
-20	718	2560	14955

$$CT = 9380000 + \frac{32000000}{720} + 2.720. + \frac{675000000}{2567} + 3.2567 = \$9696538$$

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones

EJEMPLO II

- **2 Productos**
- **Modelo Básico en ambos productos**
- **Sujetos a una restricción NO lineal**

Un caso sencillo (y habitual) de resolución con restricciones no lineales se presenta en restricciones que tienen la forma a/Qi

Por ejemplo, al limitar el número total de órdenes
$n_1+n2<N$

$D_1/Q_1+D_2/Q_2<N$

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones
EJEMPLO II

		Producto 1	Producto 2	
Demanda	u/año	32.000	135.000	D
Tasa de interés	% anual	10%	10%	i
Costo de reorden	$	1.000	5.000	k
Precio	$/u	40	60	b
Costo almacenamiento	$/u.año	4	6	c1
Costo agotamiento	$/u.año	infinito	infinito	c2
Reposición		instantánea	instantánea	

Restricción de cantidad de ordenes

Total de ordenes	#	7	Di/Qi

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones EJEMPLO II

Minimizar

$$CT = 9380000 + \frac{32000000}{Q_{i1}} + 2.Q_{i1}. + \frac{675000000}{Q_{i2}} + 3.Q_{i2}.$$

Sujeto a:

$$32000/Q_{i1}. + 135000/Q_{i2}. \leq 7$$

Se realiza el cambio de variable: $w_i = 1/Q_i$

$$CT = 9380000 + 32000000.w_1 + 2/w_1. + 675000000.w_2 + 3/w_2.$$

$$32000.w_1. + 135000.w_2. \leq 7$$

De modo que el problema vuelve a la forma anterior

$$CT = 9380000 + 32000000.w_1 + 2/w_1. + 675000000.w_2 + 3/w_2. - Y\left[32000.w_1. + 135000.w_2. + X - 7\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial CT}{\partial w_1} = -2/w_1 + 32000000 - 32000.Y = 0 \\ \dfrac{\partial CT}{\partial w_2} = -3/w_1 + 675000000 - 135000.Y = 0 \\ \dfrac{\partial CT}{\partial Y} = 32000.w_1 + 135000.w_2 + X - 7 = 0 \\ Y \leq 0 \\ X \geq 0 \\ X \cdot Y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{2}{32000000 - 32000.Y}}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{3}{675000000 - 135000.Y}}$$

$$32000.w_1 + 135000.w_2 + X - 7 = 0$$

$$Y \leq 0$$

$$X \geq 0$$

$$X \cdot Y = 0$$

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones EJEMPLO II

$$w_1 = \sqrt{\frac{2}{32000000 - 32000.Y}}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{3}{675000000 - 135000.Y}}$$

$$32000.w_1 + 135000.w_2 + X - 7 = 0$$

$$Y \leq 0$$

$$X \geq 0$$

$$X \cdot Y = 0$$

X=0

Y	Q_1=1/w_1	Q_2=1/w_2	32000/Q_1+ 135000/Q_2
-10000	13267	25981	7,61
-12000	14422	27658	7,10
-12444	14667	28018	7
-14000	15492	29240	6,68

$$CT = 9380000 + \frac{32000000}{14667} + 2.14667. + \frac{675000000}{28018} + 3.28018 = \$9539297$$

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones

EJEMPLO III

- **2 Productos**
- **Modelo Básico en ambos productos**
- **Sujetos a dos restricciones lineales**

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones EJEMPLO III

- En una situación con dos restricciones el planteo es análogo.
- Se emplearán dos valores marginales: Y_1 e Y_2 , uno para cada restricción
- Se analizarán los siguientes 4 casos:

Y1=0

Y2=0

Ambas restricciones NO saturadas

X1=0

Y2=0

Restricción 1 saturada.
Restricción 2 NO saturada

X1=0

X2=0

Ambas restricciones saturadas

Y1=0

X2=0

Restricción 1 NO saturada.
Restricción 2 saturada

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones

EJEMPLO IV

- **Varios Productos**
- **Modelo Básico en todos productos**
- **Sujetos a dos restricciones lineales de igualdad**
  - **TI capital inmovilizado promedio**
  - **TO cantidad de ordenes a emitir**

Se analizarán dos casos:

i) Se impone un valor determinado para el capital promedio inmovilizado (TI) y se minimiza la cantidad de ordenes a emitir.

ii) Se fija la cantidad de ordenes a emitir (TO) y se trata de minimizar el capital inmovilizado promedio.

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones EJEMPLO IV

Minimizar

$$TO = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_{ij}}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{m} \tfrac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q_{ij} = TI$$

Aplicando Lagrange

$$Y = \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}\right]^2}{2 \cdot TI^2}$$

$$Q_{ij} = \sqrt{\frac{-2 \cdot D_j}{Y \cdot b_j}}$$

$$TO^* \cdot TI = \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}\right]^2}{2}$$

Minimizar

$$TI = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_{ij}} = TO$$

Aplicando Lagrange

$$Y = -\frac{\left(\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}\right)^2}{2 \cdot TO^2}$$

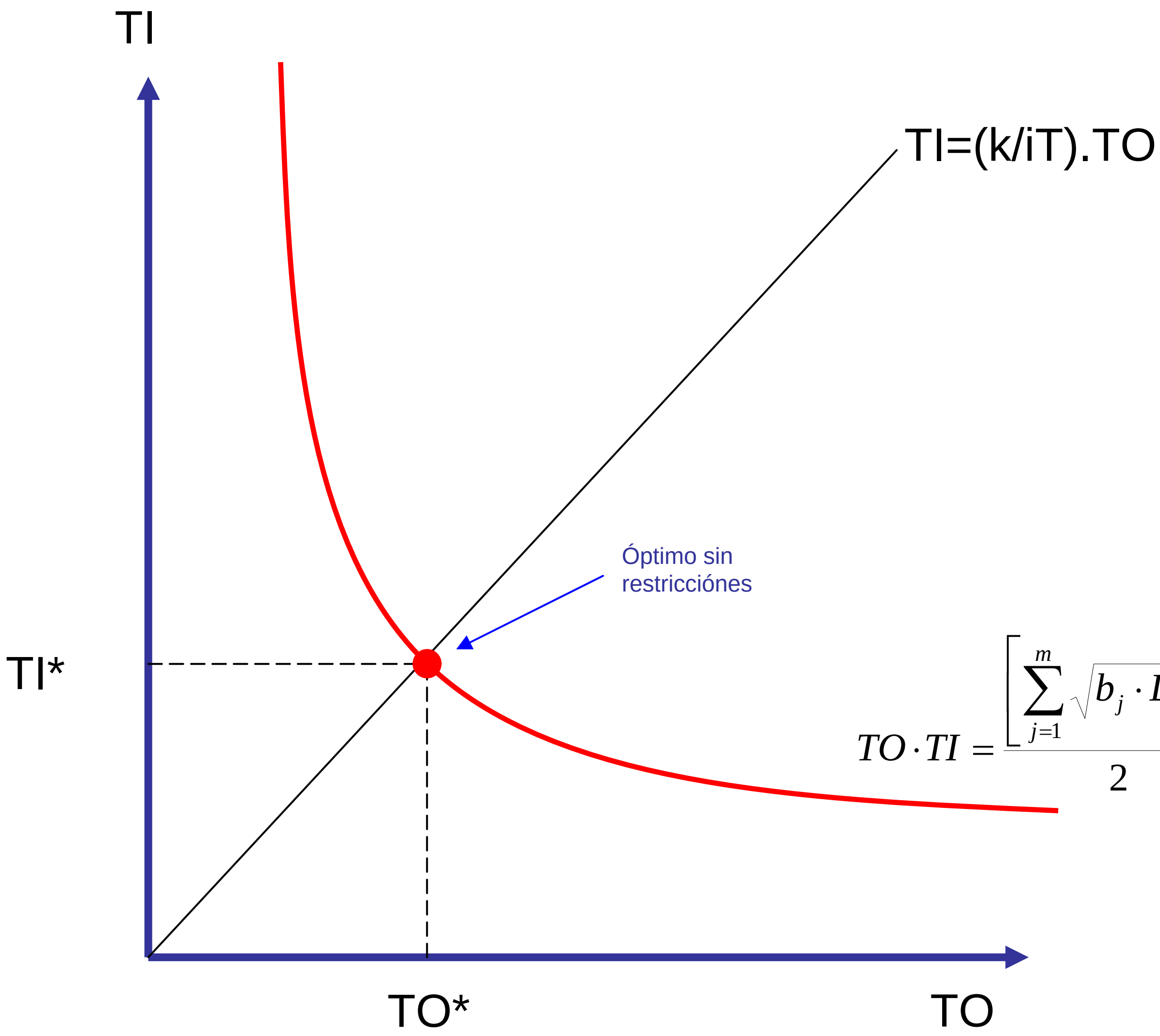
$$Q_{ij} = \sqrt{-\frac{2 \cdot Y \cdot D_j}{b_j}}$$

$$TI^* \cdot TO = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}\right)^2}{2}$$

$$TO \cdot TI = \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}\right]^2}{2}$$

$$TI^* = \frac{k}{i \cdot T} \cdot TO^*$$

Formulación de modelos Multi-Productos con restricciones
EJEMPLO IV

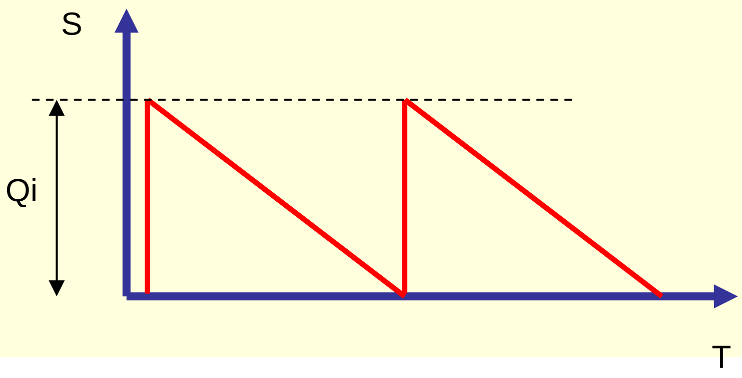


$$TO \cdot TI = \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j} \right]^2}{2}$$

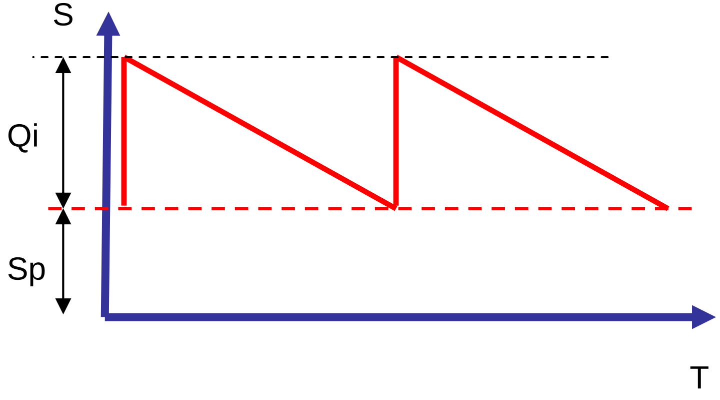
Recomendaciones Finales

Las restricciones no se plantean de igual forma en todos los modelos

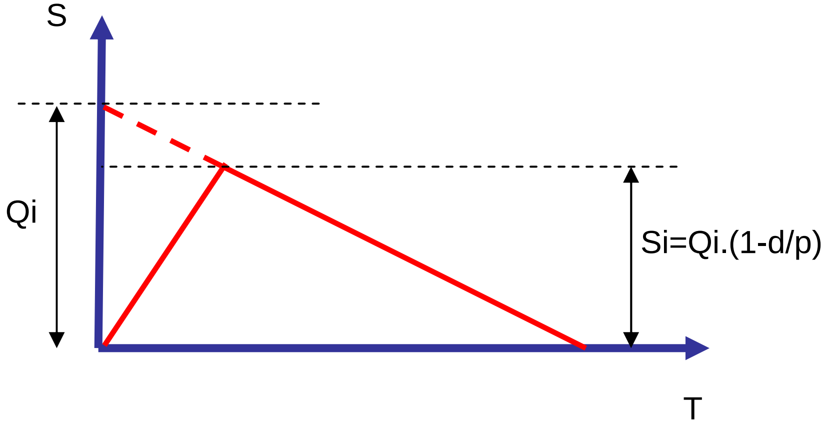
Modelo básico



Stock de protección



Reposición no instantánea



Con agotamiento