INVESTIGACIÓN OPERATIVA
(INGENIERÍA INDUSTRIAL)

TRABAJO PRÁCTICO:

MODELOS DE STOCK

FERNANDO SALVADOR

MODELOS DE STOCK

0 - INTRODUCCIÓN

0.1 - PRESENTACIÓN:

El presente borrador tiene por finalidad servir de guía al alumno en el Trabajo Práctico Nro. 3. Contiene el desarrollo de las tres clases de explicación de TP y pretende agilizar el desarrollo de las mismas, al evitar copiar del pizarrón deducciones de fórmulas, gráficos etc.
Se indica la bibliografía a la que el alumno debe recurrir para aclarar sus dudas y aquella que le pueda servir para profundizar los temas de su interés. Se explican los objetivos del aprendizaje del tema, tanto en lo que se refiere a los conocimientos específicos que el alumno debe poseer sobre cada modelo estudiado, como a las habilidades que debe desarrollar a través de la resolución de problemas.

0.2. - ALCANCE DEL TEMA:

El tema a desarrollar no comprende la totalidad de los problemas relacionados con el Planeamiento y Control de stocks, sino que está limitado a la exposición de algunos modelos matemáticos sencillos de demanda determinística y a dotar al alumno de una metodología para el planteo y desarrollo de otros modelos.
Se puede considerar como una aplicación de lo estudiado en las clases teóricas sobre programación matemática, en particular sobre Programación no Lineal.
Otros aspectos del tema de stocks se desarrollan en Organización Industrial II, como parte de Planeamiento y Control de la Producción.

0.3 - BIBLIOGRAFÍA:

Básica: el contenido del programa de la materia para esta unidad se puede cubrir totalmente con apuntes de la cátedra. Las dos primeras clases y parte de la tercera se encuentran en: Investigación Operativa Tomo II Ing. Isidoro Marín CEI 51.52.02. o Investigación Operativa Ing. Isidoro Marín CEI 31.06.05. Un tema particular de la tercera clase, no expuesto en los anteriores se halla en: Investigación Operativa, Unidad Nro. 5 Ing. Víctor M. Rodríguez CEI 31.06.06.

Complementaria: Buenas exposiciones del tema, desde el punto de vista de la IO, con otros modelos que no se estudian en el curso y aplicaciones de otras técnicas a problemas de stock son: Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones, Tomo I, A.Kaufmman CECSA (Capítulos 4 y 9) y Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones, Volumen II, J. Prawda LIMUSA (Secciones 2.1 y 2.2).
Los aspectos de Organización Industrial pueden verse en: Planeamiento de la Producción y Control de Inventarios, J.F. Magee y O.M. Boodman, El Ateneo (Capítulos 1 a 6).
Un texto que da tanta importancia a los modelos matemáticos como a los problemas de Organización Industrial es: Dirección de Operaciones, problemas y modelos, E.S.Buffa LIMUSA (Capítulos 6,17,18).

0.4 - OBJETIVOS DEL TRABAJO PRÁCTICO:

De conocimiento: que el alumno conozca las hipótesis y desarrollos matemáticos de los modelos expuestos.

De habilidad:

- que identifique los problemas en que se aplican esos modelos, los plantee y resuelva.
- que determine las hipótesis, los factores de costos, el objetivo económico y la técnica matemática adecuada para plantear los problemas que se le presenten.
- que desarrolle y resuelva los modelos correspondientes.
- que grafique funciones de stock, de costo, etc. en los problemas que resuelva.

IMPORTANTE: Los objetivos de conocimiento suelen lograrse estudiando la bibliografía y lo expuesto en clase. Pero los de habilidad sólo pueden alcanzarse planteando y resolviendo problemas. Esta explicación tiene la intención explícita de dar los elementos necesarios para que el alumno encamine su actividad hacia ese fin.

1. MODELO BÁSICO PARA UN PRODUCTO

MODELO DE STOCK:

En los problemas de stock o inventario se trata de determinar las cantidades a adquirir (o a producir) de uno o varios productos, para satisfacer su demanda, que supondremos conocida (determinista). Se plantea el objetivo de cumplir con lo anterior de modo de minimizar el costo, cumpliendo con las restricciones que eventualmente se impongan.

Debe tenerse muy claro que:

De ninguna manera se afirma que los modelos expuestos sean los únicos que describen la realidad ni siquiera que sean los que corresponden a las situaciones más frecuentes: son los modelos más simples y más difundidos en los textos.

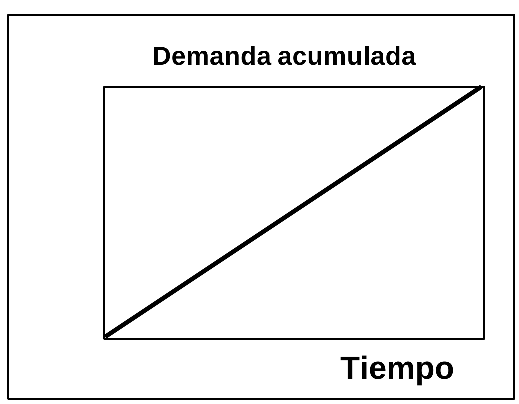
Tampoco se afirma que el objetivo económico buscado en estos modelos sea el que debe adoptar quien deba resolver un problema concreto.

Lo único que se dice es que:

En una situación real que cumpla (al menos aproximadamente), las hipótesis del modelo, si se busca el mismo objetivo que se supone en dicho modelo, la solución del modelo dará los valores que conviene adoptar para lograr el objetivo deseado en ese caso.

1.1. MODELO BÁSICO

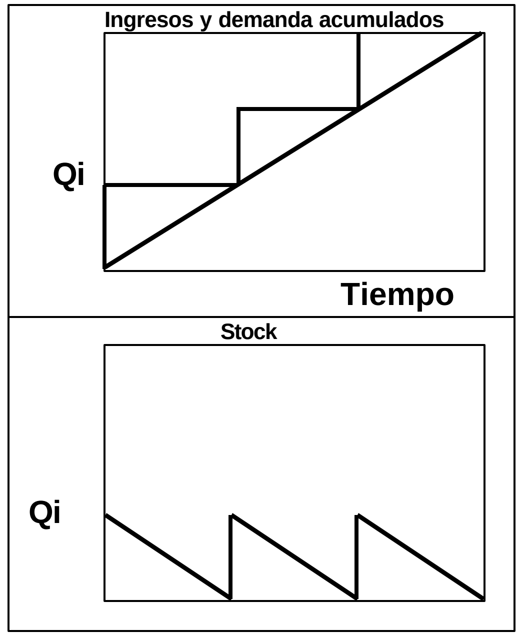
Se exponen a continuación las suposiciones del modelo básico de stock.



Demanda: Supóngase que en un período de tiempo T se demandará cierta cantidad D de unidades de un producto, y que el cociente d=D/T se mantiene constante para todos los valores de T que se consideren. La representación gráfica de la cantidad demandada en función del tiempo será una recta que pasa por el origen con pendiente d.

Cantidad ingresada a depósito: Supóngase que, a intervalos de tiempo definidos e iguales entre

sí Ti, ingresan a depósito cantidades iguales de producto Qi. Si dicho ingreso es instantáneo, la cantidad ingresada acumulada, en función del tiempo tendrá un gráfico en forma de escalera.
Cantidad almacenada: Supóngase que en un instante inicial no hay stock acumulado ni demanda insatisfecha e ingresan Qi unidades, suficientes para satisfacer la demanda Di en el período Ti, al cabo del cual ingresa otra cantidad Qi, etc. Siempre resultará la cantidad ingresada acumulada mayor o igual que la demanda acumulada. La diferencia entre ambas será, para cada instante, la cantidad almacenada. Por definición de d=D/T=Di/Ti y de Qi=Di resulta Qi=d.Ti=(D/T).Ti El número de reaprovisionamientos que se producen en el período T será n=D/Di=T/Ti.



Costo de almacenamiento: supóngase que existe un costo c_1 asociado al mantenimiento de cada unidad en stock por unidad de tiempo, por ejemplo el costo de oportunidad del dinero inmovilizado, o de espacio ocupado, se tendrá un costo de almacenamiento dado por:

$\int c_1.S(t).dt$ donde: c_1 = $/u.t S(t): cantidad de unidades en stock en el instante t.

En este caso, para cada período Ti, S(t) decrece linealmente de Qi a 0 y el área equivale a la de un rectángulo de base Ti y de altura Qi/2, por lo que resulta:

Costo de almacenamiento (i) = c_1.Qi/2.Ti = (1/2).c_1.Qi.Ti

Costo de reposición: supóngase que cada reaprovisionamiento implica un costo k, por ejemplo: de emisión de la orden de compra, flete, movimiento de materiales en el depósito, inicio de un ciclo de producción (si en vez de adquirirse las Qi unidades de producto se las fabrica), etc. y que dicho costo no depende de la cantidad adquirida.

Costo de reposición (y) = k k=$

Costo de compra: cada unidad adquirida tiene un costo b que no depende de la cantidad adquirida. La compra de las Qi unidades del período será:

Costo de compra = b.Qi b=$/u

Costo total: supóngase que los únicos costos involucrados en la administración del stock son los tres anteriores. Supóngase también que los valores de c_1, k y b no varían en el período T considerado. Resultará que el costo total, en un período, es la suma de los de almacenamiento, reposición y compra:

$CTi=(1/2).c_1.Qi.Ti + k + b.Qi$ CTi:Costo Total del período Ti

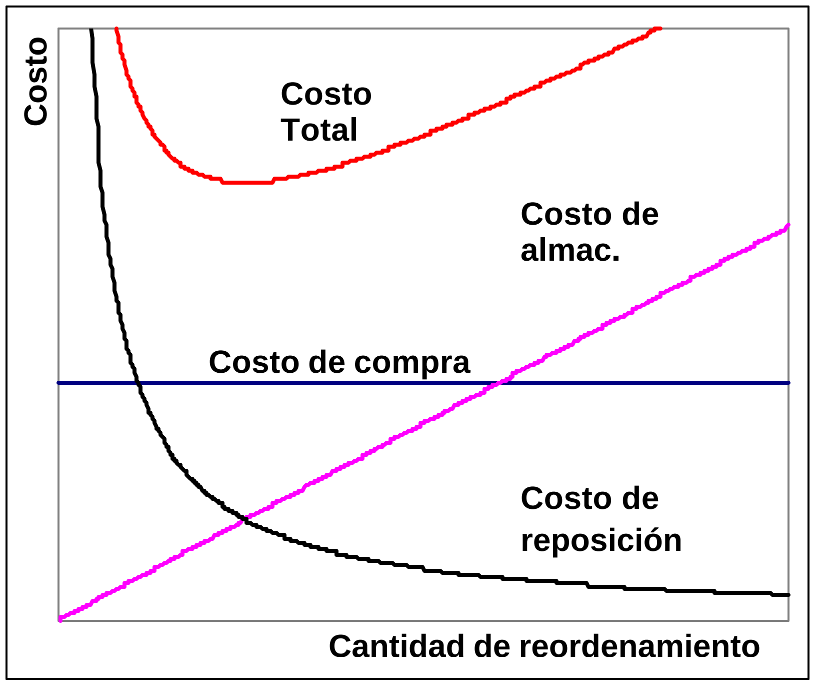
En el período total T, que contiene n ciclos de reaprovisionamiento se tendrá en Costo Total:

$CT=((1/2).c_1.Qi.Ti + k + b.Qi).n$ CT: Costo Total del período T

y como n= T/Ti = D/Di = D/Qi se podrá expresar el Costo Total en función de una única variable Qi.

$$\boxed{CT=(1/2).c_1.Qi.T + k.D/Qi + b.D}$$

La función CT consta de tres términos uno es directamente proporcional a Qi (Costo Total de almacenamiento), otro es inversamente proporcional a Qi (Costo Total de reposición), el último es constante (Costo Total de compra). Se han representado los tres costos en función de Qi y el Costo Total.



Objetivo: supóngase que se quiere determinar el valor de la variable Qi que hace mínimo el Costo Total en el período T (en el gráfico se ha indicado dicho valor con Q*. Supóngase que no se han establecido restricciones a los valores de las variables (como podría ser por capacidades de depósito que limitaría Qi o de la oficina de compras que pondría límite a n, o de disponibilidad de fondos, que restringiría b.Qi, etc.). Obviamente se exige que Qi sea no negativo.

<u>Resumen de las hipótesis del modelo:</u>

1. Demanda constante y conocida (D/T = d = cte.)
2. Reposición instantánea de cantidades iguales Qi, en períodos iguales Ti, que cubren exactamente la demanda Di en cada período.
3. Costo unitario de almacenamiento por unidad de tiempo c_1, constante.
4. Costo de reposición k, constante.
5. Costo unitario de producto b, constante.
6. No existen otros costos.
7. No existen restricciones (salvo $Qi\geq 0$)
8. Al comienzo de cada período no hay stock, ni se tienen pedidos insatisfechos.

Objetivo: hallar el valor de Qi que hace mínimo el Costo Total en el período T.

CT=(1/2).c_1.Qi.T + k.D/Qi + b.D ⟶ MIN

Solución analítica:

Como D,T,c_1,k y b son datos, CT se ha expresado en función de una única variable Qi. Buscar el valor de Qi que minimiza CT es el caso más simple de optimización matemática: optimizar una función de una sola variable, sin restricciones. La condición necesaria de óptimo es que la derivada primera sea nula:

dCT(Qi)/dQi=0 o sea:

$(1/2).c_1.T - k.D/Qi^2 = 0$ de donde:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T}}$$

Determinado Q* puede determinarse T* en función de los datos: como n = D/Qi = T/Ti, entonces:
Ti = Qi.T/D

$$T^* = \sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T}} \cdot \frac{T}{D} \quad \text{y entonces:} \quad T^* = \sqrt{\frac{2.k.T}{c_1.D}}$$

También puede expresarse CT* en función de los datos:

$$CT^* = \frac{1}{2}.c_1.\sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T}}.T + k.D.\frac{1}{\sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T}}} + D.b$$

$$CT^* = \frac{1}{2}.\sqrt{2.k.D.c_1.T} + \frac{1}{2}.\sqrt{2.k.D.c_1.T} + D.b$$

$$CT^* = \sqrt{2.k.D.c_1.T} + D.b$$

Se ha omitido demostrar que la solución obtenida es de mínimo. Tampoco se tuvo en cuenta la condición Qi$\geq$ 0. La primera omisión puede salvarse planteando la derivada segunda, para comprobar que es positiva, o analizar el valor de la función para valores de Qi próximos a Q*, o del gráfico etc.
La segunda, que también debe considerarse al analizar la anterior, nunca presenta inconvenientes: k, D, c_1, y T son positivos, el radicando resultará positivo. Habrá dos raíces cuadradas y se tomará la positiva.

1.2. CASO PARTICULAR DE c_1

Si el costo de almacenamiento c_1 es exclusivamente el costo de oportunidad del capital inmovilizado, se podrá expresar como producto de una tasa de interés i por el costo de la unidad de producto b. Si la tasa de interés permanece constante en todo el período T considerado, también será constante $c_1 = b.i$
El modelo básico se modificará, en este caso, del siguiente modo:
La hipótesis 3 será: costo unitario de almacenamiento por unidad de tiempo (c_1=b.i), constante. El Costo Total se expresará:

CT= (1/2).b.i.Qi.T + k.D/Qi + b.D

y la solución óptima será:

$Q_i^* = \sqrt{\dfrac{2.k.D}{b.i.T}}$ $\qquad$ $T_i^* = \sqrt{\dfrac{2.k.T}{b.i.D}}$ $\qquad$ CT*= $\sqrt{2.k.D.b.i.T} + D.b$

1.3. SENSIBILIDAD A LA SOLUCIÓN

Se desarrollan analíticamente dos enfoques del tema: la variación que causa en el costo tomar un valor $a.Qi$ que difiera del Q*, y la que ocasiona adoptar valores diferentes de los verdaderos c_1 y k.

1.3.1. Variación en el costo por adoptar una cantidad de reordenamiento $Qi \neq Q^*$

Supóngase que se decide adoptar una cantidad de reordenamiento $Q_i^{'} = e.Q_i^*$
El costo total resultará:

$$CT = b.D + \tfrac{1}{2}.c_1.T.e.Q_i^* + k.\frac{D}{e.Q_i}$$

y como

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T}}$$

resulta:

$$CT = b.D + \sqrt{2.k.D.c_1.T}.\left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2.e}\right)$$

1.3.2. Variación en el costo por adoptar valores de k y c1 diferentes a los reales

Sean k y c_1 los valores verdaderos de los costos de reordenamiento y almacenamiento.
Sean $k' = a.k$ y $c'_1 = b.c_1$

Se calculara un valor $Q_i = \sqrt{\dfrac{2.k'.D}{c'_1.T}}$ que puede vincularse con Q* (valor que se hubiese obtenido con k y c_1 verdaderos)

$$Q_i = \sqrt{\frac{2.\boldsymbol{a}.k.D}{\boldsymbol{b}.c_1.T}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}.\sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}.Q^*$$

comparando con el caso anterior se observa que $\boldsymbol{e} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$

1.4. EJEMPLO

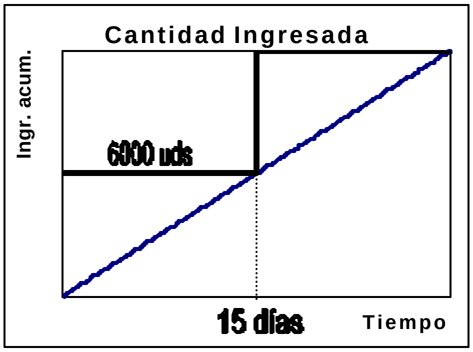
Una empresa debe planificar el stock de un producto. Se sabe que su costo unitario es de $ 30 y su demanda mensual es de 12.000 unidades. El costo anual de mantener una unidad en stock es de $ 3. Además del costo de adquisición, cada pedido tiene un costo fijo de $ 60, independientemente de la cantidad adquirida. Se supone que la demanda es uniforme y que en cada pedido se ordenará una cantidad de unidades que ingresará instantáneamente a stock, para satisfacer la demanda de ese período. No se mantendrá mas stock que el imprescindible para cumplir totalmente con esa demanda. Se pide:

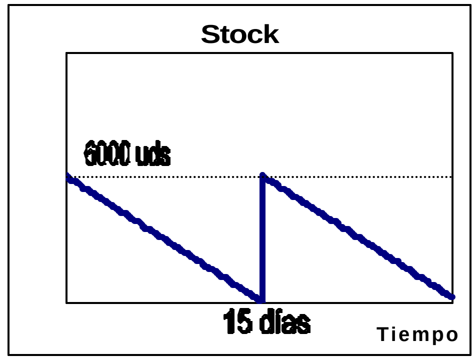
a. Graficar demanda acumulada en función del tiempo
b. Graficar cantidad adquirida acumulada en función del tiempo, suponiendo que en cada período se tendrá un stock inicial de 6.000 unidades.
c. Determinar el tiempo transcurrido entre dos pedidos sucesivos (gráfica y analíticamente).
d. Graficar stock en función del tiempo.
e. Determinar el costo total de cada período y el costo total.
f. Repetir a, b, c, d, y e suponiendo que en cada período se solicitan 12.000 unidades.
g. Graficar los costos de compra, de almacenamiento y de reordenamiento y total en función de la cantidad adquirida.
h. Hallar gráfica y analíticamente la cantidad de ordenamiento que minimiza el costo total.
i. Para la cantidad calculada en h, determinar el período de reordenamiento y el costo total
j. Graficar id a, b y d en función del tiempo, para la cantidad calculada en h.
k. Supóngase que el costo de almacenamiento dado es el costo de oportunidad del capital inmovilizado. ¿Cuál es la tasa de interés que expresa el costo de oportunidad del dinero?
l. Se desea saber en qué proporción se modificará la parte variable del costo total (excluido el costo de compra que es fijo) si, por razones prácticas, se desease tomar un valor de la cantidad a reordenar que no sea la que corresponde al óptimo. Resuélvase para Qi = 2.300 y Qi = 2.500.
m. Supóngase que no se conocían los valores exactos de los costos de almacenamiento y reorden y se los estimó en 4 $/unidad * año y 50 $ respectivamente. Determinar la cantidad de reorden que se hubiese calculado y la proporción en la que la parte variable del costo se hubiese desviado del valor óptimo.

Hipótesis: Las del modelo básico
Datos:
D = 12.000 unidades

T = 1 mes (puede ser D = 144.000 unidades y T = 1 año)
b = 30 \$/unidad
c_1 = 3 \$/unidad*año = 0,25 \$/unidad*mes
k = 60 \$

Solución:
a y b)





c) Del gráfico: Ti = 0,5 mes = 15 días
D/T = Di/Ti = Qi/Ti
Ti = Q / (D/T) = 6000u / (12000 u/mes) = 0,5 mes = 15 días.

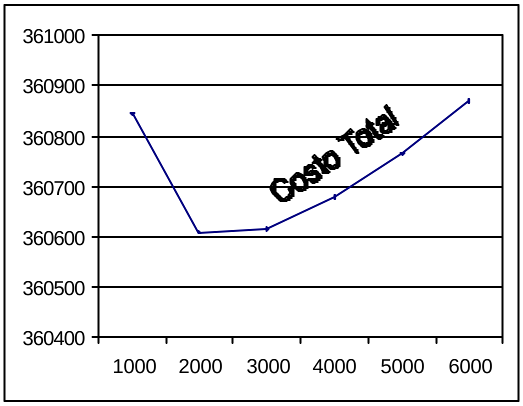
e) **Para un período:**
Costo de compra: b.Qi = 30 \$/u . 6000 u = \$ 180000
Costo de almacenamiento: ½ c_1 Qi Ti = ½ 0,25 \$/(u.mes) . 6000 u . ½ mes = \$ 375
Costo de orden y: k= \$ 60
Costo total: \$ 180435

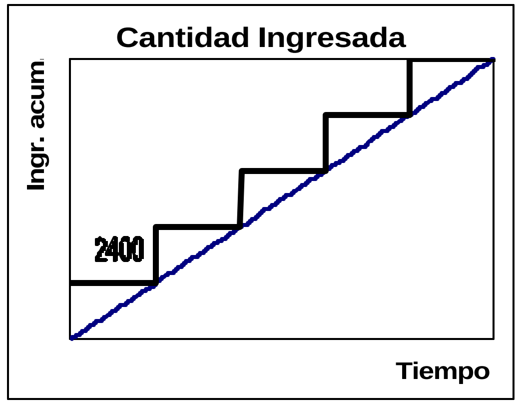
Para un mes:
Costo de compra: b.D = 30 \$/u . 12000 u = \$ 360000
Costo de almacenamiento: ½ c_1 Qi Ti = ½ 0,25 \$/(u.mes) . 6000 u . 1 mes = \$ 750
Costo de orden y: k D / Qi = \$ 60 . 12000u / 6000u = \$120
Costo total: \$ 360870

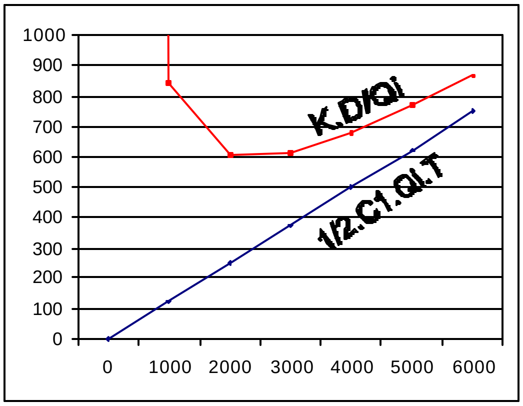
f) Resuélvalo y compruebe que Ti = 3 días, CTi= \$ 36075 y CT= \$ 360750

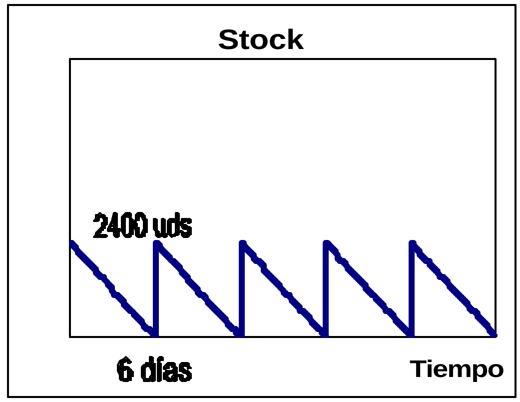
g) Costo de compra: b . D = 30 \$/u . 12000 u = \$ 360000 (no depende de Qi)
Costo de almacenamiento: ½ c_1 Qi Ti = ½ 0,25 \$/(u.mes) . Qi . 1 mes = 0,125 \$/u . Qi
Costo de orden y: k D / Qi = \$ 60 . 12000u / Qi = 720000 \$.u /Qi
Costo total: 360000 \$ + 0,125 \$/u Qi + 720000 \$.u / Qi

Qi	Costo de compra	Costo de almacenamiento	Costo de orden	Costo Total
1000	360000	125	720	**360845**
2000	360000	250	360	**360610**
3000	360000	375	240	**360615**
4000	360000	500	180	**360680**
5000	360000	625	144	**360765**
6000	360000	750	120	**360870**









h)
Del gráfico: Qi = 2400 u
Analíticamente:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T}} = \sqrt{\frac{2.60u.12000u}{0{,}25(\$/u.mes).1mes}} = 2400u$$

i)

$$T_i^* = \sqrt{\frac{2.k.T}{b.i.D}} = \sqrt{\frac{2.60u.1mes}{0{,}25(\$/u.mes).12000u}} = 0{,}2mes = 6dias$$

o también Qi/Ti = D/T ; entonces Ti = Qi / (D/T) = 24000u/12000(u.mes) = 0,2 mes = 6 días

CT*= $\sqrt{2.k.D.c_1.T} + D.b =$ $\sqrt{2.60\$.12000u.0{,}25(\$/u.mes).1mes}$ +30\$/u.12000u = \$ 360600

k)
c_1 = i.b ; entonces i=c_1/b = 3\$/u.año . 30 \$/u = 0,1 \$/\$.año = 10% anual

l)
Q_1' = 2300
Qi* = 2400

$Q_i^{'} = \boldsymbol{e}.Q_i^{*}$; entonces $\boldsymbol{e} = 0{,}95833..$ y remplazando en la ecuación:

$CT = b.D + \sqrt{2.k.D.c_1.T}.\left(\frac{\boldsymbol{e}}{2} + \frac{1}{2.\boldsymbol{e}}\right)$ se puede obtener el costo total operando con lotes de 2300 u.

m)

$$Q_i = \sqrt{\frac{2.k'.D}{c_1'.T}} = \sqrt{\frac{2.50\$.12000u}{4\$/(u.12meses).1mes}} = 1897{,}3u$$

$$\boldsymbol{a} = k'/k = 50/60 = 0{,}833..$$
$$\boldsymbol{b} = c_1'/c_1 = 4/3 = 1{,}33..$$

y siendo $\boldsymbol{e} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$ remplazando en $CT = b.D + \sqrt{2.k.D.c_1.T}.\left(\frac{\boldsymbol{e}}{2} + \frac{1}{2.\boldsymbol{e}}\right)$ se puede obtener el costo total.

2. MODELOS ESPECIALES

Los modelos que se desarrollan en esta parte son variantes del modelo básico. En cada uno de ellos se modifican algunas hipótesis del primero.

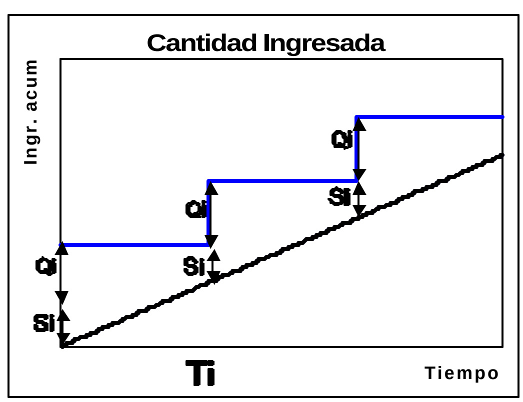
2.1 MODELO BASICO CON STOCK DE PROTECCION

2.1.1. Necesidad del stock de protección

Dado que las hipótesis de un modelo son una idealización o simplificación de posibles situaciones reales, y no una descripción exacta de las mismas, puede ocurrir que en alguna situación concreta se desee tener en cuenta alguna posible discrepancia entre ambas.
Una hipótesis del modelo básico supone demanda constante d=D/T que representa la cantidad demandada por unidad de tiempo. Por eso se adquiere para cada período Ti una cantidad de unidades Qi. Pero el valor asignado a d puede ser una suposición, o el resultado de una estimación estadística. Puede ocurrir que, en un período determinado la demanda no cumpla exactamente la relación d=D/T.
Si la demanda Di en un período Ti resulta inferior a la cantidad adquirida Qi, quedaría un saldo en stock para el período siguiente. Pero si fuere mayor no habría stock inicial, se obtendría una demanda insatisfecha. Existiría una cantidad de unidades requeridas por clientes que no se entregaron de inmediato y se debe esperar la llegada del siguiente lote de reposición para cumplir esos pedidos. Si el valor d supuesto en el modelo es correcto, aunque sea en promedio, se tendrán períodos con saldo de stock y períodos con demanda insatisfecha.
Sin embargo, por diversos motivos, puede decidirse no aceptar esta situación. Por ejemplo, podría perderse la demanda que no sea satisfecha de inmediato, o perderse un contrato por incumplimiento, o sufrirse penalidades contractuales, o simplemente se quiere brindar una imagen de servicio al cliente no haciéndolo esperar nunca.
Para evitar la aparición de demanda insatisfecha, se mantiene un stock adicional, llamado de protección, al que solo se recurre cuando la demanda del período es superior a la cantidad normalmente disponible para satisfacerla. No se discutirán los procedimientos para fijar la cantidad de unidades que deben tenerse en stock de protección, pero se esboza la idea básica: debe conocerse la variabilidad del cociente d en un período y tomarse una decisión sobre el riesgo que se quiere asumir. Puede fijarse una cantidad que cubra el mayor apartamiento posible o que solo alcance, por ejemplo, para las desviaciones que ocurren el 90% de los casos etc. Una vez fijado el valor se Sp, el modelo matemático es totalmente igual al básico, con el agregado de una cantidad fija Sp a las unidades mantenidas en stock (en la realidad puede variar d, pero en el modelo sigue constante).

2.1.2. Modelo con stock de protección

La hipótesis 8 del modelo básico se reemplaza por la siguiente:
8bis :Se mantiene permanentemente almacenada una cantidad Sp de unidades y no hay pedidos insatisfechos.
El costo total resulta:



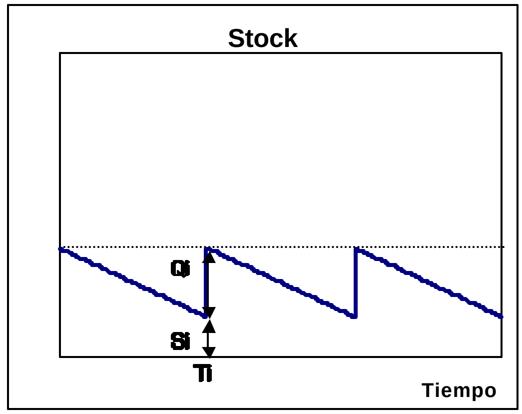
CT=(1/2).c_1.Qi.T + c_1.Sp.T+ k.D/Qi + b.D

El óptimo se encuentra como en el modelo básico
dCT(Qi)/dQi=0 o sea:

(1/2).c_1.T - k.D/Qi^2 = 0 de donde:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T}}$$

Esto era evidente porque el costo de almacenaje del stock de protección es fijo y no depende de Qi. También resulta:



$$T^* = \sqrt{\frac{2.k.T}{c_1.D}}$$

y solo se modifica el costo total CT*

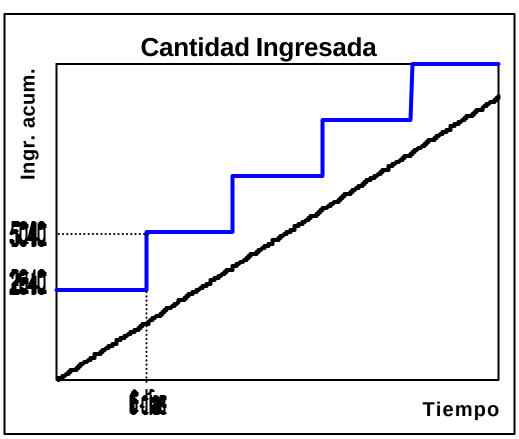
$$CT^* = \sqrt{2.k.D.c_1.T} + D.b + c_1.\ Sp.T$$

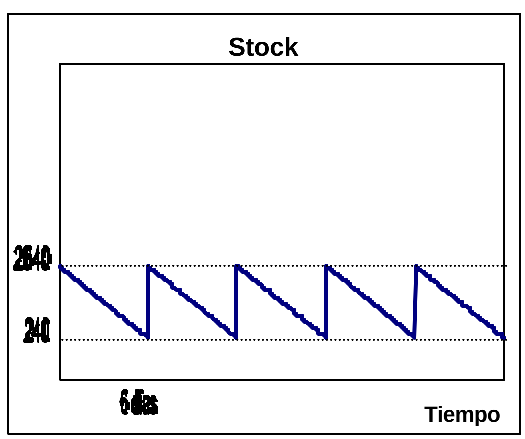
2.1.3. Ejemplo

La empresa del ejemplo del punto 1.4., una vez que determinó la cantidad a reordenar para minimizar el costo total (punto h), decide considerar las posibles fluctuaciones de la demanda y adopta el criterio de mantener un stock de protección equivalente al 10% de la demanda en el período de reordenamiento Ti. Se pide:
a) Determinar la magnitud del stock de protección
b) Calcular el costo de mantener almacenado dicho stock.
c) Calcular el costo total óptimo resultante.
d) Graficar la demanda acumulada, cantidad adquirida acumulada y stock almacenado en función del tiempo.
e) Determinar la cantidad almacenada al comienzo y al fin de cada período y la cantidad promedio almacenada.
Hipótesis: las del modelo con stock de protección.
Datos: los del ejemplo 1.4. y Sp = 0,1Di = 0,1Qi

Solución:

a) Sp = 0,1 Qi*. de 1.4. h: Qi*= 2400u ⟶ Sp= 0,1 . 2400u = 240u
b) Costo almacenamiento Sp = c_1.Sp.T = 0,25 \$/u.mes. 240u . 1 mes = 60\$/mes.
c) Es CT de 1.4. más el costo de almacenamiento de Sp.
d)





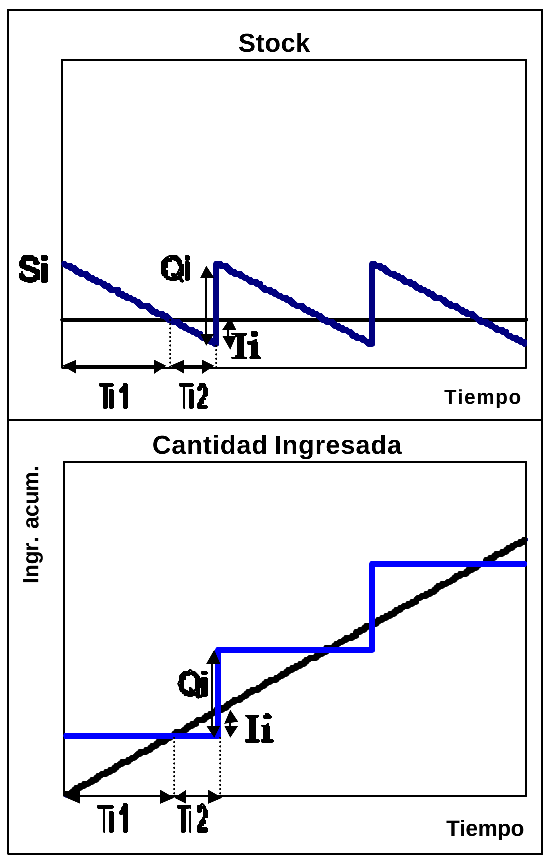
e) Al comenzar cada período se tienen Sp+Qi* = 240+2400=2640u. Al finalizar cada período se tienen 240u. como la cantidad almacenada en stock decrece linealmente, el área del trapecio rectángulo de altura Ti y bases Sp+Qi* y Sp equivale a la de un rectángulo de base Ti y altura igual a la semisuma de las bases del trapecio. La cantidad promedio almacenada es: (2640+240)/2= 1440u.

Observación: Debe tenerse en cuenta que, en general, en los modelos estudiados se da como dato un período T y su correspondiente demanda D, pero en las fórmulas aparece el cociente D/T. aunque no siempre se explícita, se trabaja como si el sistema de stock se mantuviera indefinidamente. Po eso, por ejemplo, no se considera un inconveniente tener una cantidad no entera de ordenes n en el período T. Salvo este detalle, no hay inconveniente para suponer que en el modelo básico se trabaja un lapso determinado y, finalizado cierto período Ti, no se repone el stock y se da por terminada la operación. Pero en el modelo con stock de protección hay que tener en cuenta que, si se trabaja un lapso finito hay un costo inicial de adquisición del stock de protección y debe decidirse que se hará con el mismo al terminar el período de operación: si se lo vende a terceros y a qué precio, si será usado para satisfacer parte de la demanda del último período etc.-

2.2 MODELO CON COSTO FINITO DE AGOTAMIENTO

2.2.1. Posibilidad de agotamiento

En el modelo básico se supone la adquisición de una cantidad Qi igual a la demanda Di en el período Ti. Se supone también que no hay stock inicial ni demanda insatisfecha al comenzar el período. De esta manera apenas vendida la última unidad demandada en un período, se inicia el período siguiente con la llegada de una nueva cantidad Qi.. Nunca se tiene demanda insatisfecha. La modificación que se expone en este caso supone la aceptación de demanda insatisfecha en un lapso del período. Cada ciclo se inicia con una cierta cantidad de demanda insatisfecha. Al arribar Qi unidades parte de estas cubre la demanda insatisfecha acumulada hasta ese instante y parte queda en stock (Si). Obviamente si la cantidad Qi es igual a la demanda Di en el período Ti, como una parte cubrirá la demanda acumulada del período anterior, el saldo en stock solo cubrirá la demanda en la parte Ti_1 del período Ti. En el lapso restante Ti_2 no se satisfará de inmediato la



demanda e irá acumulándose demanda insatisfecha hasta que, al cabo de Ti, se habrá acumulado una demanda insatisfecha igual a la que se tenía al comenzar el período Ti. Se supone que la existencia de esa demanda insatisfecha tendrá un costo c2 por cada unidad no entregada de inmediato y por día de demora en hacerlo (sería el caso de una multa por demora en la entrega).

2.2.2. Modelo con costo de agotamiento

En las hipótesis del modelo básico debe eliminarse la 8va. y remplazarse por:
8bis: Al comenzar cada período existe una demanda insatisfecha que se cumplirá con parte de las Qi unidades adquiridas.
9: Existe un "costo de agotamiento" c_2 por cada unidad demandada no entregada de inmediato y por cada día de demora.
El desarrollo del modelo sufrirá algunas modificaciones:
Qi=Si+Ii (Las unidades arribadas cubren la demanda insatisfecha acumulada y el resto queda en stock)
Ti=Ti1+Ti2 (El período se subdivide en un período de satisfacción de demanda Ti_1 y de demanda insatisfecha Ti_2).
Del gráfico surgen las siguientes proporciones:

$$\frac{Si}{Ti_1} = \frac{Ii}{Ti_2} = \frac{Qi}{Ti}\ \frac{Di}{Ti}$$

Los costos en cada período Ti serán:
Costo de almacenamiento: $½c_1.Si.Ti_1$
Costo de agotamiento: $½c_2.Ii.Ti_2$
Costo de reposición: k
Costo de compra: Qi.b
Costo total(i): $½c_1.Si.Ti_1 + ½c_2.Ii.Ti_2 + k + Qi.b$
Esta expresión puede, con las relaciones antes determinadas, ponerse en función de tres variables: Qi, Si, Ti

$\frac{Si}{Ti_1} = \frac{Qi}{Ti} \rightarrow Ti_1 = Ti\frac{Si}{Qi}$; de Qi=Si+Ii Ii=Qi-Si;

de $\frac{Ii}{Ti_2} = \frac{Qi}{Ti} \rightarrow Ti_2 = Ii\frac{Ti}{Qi} = (Qi - Si)\frac{Ti}{Si}$

El costo total en cada período Ti resulta:

$CTi = ½c_1.Si^2.(Ti/Qi) + ½c_2.(Qi-Si)^2.(Ti/Qi) + k + Qi.b$

y como n=D/Di=D/Qi=T/Ti n.Ti=T y n.Qi=n.Di=D , el costo total en el período T será:

$CT = ½c_1.Si^2.(Ti/Qi).n + ½c_2.(Qi-Si)^2.(Ti/Qi).n + k.n + Qi.b.n$

$CT = ½c_1.Si^2.(T/Qi). + ½c_2.(Qi-Si)^2.(T/Qi). + k.(D/Qi) + D.b$

El objetivo es minimizar el costo total. Tal como se expresó, el costo total (CT) es función de las variables Qi y Si. Deben hallarse los valores Qi* y Si* que hacen mínimo a CT. Es un caso de programación matemática sin restricciones (salvo que Qi y Si deben ser mayores que cero), cuya única novedad respecto del caso base es que se debe optimizar en función de dos variables. La condición necesaria de óptimo es la anulación de las derivadas parciales con respecto a ambas variables.

$$\frac{\partial CT(Qi,Si)}{\partial Qi} = -\frac{c_1.Si^2.T}{2.Qi^2} + \frac{c_2.T}{2} - \frac{c_2.Si^2.T}{2.Qi^2} - \frac{k.D}{Qi^2} = 0$$

$$\frac{\partial CT(Qi,Si)}{\partial Si} = -\frac{c_1.Si.T}{Qi} - \frac{c_2.(Qi-Si).T}{Qi} = 0$$

La segunda permite establecer una relación entre Qi y Si: $\frac{Si}{Qi} = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$

Como esta relación aparece dos veces en la primera ecuación, se la puede remplazar en ella y quedará como única incógnita Qi. Despejando Qi obtenemos:

$$Qi^* = \sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T.\left(\frac{c_2}{c_1+c_2}\right)}}$$

Que también puede escribirse como:

$$Qi^* = \sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T.}}.\sqrt{\frac{c_1+c_2}{c_2}}$$

Obsérvese que la segunda raíz tiende a 1 cuando c_2 tiende a infinito, esto nos devuelve al modelo básico donde no se admitía el agotamiento.

2.2.3. Ejemplo

La empresa del ejemplo 1.4 decide considerar una modificación en los supuestos originales: las cantidades ordenadas ingresarán a stock cuando se haya acumulado una cierta cantidad de pedidos insatisfechos. Se deberá pagar 1 $ por año de demora por cada unidad no entregada al instante de solicitarla. Se pide:

a) Graficar la demanda, cantidad adquirida, cantidad en stock (o insatisfecha), suponiendo que con cada pedido ingresan 6000 unidades, pero ingresan a stock cuando se han acumulado pedidos por 2000 unidades.

b) Determinar el costo total para cada período y para el total.

c) Repetir a) y b) suponiendo que en cada período se solicitan 6000 unidades pero ingresan a stock cuando se han acumulado pedidos por 4000 unidades.

d) Hallar la cantidad de reordenamiento y la cantidad de demanda insatisfecha en cada período que minimizan el costo total.

e) Determinar el período de reorden, el subperíodo en el que se abastece de inmediato la demanda, el subperíodo en el que hay agotamiento y el costo total correspondiente a la solución óptima.

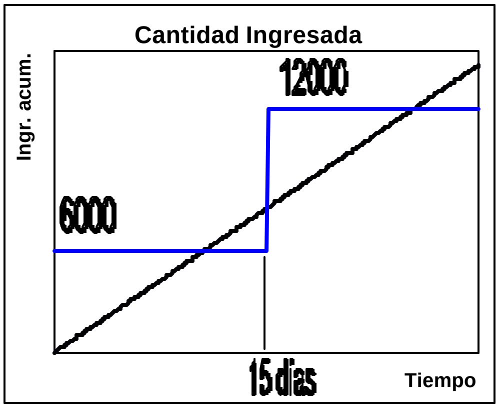
f) ídem a) para la solución óptima.

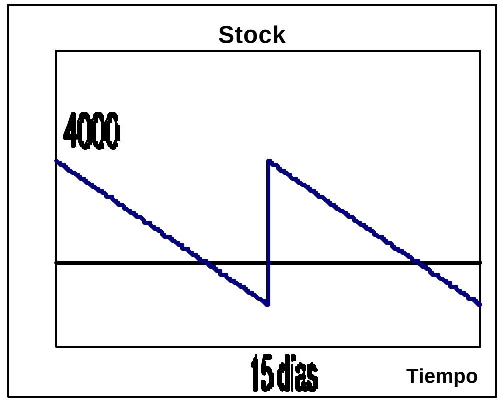
Hipótesis: Las del modelo con costo de agotamiento.

Datos: los del ejemplo 1.4. y c_2=1$/(u.año)

Solución:

a)





b) Para un período:
n=Di/Qi=12000/6000=2
Si=Qi-Si=6000u-2000u=4000u
Ti_1=Ti.Si/Qi=15días.4000/6000=10 días
Ti_2=Ti-Ti_1=15d-10d=5d
Costo de compra: b.Qi= 30$/u.6000 u = $180000
Costo de almacenamiento: (1/2).c_1.Si.Ti_1=(1/2).0,25$/(u.mes).4000u.10/30 mes= $166,66
Costo agotamiento: (1/2).c2.Ii.Ti2=(1/2).1$/(u.mes).2000u.5/30 mes= $13,88
Costo de reorden: k= $60
Costo total (y)= $180240,54

Para un mes:
Costo de compra: b.D=30$/u.12000u = $360000
Costo de almacenamiento: (1/2).c_1.Si.Ti_1.n = $166,66.2= $ 333,33
Costo de agotamiento: (1/2).c_2.Ii.Ti_2.n = $13,88.2= $27,77
Costo de reorden: k.n = $60.2 = $120
Costo total = $360481,1

c) Resuélvalo el alumno y compruebe que:
Si=2000u; Ti_1=5 días; Ti_2=10 días; Cti = $180157,22; CT= $360314,44

d)
$$Qi = \sqrt{\frac{2.k.D}{c_1.T.\left(\frac{c_2}{c_1+c_2}\right)}} = \sqrt{\frac{2.60\$.12000\ u}{0.25\$/u.mes\ .1mes\ .\left(\frac{1\$/u.año}{3\$/u.año + 1\$/u.año}\right)}} = 4800\ u$$

$$Si = \sqrt{\frac{2.k.D\left(\frac{c_2}{c_1+c_2}\right)}{c_1.T}} = \sqrt{\frac{2.60\$.12000\ u.\left(\frac{1\$/u.año}{3\$/u.año + 1\$/u.año}\right)}{0.25\$/u.mes\ .1mes}} = 1200\ u$$

o según:

$$Si = Qi \frac{c_2}{c_1 + c_2} = 4800 \cdot \frac{1}{1+3} = 1200\,u \backslash$$

e)

$$Ti = \sqrt{\frac{2.k.T}{c_1.D.\left(\frac{c_2}{c_1 + c_2}\right)}} = \sqrt{\frac{2.60\,\$.1mes}{0.25\,\$\,/\,u.mes\,.12000\;u.\left(\frac{1\$\,/\,u.año}{3\$\,/\,u.año\;+\;1\$\,/\,u.año}\right)}} = 0.4\,mes = 12\,dias$$

o según:

$$n = \frac{D}{Qi} = \frac{T}{Ti} = \frac{12000}{4800} = 2.5$$

$$Ti = \frac{T}{2.5} = 12\,dias$$

de $\frac{Ti_1}{Si} = \frac{Ti}{Qi} \Rightarrow Ti_1 = \frac{Si.Ti}{Qi} = \frac{12000\;u.12\,dias}{4800\;u} = 3\,dias$

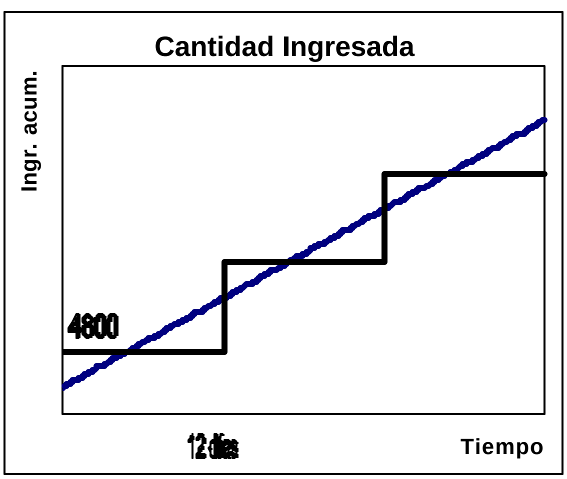
$$Ti_2 = Ti - Ti_1 \Rightarrow Ti_1 = 12\,dias - 3\,dias = 9\,dias$$

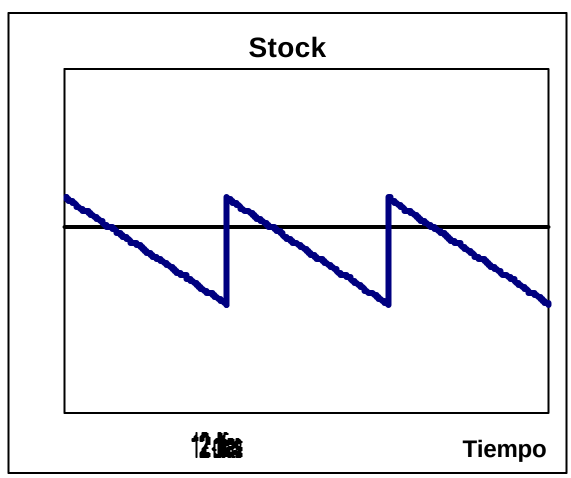
finalmente:

$$CT = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Si \cdot Ti_1 \cdot n + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot Si \cdot Ti_2 \cdot n + \frac{K \cdot D}{Qi}$$

$$30\,\frac{\$}{u} \cdot 12000\;u + \frac{1}{2} \cdot 0.25\,\frac{\$}{u.mes} \cdot 1200\;u \cdot \frac{3}{30}\,mes \cdot 2.5 + \frac{1}{2} \cdot 1\,\frac{\$}{u.mes} \cdot 2600\;u \cdot \frac{9}{30}\,mes \cdot 2.5 + \frac{60\,\$ \cdot 12000\;u}{4800\;u}$$

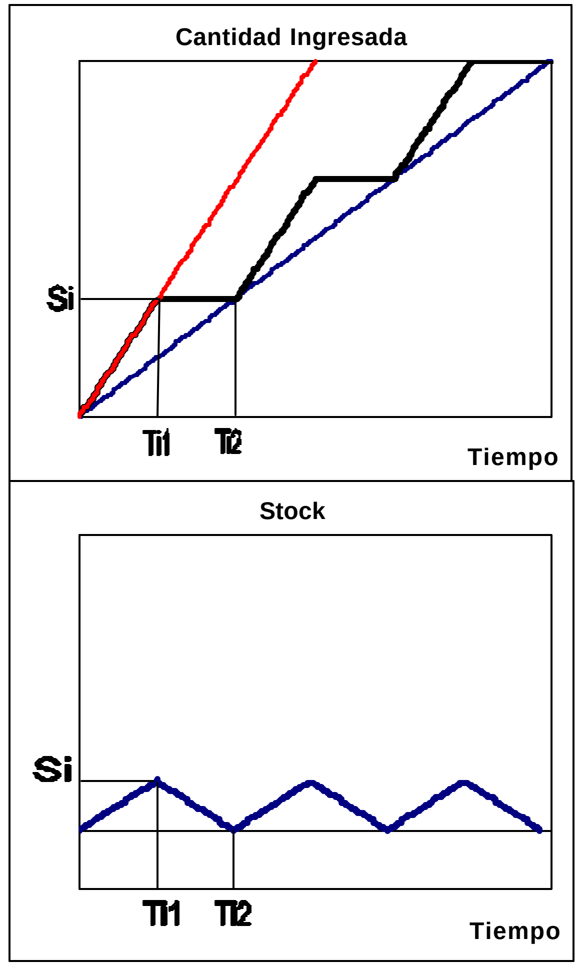
$$CT = 360{,}237.50\,\$$$





2.3 MODELO CON REPOSICION NO INSTANTANEA

2.3.1. Reposición no instantánea



El modelo básico supone el ingreso instantáneo de las Qi unidades a stock, al comenzar cada ciclo. Esta hipótesis se adapta a los casos en que un proveedor entrega a la empresa un lote de mercaderías que se almacena de inmediato.

Sin embargo, existen casos en que el proveedor entrega gradualmente la mercadería, o que es la misma empresa la que la fabrica y la producción de las Qi unidades requiere un tiempo Ti_1, que no es despreciable comparado con Ti. En estos casos. la cantidad almacenada resulta inferior a la que se tendría con reposición instantánea, porque hay unidades demandadas durante el periodo Ti_1, antes de completar la partida de Qi unidades entregadas.

Esta situación es la que se considera en el modelo con reposición no instantánea.

Si se llama P a la cantidad de unidades que se podrían producir si se trabajase ininterrumpidamente durante todo el lapso T y $p = \frac{P}{T}$ al cociente entre ambas, y este cociente es constante para diversos valores de T que se consideren, se dirá que existe una "velocidad de producción" constante.

La velocidad de producción deberá ser mayor que la demanda (d), para producir la cantidad Qi (igual a la demanda del periodo Di) en un tiempo Ti_1 menor que Ti.

Durante el periodo Ti1 se irán produciendo unidades, de las que se consumirán algunas y se almacenara el sobrante. Se tendrá una cantidad en stock creciente, que alcanzara su máximo (Si) al cabo de Ti_1. En el resto del periodo Ti se consumirán las unidades almacenadas, para iniciar una nueva tanda de producción (o entrega gradual) cuando se agote el stock (al finalizar Ti)

2.3.2. Modelo con reposición no instantánea

La hipótesis 2 del modelo básico se reemplaza por:

2' Reposición de cantidades iguales (Qi) en periodos iguales (Ti), que cubren exactamente la demanda Di en ese periodo. La reposición se hace a velocidad constante $p = \frac{P}{T}$ mayor que $d = \frac{D}{T}$

La única variante en el desarrollo, con respecto al modelo básico será la modificación de la cantidad promedio almacenada. Para determinarla se debe conocer la cantidad máxima en stock (Si).

Al cabo del primer periodo Ti_1 se producen las Qi unidades $p = \frac{P}{T} = \frac{Qi}{Ti_1} \Rightarrow Ti_1 = Qi \cdot \frac{T}{P}$

y la demanda acumulada será Di': $d = \frac{D}{T} = \frac{Di'}{Ti_1} \Rightarrow Di' = \frac{D}{T} \cdot Ti_1 = \frac{D}{T} \cdot Qi \cdot \frac{T}{P} = Qi \cdot \frac{D}{P}$

La cantidad máxima en stock será: $Si = Qi - Di' = Qi - Qi \cdot \frac{D}{P} = Qi \cdot \left(1 - \frac{D}{p}\right)$

Para hallar el costo de almacenamiento debe tenerse en cuenta que el área del triángulo de base Ti y altura Si equivale a la del rectángulo de la misma base Ti y la mitad de la altura Si/2.

Resulta:

Costo de almacen$_i$: $= \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Si \cdot Ti = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Qi \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right) \cdot Ti$

El costo total del periodo será: $CT_i = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right) \cdot T_i + K + b \cdot Q_i$

Y en el lapso T: $CT = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right) \cdot T + K \cdot \frac{D}{Q_i} + b \cdot D$

Como en el modelo básico, se trata de hallar el valor de Q_i que minimiza el costo total, el optimo se tendrá para: $\frac{\partial CT(Q_i)}{\partial Q_i} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right) \cdot T - K \cdot \frac{D}{Q_i^2} = 0$

De donde: $Q_i^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{c_1 \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right) \cdot T}}$

Y como: $n = \frac{T}{T_i} = \frac{D}{D_i} = \frac{D}{Q_i} \Rightarrow T_i^* = Q_i^* \cdot \frac{T}{D}$

que puede ponerse en función de los datos:

$$T_i^* = \frac{T}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{c_1 \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right) \cdot T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot T}{c_1 \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right) \cdot D}}$$

2.3.3 Ejemplo

Enunciado: La empresa del ejemplo 1.4 desea plantear una modificación del esquema inicial: en vez de efectuarse la reposición en forma instantánea, cada lote se ira entregando a medida que se fabrican las unidades.

La capacidad de producción del proveedor es de 225,000 unidades anuales.

Se pide:

a) Graficar demanda, cantidad adquirida y cantidad en stock, suponiendo que en cada pedido se solicitan 6,000u.

b) Determinar el costo de cada periodo.

c) Repetir a) y b) suponiendo que en cada pedido se solicitan 2,000u

d) Hallar la cantidad de reordenamiento que minimiza el costo total.

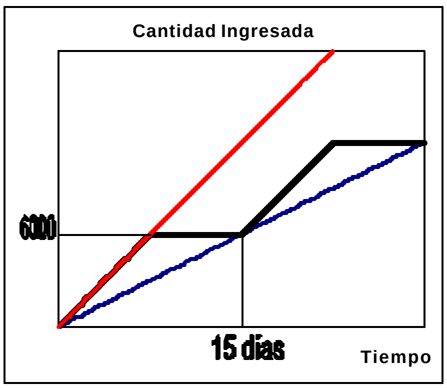
e) Determinar el periodo de reorden, el subperíodo en el que se produce, el subperíodo en que no se produce t el costo total.

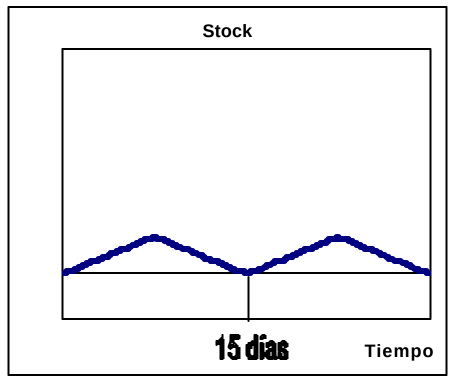
f) Gráfica a) para la solución optima.
Hipótesis: las del modelo con reposición no instantánea
Datos: Los del ejemplo 1.4 y P=225,000u para T=1 año
Solución:

a) $n = \frac{D_i}{Q_i} = \frac{12000\ u}{6000\ u} = 2 = \frac{T}{T_i} \Rightarrow T_i = \frac{T}{2} = 15\,dias$

$$p = \frac{P}{T} = \frac{Q_i}{T_{i1}} \Rightarrow T_{i1} = Q_i \cdot \frac{T}{P} = 6000\ u \cdot \frac{365\,dias}{225000\ u} = 9.6\,dias$$

$$d = \frac{D}{T} = \frac{D_i^{'}}{T_{i1}} \Rightarrow D_i^{'} = \frac{D}{T} \cdot T_i^{'} = \frac{12000\ u}{30\,dias} \cdot 9.6\,dias = 3840\ u$$





$$S_i = Q_i - D_i = 6000\,u - 3840\,u = 2160\,u$$

Comprobación:

$$S_i = Q_i \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right) = 6000\ u \cdot \left(1 - \frac{144000\ u}{225000\ u}\right) = 2160\,u$$

b) Para un periodo:
Costo de compra$_i$: $= b \cdot Q_i = 30\,\$/u \cdot 6000\ u = 180000\ \$$

Costo de almacen$_i$: $= \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot S_i \cdot T_i = \frac{1}{2} \cdot 0.25\,\$/u.mes \cdot 2160\,u \cdot \frac{1}{2}\,mes = 135\,\$$

Para un mes:
Costo de compra: $= b \cdot Q_i = 30\,\$/u \cdot 12000\ u = 360000\ \$$

Costo de almacén: $= \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot S_i \cdot T_i = \frac{1}{2} \cdot 0.25\,\$/u.mes \cdot 2160\,u \cdot 1\,mes = 270\,\$$

Costo de orden:$= K \cdot n = K \cdot \frac{D}{Q_i} = 60\,\$ \cdot \frac{12000\ u}{6000\ u} = 120\,\$$

Costo total: $= 360{,}390\,\$$

c) Resuelva lo el alumno y compruebe que:
S_i = 720u T_{i1} = 3.2dias CT_i = 60.075\$ CT = 360.450\$

d) $$Q_i^* = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{c_1 \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right) \cdot T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60\$ \cdot 1mes}{0.25\$/u.mes \cdot \left(1 - \frac{12000u}{18750u}\right) \cdot 1mes}} = 4000u$$

obsérvese que "D" y "P" deben corresponder a un mismo lapso: D = 144,000u y P = 225,000u para un año o D = 12,000u y P = 18750u para un mes.

e) $T_i^* = \sqrt{\dfrac{2 \cdot K \cdot T}{c_1 \cdot \left(1 - \dfrac{D}{P}\right) \cdot D}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 60\$ \cdot 1mes}{0.25\$/u.mes \cdot \left(1 - \dfrac{12000u}{18750u}\right) \cdot 12000u}} = \dfrac{1}{3} mes = 10 dias$

$$\frac{P}{T} = \frac{Q_i}{T_{i1}} \Rightarrow T_{i1} = Q_i \cdot \frac{T}{P} = 4000u \cdot \frac{30dias}{18750u} = 6.4dias$$

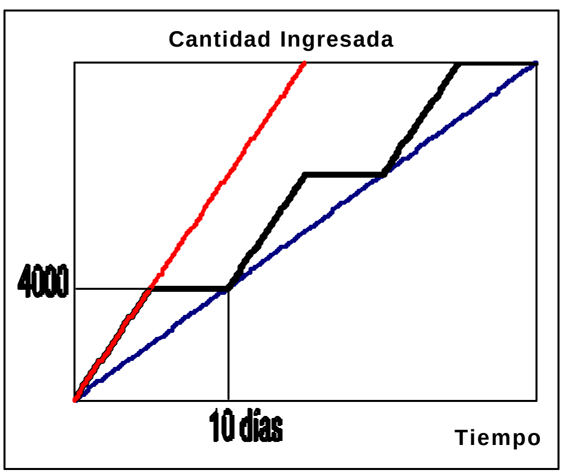
$$\frac{P}{T} = \frac{D_i^{'}}{T_{i1}} \Rightarrow D_i^{'} = D \cdot \frac{T_{i1}}{P} = 12000u \cdot \frac{6.4dias}{30dias} = 2560u$$

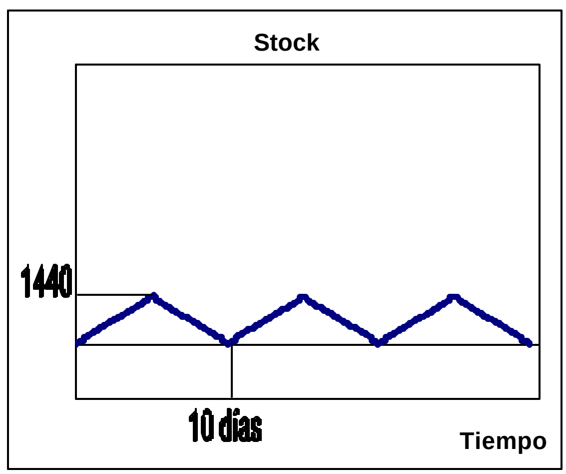
$$S_i^{'} = Q_i - D_i^{'} = 4000u - 2560u = 1440u$$

o $S_i^{'} = Q_i \cdot \left(1 - \dfrac{D}{P}\right) = 4000u \cdot \left(1 - \dfrac{12000u}{18750u}\right) = 1440u$

$$CT = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot S_i \cdot T + K \cdot \frac{D}{Q_i}$$

$$CT = 30\frac{\$}{u} \cdot 12000u + \frac{1}{2} \cdot 0.25\frac{\$}{u.mes} \cdot 1440u \cdot 1mes + 60\$ \cdot \frac{12000u}{4000u} = 360,360\$$$





2.4 MODELO DE PRECIOS DIVIDIDOS

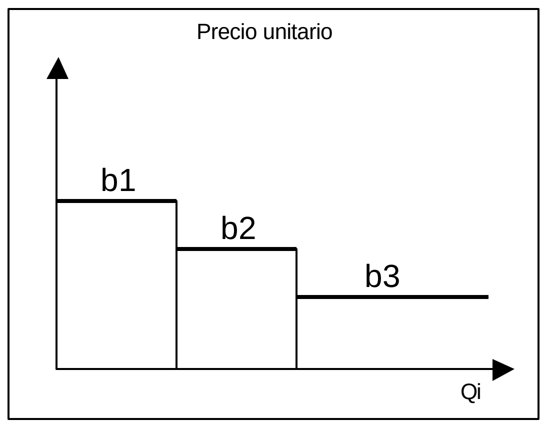
2.4.1 Variación del precio unitario con la cantidad

El modelo básico supone que el precio unitario es constante. Esto significa que no se modificara en el periodo T de análisis: las n compras de Q_i unidades costaran siempre $b*Q_i$. Pero también quiere decir que no se modificara con la magnitud de Q_i: ya sea que en cada compra se adquieran, por ejemplo, 10 o 1000 unidades, el precio unitario será el mismo.
Sin embargo, en la practica comercial puede ocurrir que, adquiriendo mayor cantidad, se obtenga menor precio unitario (“descuento por cantidad”)
El modelo de precios divididos admite esta posibilidad.
Para simplificar la exposición se supondrá la existencia de tres precios unitarios: si se compran hasta Q_1 unidades, el precio unitario será b_1; si se compran mas de Q_1 y hasta Q_2 unidades, el precio será b_2 y si se compran mas de Q_2 unidades el precio será b_3. Se supone que estos precios unitarios son decrecientes.

2.4.2 Modelo básico con precios divididos

La hipótesis 5 del modelo básico se reemplaza por:
5´El costo unitario del producto no varia en el tiempo pero es función de la cantidad ordenada

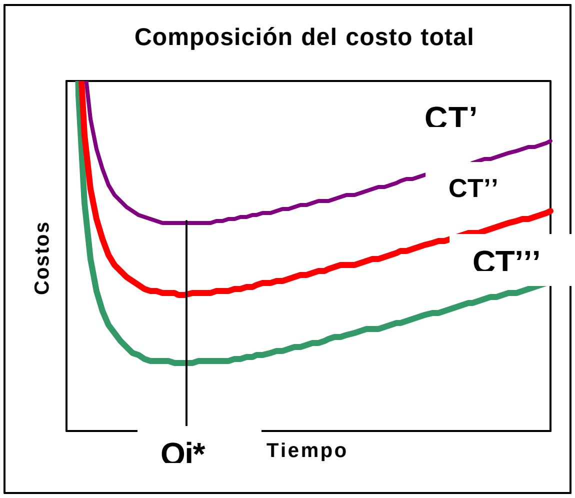
$$b = \begin{cases} b_1 \text{ si } Q_i \leq Q_1 \\ b_2 \text{ si } Q_1 < Q_i < Q_2 \\ b_3 \text{ si } Q_2 \leq Q_i \end{cases} \qquad \text{con } b_1 > b_2 > b_3$$



La modificación que se producirá en el modelo básica será en el termino b*Qi de Cti y en b*D de CT. La expresión del costo total resultara:

$$CT = \begin{cases} CT' = \tfrac{1}{2}.c_1.Q_i \cdot T + K.\dfrac{D}{Q_i} + b_1.D & b_1 \text{ si } Q_i \leq Q_1 \\ CT'' = \tfrac{1}{2}.c_1.Q_i \cdot T + K.\dfrac{D}{Q_i} + b_2.D & b_2 \text{ si } Q_1 < Q_i < Q_2 \\ CT''' = \tfrac{1}{2}.c_1.Q_i \cdot T + K.\dfrac{D}{Q_i} + b_3.D & b_3 \text{ si } Q_2 \leq Q_i \end{cases}$$

Para analizar las diversas alternativas que pueden aparecer se han graficado las curvas CT’, CT’’ y CT’’’ sin restringir su dominio. Se observa que las tres tienen el mínimo relativo para un mismo valor de $Qi^* = \sqrt{\dfrac{2.k.D}{c_1.T.}}$

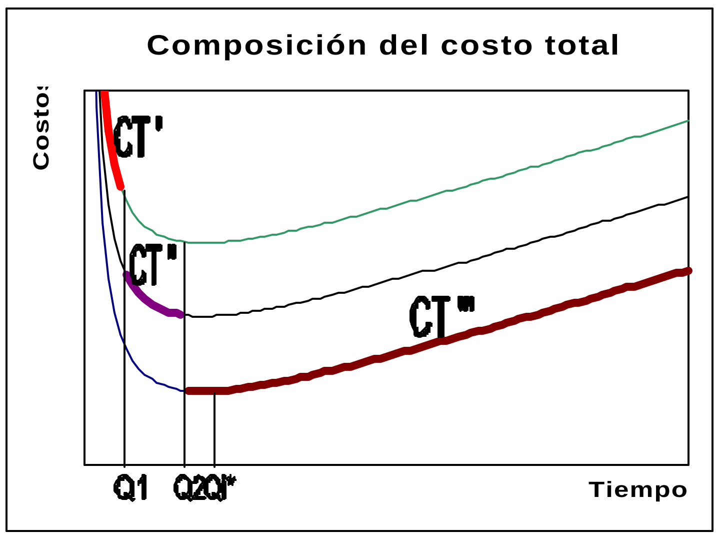


Además, por ser $b_1 > b_2 > b_3$ será, para todo valor de Q_i: $CT'(Q_i) > CT''(Q_i) > CT'''(Q_i)$

Se ha graficado luego CT para distintos valores de Q1 y Q2: cada parte de CT tendrá una parte de CT', una de CT'' y una de CT'''

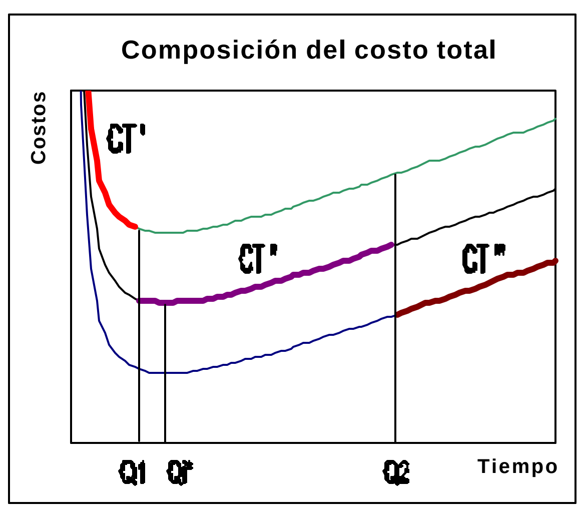
Se analizan las distintas posibilidades:

1. $Q_i^*>Q_2$



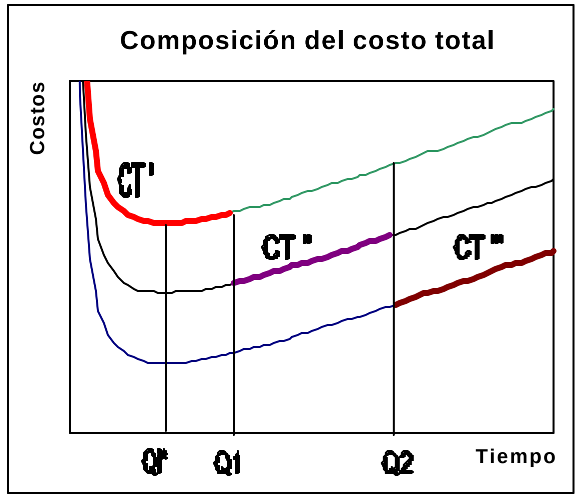
CT''' tendrá un mínimo en Q_i^*. Para cualquier otro valor Q_i que se considere (sin restricción de dominio) será $CT'''(Q_i^*) < CT'''(Q_i)$ y para ese valor Q_i será $CT'''(Q_i) < CT''(Q_i) < CT'(Q_i)$. Por carácter transitivo resulta que $CT'''(Q_i^*)$ es el mínimo de la función CT

2. $Q_1<Q_i^*\le Q_2$



CT'' tendrá un mínimo en Q_y^*. Para cualquier otro valor de Q_i que se considere (sin restricción de dominio) será $CT''(Q_i^*) < CT''(Q_i)$ y, además, $CT''(Q_i) < CT'(Q_i)$, En Q_i^* se tiene el menor valor posible de CT' y CT'' Pero puede ocurrir que existe un valor de Qi para el que CT''' sea inferior, dentro de su dominio. Como CT''' es creciente en su dominio, solo debe evaluarse $CT'''(Q_2)$.
El menor entre $CT''(Q_i^*)$ y $CT'''(Q_2)$ es el mínimo de CT.

3. $Q_i^* < Q1$



CT' tendrá un mínimo en Q_i^*.
El valor CT'(Q_i^*) será el menor de todos los valores de CT' en su dominio. Pero deben considerarse los mínimos de CT'' y CT'''.
Como cada una de ellas es creciente en su dominio, deberán evaluarse CT'' en Q_1 y CT''' en Q_2.
El menor de los valores CT'(Q_i^*), CT''(Q_1) y CT'''(Q_2) es el mínimo de CT.

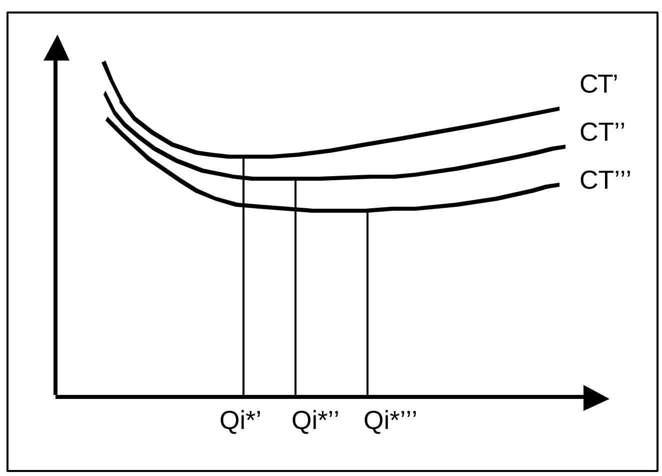
2.4.3 Caso particular del modelo básico con precios divididos en que c1 es el costo de oportunidad del dinero inmovilizado

Lo expuesto en 2.4.2 solo vale si c1 no es función del precio unitario. Pero si es el costo de oportunidad del dinero inmovilizado en stock, el modelo debe modificarse.
La hipótesis 5' expuesta en 2.4.2 es la misma.
Debe reemplazarse la hipótesis 3 del modelo básico, por la siguiente:
3' Costo unitario de almacenamiento por unidad de tiempo (c1 = i * b) constante en el tiempo.
La expresión resultara:

$$CT = \begin{cases} CT' = \tfrac{1}{2}.i \cdot b_1.Q_i \cdot T + K.\dfrac{D}{Q_i} + b_1.D & \text{si } Q_i \leq Q_1 \\ CT'' = \tfrac{1}{2}.i \cdot b_2.Q_i \cdot T + K.\dfrac{D}{Q_i} + b_2.D & \text{si } Q_1 < Q_i < Q_2 \\ CT''' = \tfrac{1}{2}.i \cdot b_3.Q_i \cdot T + K.\dfrac{D}{Q_i} + b_3.D & \text{si } Q_2 \leq Q_i \end{cases}$$

Como antes, se han graficado CT', CT'' y CT''', sin restringir su dominio. Ahora resulta que los mínimos de las tres no corresponden a un mismo valor de Qi. Si se denomina: $Q_i^{*'} = \sqrt{\dfrac{2.k.D}{i \cdot b_1.T.}}$

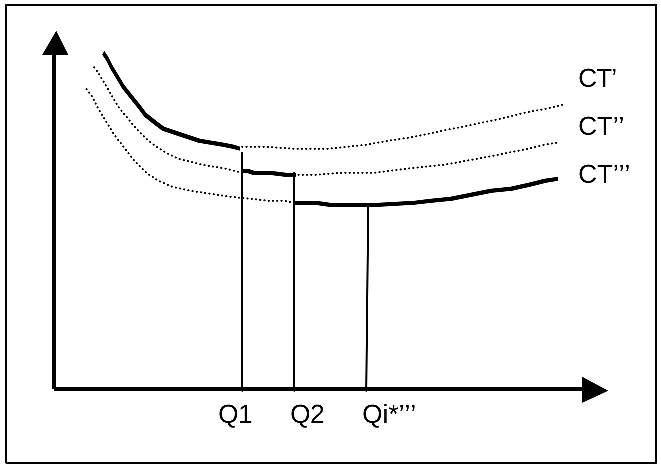
$Q_i^{*''} = \sqrt{\dfrac{2.k.D}{i \cdot b_2.T.}}$ $Q_i^{*'''} = \sqrt{\dfrac{2.k.D}{i \cdot b_3.T.}}$ a los valores de Qi para los cuales corresponden los mínimos, como es b1 > b2 > b3, entonces resulta $Q_i^{*'} < Q_i^{*''} < Q_i^{*'''}$.
Por la misma razón, para todo valor de Qi resulta CT'''(Qi) < CT''(Qi) < CT'(Qi).
Se graficó, como antes, CT para distintos valores de Q1 y de Q2.



Si se repite el análisis hecho en 2.4.2 resulta que:

1. $Q_i^{*'''} > Q_2$

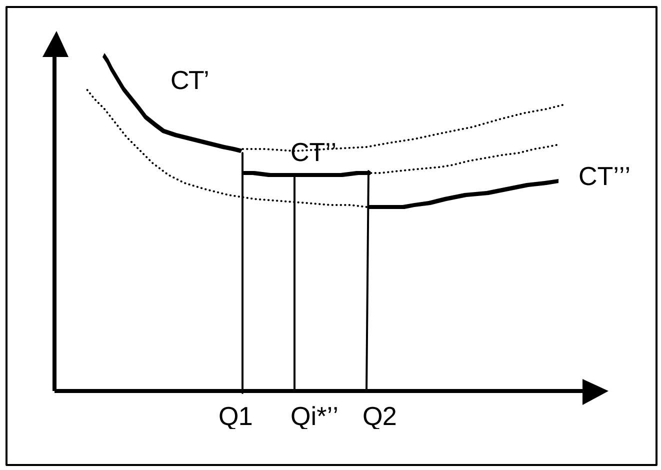
El mismo razonamiento asegura que CT'''(Q_i^{*}) es el mínimo de la función CT

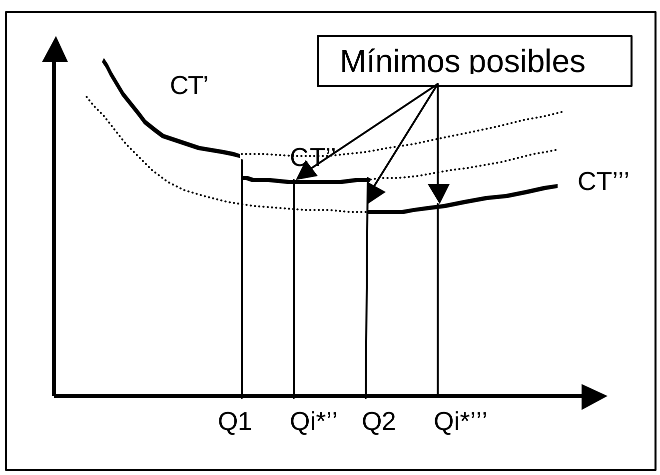


2. $Q_1 < Q_i^{*''} \leq Q_2$

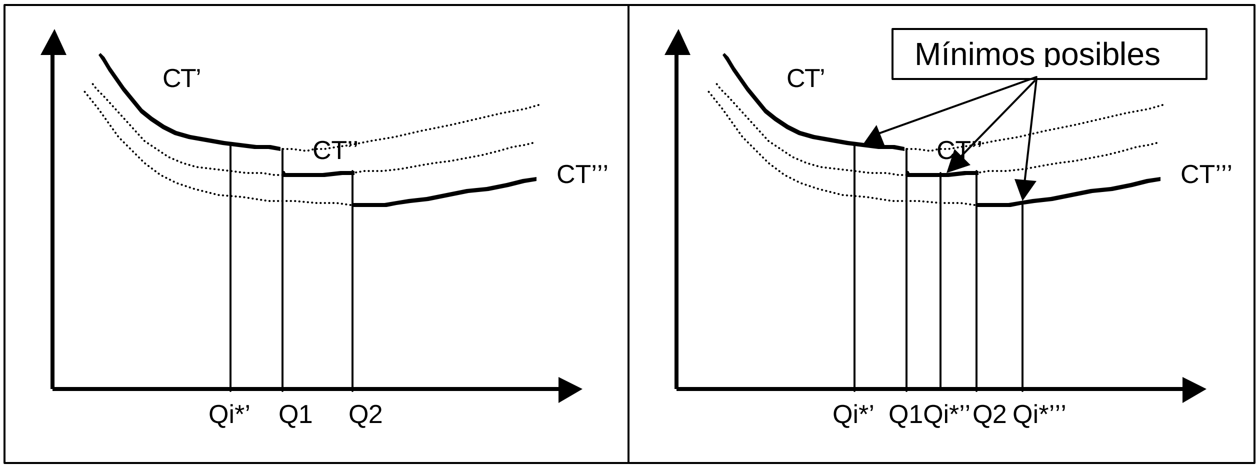
   Vale la primera parte el razonamiento: CT''(Q_i^{*}) es el menor valor de CT' y CT''. Pero la posibilidad de que haya un valor de CT''' inferior, dentro de su dominio, cambia.

   No puede asegurarse que CT''' sea creciente en su dominio. Si lo es deberá compararse, como antes, CT'''($Q_i^{*''}$) con CT'''(Q_2). Si no lo es, tendrá un mínimo relativo en $Q_i^{*'''}$ y debe compararse entre CT''($Q_i^{*''}$) y CT'''($Q_i^{*'''}$)





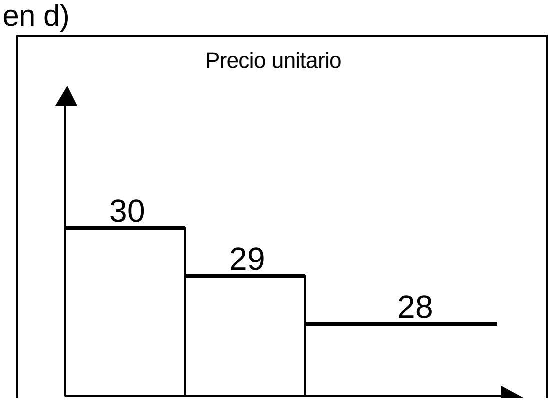
3. $Q_i^{*'} < Q1$
   CT' tendrá un mínimo en $Q_i^{*'}$.
   El valor de todos los valores de CT', en su dominio, será CT'($Q_i^{*'}$). Pero se lo debe comparar con el menor valor de CT'' (que puede ser CT''(Q_1), si CT'' es creciente en su dominio, o CT''($Q_i^{*''}$), si no lo es), y con el menor valor de CT''' (que puede ser CT'''(Q_2) si CT''' es creciente en su dominio, o CT'''($Q_i^{*'''}$) si no lo es).



Justifique el alumno que CT'''($Q_i^{*'''}$) < CT''($Q_i^{*''}$) < CT'($Q_i^{*'}$), lo que resolverá algunas de las comparaciones propuestas.
Encuentre también el procedimiento sistemático para hallar el mínimo de CT con la menor cantidad de cálculos y comparaciones. Compruebe que es aplicable al caso expuesto en 2.4.2 y que, en ambos casos, no depende de la cantidad de precios distintos que se consideren.

2.4.4 Ejemplo

Enunciado: La empresa del ejemplo 1.4 debe considerar una modificación de los precios que le propone el proveedor: por compras de hasta 1,000 unidades se mantendrá el mismo precio unitario (30$/u); por compras mayores, hasta 10,000 unidades, el precio unitario será de 29$/u, por compras mayores que 10,000 unidades, 28$/u.
Se pide:
a) Expresar analíticamente b = f(Q_i) y graficar
b) Idem CT = f(Q_i)
c) Determinar la cantidad de reordenamiento que hace mínimo el costo total
d) Repetir a), b) y c) suponiendo que los precios unitarios fuesen 30$/u; 29.95$/u y 29.90$/u, respectivamente.
e) Resolver el problema suponiendo que c1 no es constante, sino que es el costo de oportunidad del dinero inmovilizado, determinado para b = 30$/u
f) Idem e), para los nuevos precios dados en d)
Hipótesis: Las del modelo básico con precios divididos (para a), b), c) y d)). Las del modelo básico con precios divididos y c1 como costo de oportunidad del dinero inmovilizado (para e) y f))
Solución:



a)

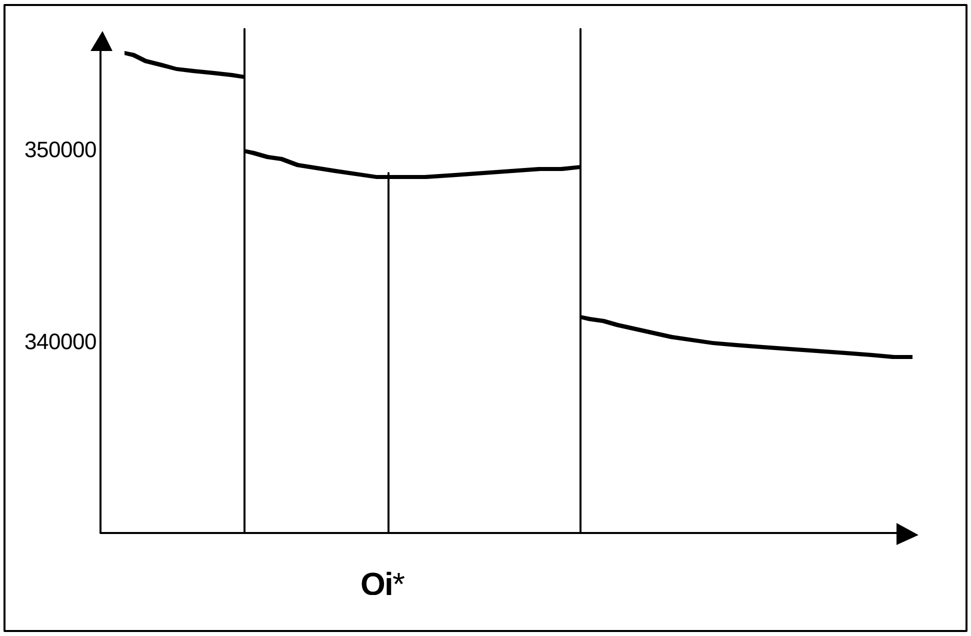
$$b = \begin{cases} 30\$/u & \text{si } Q_i \leq Q_1 \\ 29\$/u & \text{si } Q_1 < Q_i < Q_2 \\ 28\$/u & \text{si } Q_2 \leq Q_i \end{cases}$$

b)

$$CT = \begin{cases} CT' = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \dfrac{D}{Q_i} + b_1 \cdot D & \text{si } Q_i \leq Q_1 \\ CT'' = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \dfrac{D}{Q_i} + b_2 \cdot D & \text{si } Q_1 < Q_i < Q_2 \\ CT''' = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \dfrac{D}{Q_i} + b_3 \cdot D & \text{si } Q_2 \leq Q_i \end{cases}$$

$$CT = \begin{cases} CT' = \frac{1}{2} \cdot 0.25 \dfrac{\$}{u.mes} \cdot Q_i \cdot 1mes + 60\$ \cdot \dfrac{12000u}{Q_i} + 30 \dfrac{\$}{u} \cdot 12000u & \text{si } Q_i \leq Q_1 \\ CT'' = \frac{1}{2} \cdot 0.25 \dfrac{\$}{U.mes} \cdot Q_i \cdot 1mes + 60\$ \cdot \dfrac{12000u}{Q_i} + 29 \dfrac{\$}{u} \cdot 12000u & \text{si } Q_1 < Q_i < Q_2 \\ CT'' = \frac{1}{2} \cdot 0.25 \dfrac{\$}{U.mes} \cdot Q_i \cdot 1mes + 60\$ \cdot \dfrac{12000u}{Q_i} + 28 \dfrac{\$}{u} \cdot 12000u & \text{si } Q_2 \leq Q_i \end{cases}$$

Q_i	0.125$/u * Q_i	720,000 $*u / Q_i	b_1 * 12,000u	CT
500	62.50	1,440.00	360,000	361,502.50
1000	125.00	720.00	360,000	360,845.00
1000	125.00	720.00	348,000	348,845.00
1500	187.50	480.00	348,000	348,667.50
2000	250.00	360.00	348,000	348,610.00
2500	312.50	288.00	348,000	348,600.50
3000	375.00	240.00	348,000	348,615.00
5000	625.00	144.00	348,000	348,767.00
7000	875.00	102.85	348,000	348,977.00
9000	1,125.00	80.00	348,000	349,205.00
10000	1,250.00	72.00	348,000	349,322.00
10000	1,250.00	72.00	336,000	337,322.00
11000	1,375.00	65.45	336,000	337,440.45



c) $Q_i^* = \sqrt{\dfrac{2.K.D}{c_1.T.}} = \sqrt{\dfrac{2.60\$.12000u}{0.25\dfrac{\$}{u.mes}\cdot 1mes.}} = 2400u$

CT* tiene un mínimo relativo en Q_i^* = 2,400u.
CT''(Q_i^*) es el menor de los valores de CT' y CT'' en sus respectivos dominios. Debe compararse con el mínimo de CT''' en su dominio que, por ser esta creciente, se halla en Q_2=10,000u.
El mínimo de CT será en menor entre:

$$CT''(2400) = \tfrac{1}{2}\cdot 0.125\frac{\$}{U.mes}\cdot 2400u\cdot 1mes + 60\$\cdot\frac{72000u}{2400} + 29\frac{\$}{u}\cdot 12000u = 348600\$$$

$$CT'''(10000) = \tfrac{1}{2}\cdot 0.125\frac{\$}{U.mes}\cdot 10000u\cdot 1mes + 60\$\cdot\frac{720000u}{10000u} + 28\frac{\$}{u}\cdot 10000u = 337322\$$$

El mínimo de CT se tiene para Q_i = 10,000u., con un CT = 337,322$ (en rigor debe tomarse una cantidad levemente superior, porque el dominio de CT''' es Q_i > 10,000)
d) Resuélvalo el alumno y compruebe que el costo total mínimo se obtiene para Q_i = 2,400u y vale 360,000$
e) El valor de c_1 resulta función de b

$$c_1 = b_1\cdot i \Rightarrow \frac{c_1}{b_1} = i = \frac{3\dfrac{\$}{u.año}}{30\dfrac{\$}{u}} = 0.1\frac{}{año}$$

$$c_1 = \begin{cases} c_1' = b_1\cdot i = 0.1\dfrac{}{año}\cdot 30\dfrac{\$}{u} = 3\cdot\dfrac{\$}{u.ano} & \text{si } Q_i \le 1{,}000u \\ c_1'' = b_2\cdot i = 0.1\dfrac{}{año}\cdot 29\dfrac{\$}{u} = 2.9\cdot\dfrac{\$}{u.ano} & \text{si } 1{,}000u < Q_i < 10{,}000u \\ c_1''' = b_3\cdot i = 0.1\dfrac{}{año}\cdot 28\dfrac{\$}{u} = 2.8\cdot\dfrac{\$}{u.ano} & \text{si } 10{,}000u \le Q_i \end{cases}$$

$$CT = \begin{cases} CT' = \frac{1}{2}\cdot c_1' \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \dfrac{D}{Q_i} + b_1 \cdot D & \text{si } Q_i \le 1{,}000u \\ CT'' = \frac{1}{2}\cdot c_1'' \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \dfrac{D}{Q_i} + b_2 \cdot D & \text{si } 1{,}000u < Q_i < 10{,}000u \\ CT''' = \frac{1}{2}\cdot c_1''' \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \dfrac{D}{Q_i} + b_3 \cdot D & \text{si } 10{,}000u \le Q_i \end{cases}$$

$$CT = \begin{cases} CT' = \frac{1}{2}\cdot 3\dfrac{\$}{u.12meses}\cdot Q_i \cdot 1mes + 60\$ \cdot \dfrac{12000u}{Q_i} + 30\dfrac{\$}{u}\cdot 12000u \\ CT'' = \frac{1}{2}\cdot 2.9\dfrac{\$}{U.12meses}\cdot Q_i \cdot 1mes + 60\$ \cdot \dfrac{12000u}{Q_i} + 29\dfrac{\$}{u}\cdot 12000u \\ CT'' = \frac{1}{2}\cdot 2.8\dfrac{\$}{U.12meses}\cdot Q_i \cdot 1mes + 60\$ \cdot \dfrac{12000u}{Q_i} + 28\dfrac{\$}{u}\cdot 12000u \end{cases}$$

Q_i	$0.5*c_1*Q_1*1mes$	720,000 $*u / Q_i	b_1 * 12,000u	CT
500	62.50	1,440.00	360,000	361,502
1000	125.00	720.00	360,000	360,845
1000	125.00	720.00	348,000	348,840
1500	187.50	480.00	348,000	348,661
2000	250.00	360.00	348,000	348,601
2500	312.50	288.00	348,000	348,590
3000	375.00	240.00	348,000	348,602
5000	625.00	144.00	348,000	348,748
7000	875.00	102.85	348,000	348,948
9000	1,125.00	80.00	348,000	349,167
10000	1,250.00	72.00	348,000	349,280
10000	1,250.00	72.00	336,000	337,238
11000	1,375.00	65.45	336,000	337,348

$$Q_i^{*'} = \sqrt{\frac{2.K.D}{c_1'.T.}} = \sqrt{\frac{2.60\$.12000u}{3\dfrac{\$}{u.12meses}\cdot 1mes.}} = 2400u$$

$$Q_i^{*''} = \sqrt{\frac{2.K.D}{c_1''.T.}} = \sqrt{\frac{2.60\$.12000u}{2.9\dfrac{\$}{u.12meses}\cdot 1mes.}} = 2441u$$

$$Q_i^{*'''} = \sqrt{\frac{2.K.D}{c_1'''.T.}} = \sqrt{\frac{2.60\$.12000u}{2.8\dfrac{\$}{u.12meses}\cdot 1mes.}} = 2484.23u$$

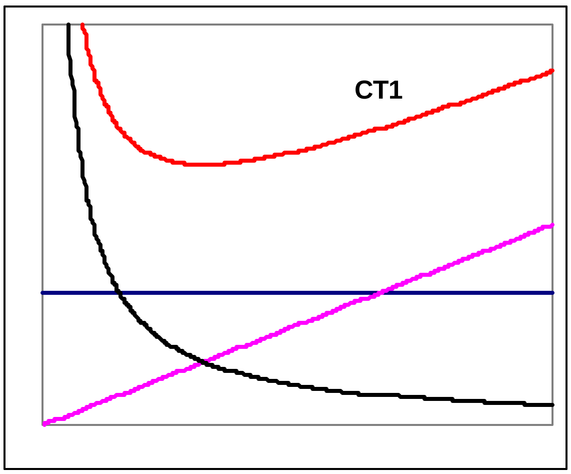
CT’’ tiene mínimo relativo en $Q_i^{*''}$ = 2441u.. CT’’($Q_i^{*''}$) es el menor de los valors de CT’ y CT’’ en sus respectivos dominios.
Debe compararse con el mínimo de CT’’’ en su dominio que, por ser esta creciente (Q_i^* <10.000) se hallara en Q_2 = 10.000u. Como CT’’(2441) = 348,589.91$ y CT’’’(10,000) = 337,238.66$. El optimo de CT se tiene para Q_i = 10,000 y vale 337,238.66
f) Resuélvalo el alumno y compruebe que el costo total mínimo es obtiene para Q = 2,402u y vale 359,999.49$

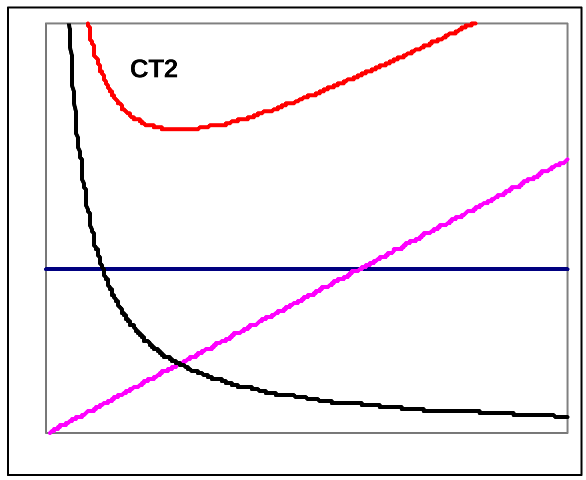
3 RESTRICCIONES - MODELOS MULTIPRODUCTO

3.0 ANALISIS GRAFICO

3.0.1 MODELO MULTIPRODUCTO SIN RESTRICCIONES

En los dos primeras partes se han expuesto modelos de stock para un único producto. En esta se consideraran modelos en que una empresa maneja simultáneamente varios productos y quiere minimizar el costo total de la administración de los mismos.
Como introducción al tema se expondrá un caso simple, con dos producto, que se puede representar gráficamente.
Sea una empresa que maneja dos productos, para cada uno de los cuales se cumplen las hipótesis del modelo básico. Será:





$$CT_1 = b_1 \cdot D_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot Q_{i1} \cdot T + K_1 \cdot \frac{D_1}{Q_{i1}}$$

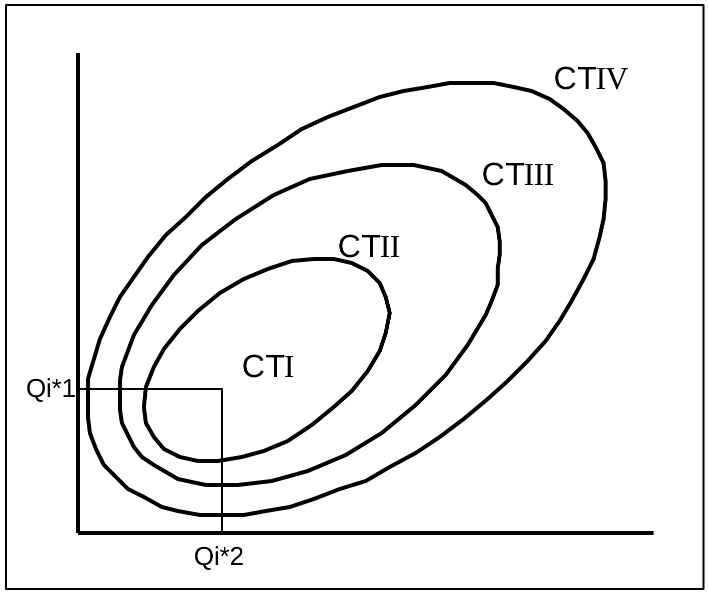
$$CT_2 = b_2 \cdot D_2 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot Q_{i2} \cdot T + K_2 \cdot \frac{D_2}{Q_{i2}}$$

Se han graficado $CT_1(Q_{i1})$ y $CT2(Q_{i2})$ y se indicaron los respectivos valores de Q_{ij} para los cuales se tiene el costo mínimo

El costo total, para ambos productos, será:

$$CT = CT_1 + CT_2 = b_1 \cdot D_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot Q_{i1} \cdot T + K_1 \cdot \frac{D_1}{Q_{i1}} + b_2 \cdot D_2 + \tfrac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot Q_{i2} \cdot T + K_2 \cdot \frac{D_2}{Q_{i2}}$$

La función $CT(Q_{i1};Q_{i2})$ puede graficarse del siguiente modo: en dos ejes coordenados se representan Q_{i1} y Q_{i2}. Cada punto representa una combinación de dos valores posibles de ambas variables y tiene asociado un valor de CT, que es la suma de los valores de CT_1 y CT_2 para los respectivos valores de Q_{i1} y Q_{i2}. Si se unen entre si los puntos que corresponden a un mismo total, se obtienen las curvas llamadas : “isocosto”.



Se han graficado curvas para cuatro valores de CT que verifican la relación $CT_I < CT_{II} < CT_{III} < CT_{IV}$.
En realidad CT_I es un solo punto, cuyas coordenadas resultan Q_{i1}^* y Q_{i2}^*, valores que, para cada producto por separado, minimizan su correspondiente costo. Resulta entonces que el mínimo de CT es CT_I y los valores de las variables que lo minimizan son Q_{i1}^* y Q_{i2}^*. (Esto se comprueba fácilmente si se plantea analíticamente la condición de optimo de $CT(Q_{i1};Q_{i2})$ que requiere $\frac{\partial CT(Q_{i1};Q_{i2})}{\partial Q_{i1}} = 0$ y $\frac{\partial CT(Q_{i1};Q_{i2})}{\partial Q_{i2}} = 0$)

Hasta aquí se ha supuesto que no existen restricciones: todos los pares ordenados $(Q_{i1};Q_{i2})$ son soluciones posibles (si ambos son no negativos). Para cualquier cantidad de productos que se tenga, vale la conclusión obtenida: el mínimo costo total se tiene para un conjunto de valores Q_j^*, cada uno de los cuales hace mínimo su respectivo costo total Ct_j.

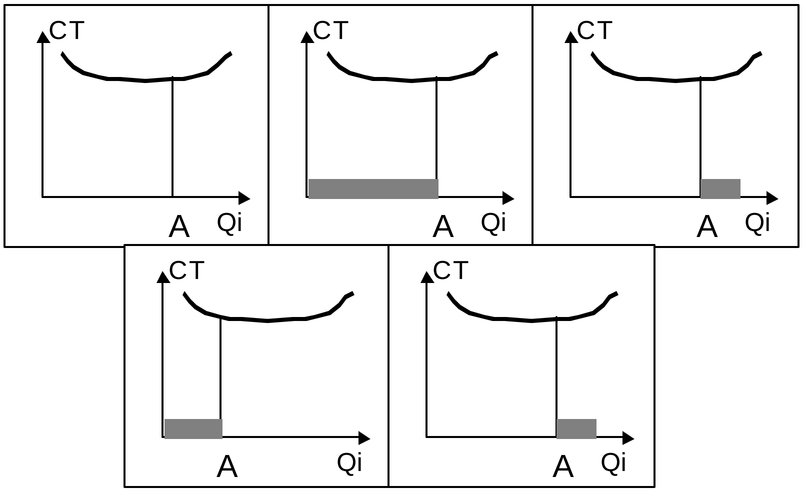
3.0.2 Restricciones

Por diversas razones pueden tener que incluirse restricciones a los valores posibles de las variables. En este párrafo se dan algunos ejemplos y se muestra su influencia en la solución gráfica del problema. Pero lo que se busca es, fundamentalmente, mostrar como distinguir las restricciones que limitan las variables, obteniéndose una solución diferente del caso sin restricciones, de aquellas que no la modifican; se quiere también mostrar que tipos de restricciones obligan a plantear modelos multiproducto y cuales no impiden hallar la solución optima trabajando con cada producto por separado.
Restricciones en modelos de un solo producto: ejemplos de posibles restricciones son:

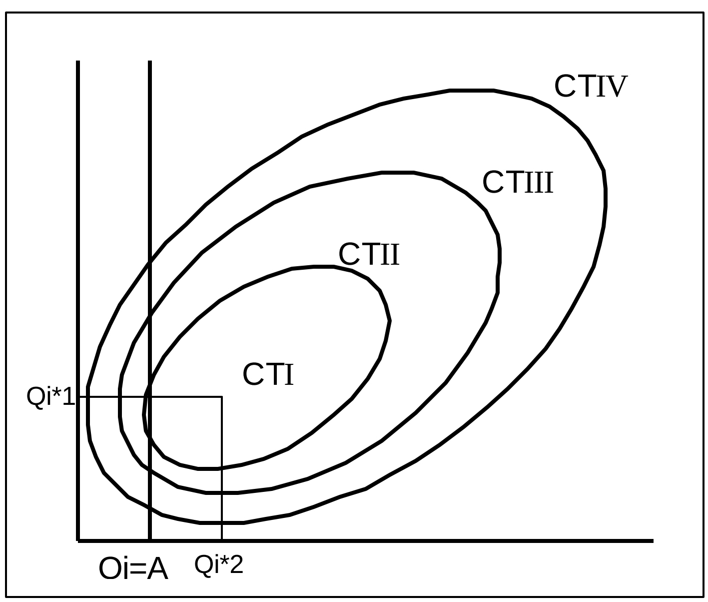
- Limitación del espacio disponible para almacenado
- Limitación del capital inmovilizado en dicho producto
- Limitación del periodo que puede permanecer en stock
- Fijación de la cantidad de ordenes a emitir en el periodo T
- Existencia de cantidad mínima de unidades a ordenar

Todas las restricciones pueden expresarse en función de la variable Q_i y pueden igualdades (fijando un único valor posible de Q_i), o desigualdades (que podrán fijar un mínimo o un máximo para Q_i).

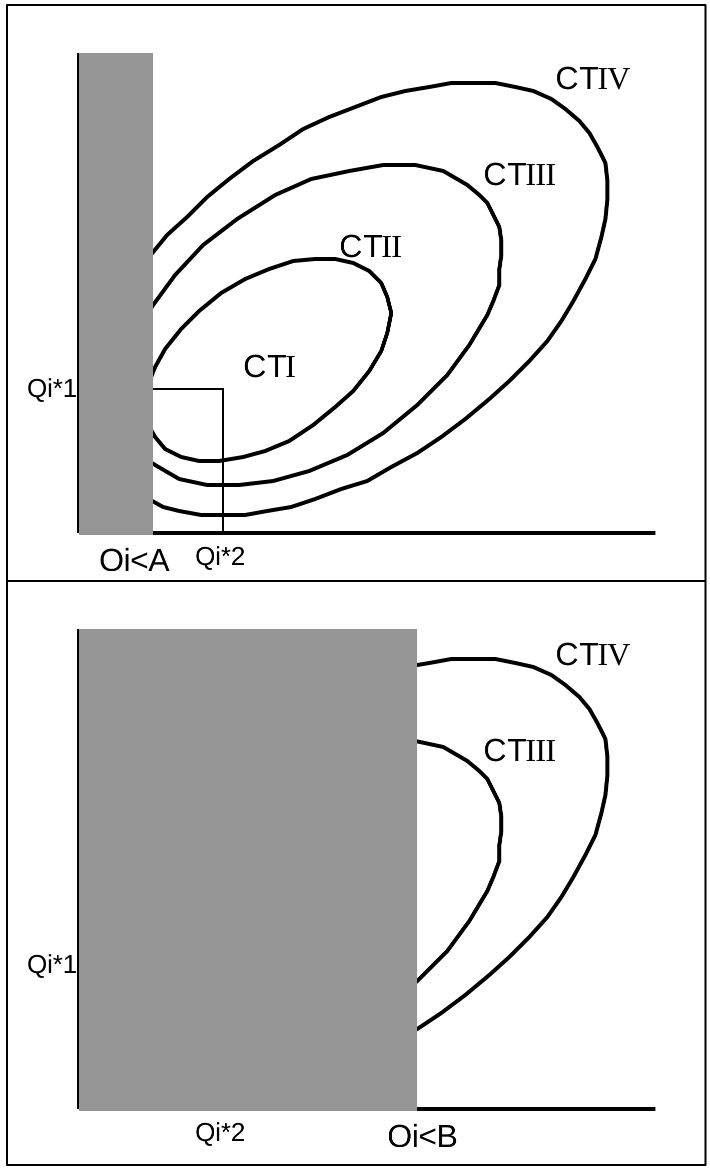
Observe el alumno los siguientes gráficos e indique el valor de Qi que minimiza el costo total.



Restricciones independientes en los modelos multiproducto: ejemplos de este tipo de restricciones son:
Limitación del espacio disponible para almacenar determinado producto, en un lugar distinto del deposito común donde se almacenan los demás
Limitación de la cantidad a tener en stock de un producto determinado
Estas restricciones se expresan en función de una variable Q_{ij} determinada: se restringe el conjunto de valores posibles de la cantidad a reordenar del producto j, pero la restricción no afecta el conjunto de soluciones posibles para las cantidades a reordenar de los demás.
Supóngase un modelo de dos productos, como el expuesto en 3.0.1, imponiéndose una restricción de igual para Q_{i1} ($Q_{i1} = A$). El conjunto de soluciones posibles es una semirecta paralela al eje de Q_2, cuyos puntos tienen todos abscisa Q_1 = A. Si se comparan los costos que corresponden a los puntos 1, 2, 3, 4, y 5 se ve que el mínimo se tiene para el punto 3: la curva de isocosto es tangente a la semirecta de valores posibles y el valor de Q_{i2} correspondiente es el mismo que minimiza el costo total del producto 2 considerado individualmente Q_{i2}^*.



Si la restricción para Q_{i1} es de desigualdad, el optimo se tendrá para Q_{i1}^* (correspondiente a optimizar sin restricciones CT_1) si dicho valor esta en el conjunto de valores posibles de Q_{i1}, o en el limite de la restricción, si Q_{i1}^* no es un valor posible. Pero en todos los casos, el valor de Qi2 que corresponde al optimo sigue siendo Q_{i2}^*.



La conclusión es que, aun cuando se impongan restricciones a los valores de las variables Q_{ij}, si tales restricciones son independientes (no vinculan entre si a las Q_{ij} de distintos productos), puede hallarse la solución optimo para el conjunto, optimizando cada costo CT_j por separado, considerando, obviamente, las eventuales restricciones impuestas a las correspondiente Q_{ij}.
El costo total optimo será la suma de los CT_j óptimos y las Q_{ij} las que respectivamente optimicen cada CT_j.
Corrobore esta conclusión el alumno comprobando, en los gráficos anteriores, que si la restricciones $Q_{i1} = B$, el optimo se tiene en (B; Q_{i2}^*), si es $Q_{i1} \geq A$, el optimo corresponde a (Q_{i1}^*;Q_{i2}^*) y si es $Q_{i1} \geq B$, a (B; Q_{i2}^*). Considere luego un valor $C < Q_{i2}^*$ y una $D > Q_{i2}^*$ y plantee los siguientes casos:

1) $Q_{i2} = C$ 2) $Q_{i2} \le C$ 3) $Q_{i2} > C$ 4) $Q_{i2} = C$ 5) $Q_{i2} \le D$ 6) $Q_{i2} \ge D$

Comprobara que, en todos, el optimo se tiene para un valor de Q_{i1} que coincide con el optimo sin restricciones (Q_{i1}^{*}) y el valor $Q_{2}^{''}$ que corresponda a optimizar CT_2 con la respectiva restricción.

Por ultimo, si quiere considerar la posibilidad de restricciones para las dos variables puede hacer lo siguiente:

considere las 6 restricciones distintas de Q_{i1} (=, ≤ y ≥ para A y para B) y las 6 de Q_{i2} (=, ≤ y ≥ para C y para D), tendrá 36 casos para graficar, obtener el par (Q_{i1}; Q_{i2}) que minimiza el costo total y comprobar que son los mismos que respectivamente optimizan CT_1 y CT_2, cada uno con la correspondiente restricción.

Restricciones comunes en modelos multiproducto: ejemplos de restricciones que vinculen entre si a las Q_{ij} de todos los productos serian:

Imposición de un valor fijo para el capital promedio a inmovilizar en stock

Imposición de una cantidad fija para la cantidad de ordenes a emitir en el periodo T

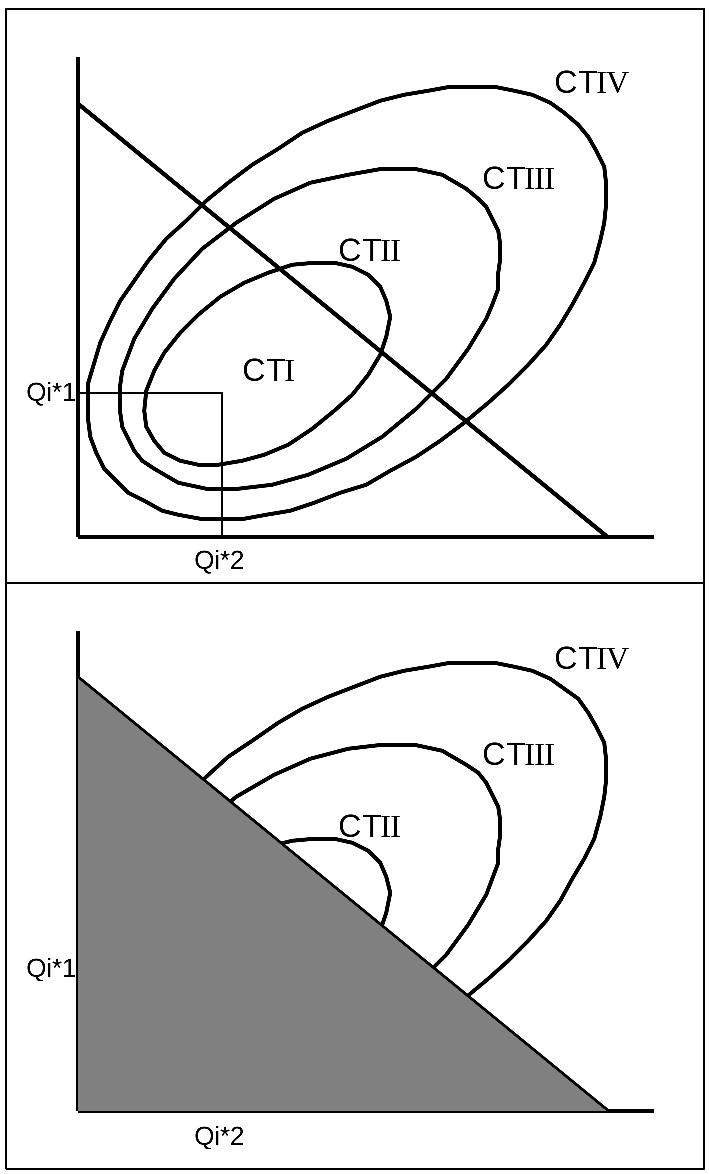
Limitación del espacio disponible en el deposito

En estos casos, no es posible obtener la solución optima considerando cada producto por separado.

Estas restricciones vinculan entre si a las Q_i de los distintos productos. En el caso de los productos, las restricciones de igual determinaran una línea (recta o curva) en el plano Q_{i1}, Q_{i2}, como conjunto de soluciones posible; las restricciones de desigualdad un área.

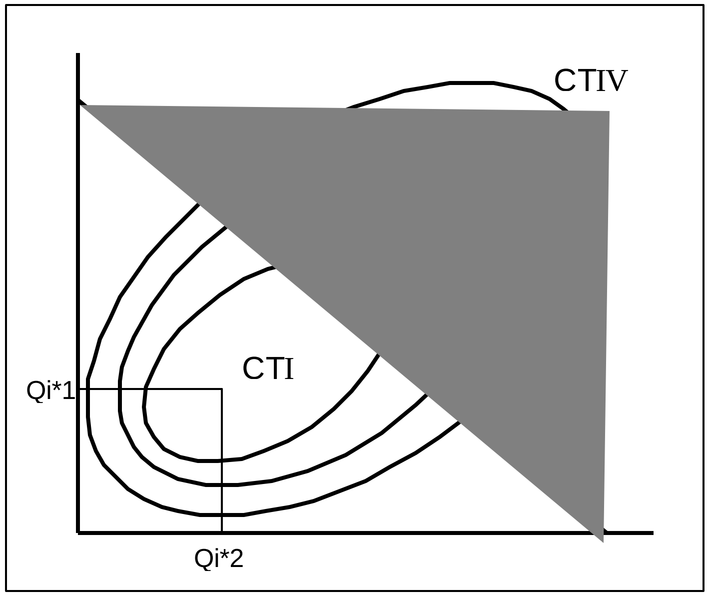
Sea el caso graficado, en que las soluciones posibles son puntos de una recta.

La solución optima se tiene para el punto en el que las curva isocosto es tangente a la recta. En efecto, los demás puntos de la recta están sobre curvas de mayor costo.



Si la restricción es de desigualdad, y el punto (Q_{i1}^{*}, Q_{i2}^{*}) pertenece al área de soluciones factibles, para ese punto se tendrá la solución optima. (corresponde el mínimo costo posible)

Si (Q_{i1}^*, Q_{i2}^*) no esta en el área de soluciones factibles, la solución optima se tendrá para un punto de la recta que limita el área: aquí en el que una curva isocosto sea tangente a la curva; los demás pertenecen a curvas de mayor costo.



Se recomienda al alumno plantear otras restricciones, ya sea con rectas o curvas (siempre se debe tener un conjunto CONVEXO de soluciones factibles) y verifique que las conclusiones obtenidas en este caso son generales.
Se le pide que recuerde lo que aprendió con las restricciones de los problemas de programación lineal; es un disparate creer que las relaciones de ≥ determinan un área "hacia arriba" de la frontera y las de ≤ "hacia abajo".
Los tres ejemplos de restricciones mencionados al comienzo del parragrafo se estudiaran y resolverán en forma analítica, en 3.2 y 3.3, previamente, para familiarizar al alumno con la herramienta matemática a utilizar, se consideraran en 3.1 casos de un solo producto con restricciones.

3.1 RESTRICCIONES EN MODELOS DE UN SOLO PRODUCTO

Se desarrollaran ejemplos en los que se tienen las condiciones del modelo básico de un solo producto y una restricción de espacio disponible: cada unidad de producto ocupa un espacio v y se dispone de una capacidad de espacio V. Almacenar Qi unidades requiere un espacio $v \cdot Q_i$. En un primer ejemplo se supone la exigencia de ocupar todo el espacio disponible ($V = v \cdot Q_i$), en el segundo solo se pide no sobrepasar la disponibilidad ($V \leq v \cdot Q_i$). En un tercer ejemplo se agrega al segundo un nuevo condicionamiento: que el capital promedio inmovilizado en stock ($\frac{1}{2} \cdot Q_i \cdot b$) no sobrepase cierto valor TI, o sea $\frac{1}{2} \cdot Q_i \cdot b \leq TI$.

3.1.1 Modelo básico con restricción de espacio ocupado (condición de =)

Hipótesis: Se agregan a las del modelo básico:

9. Espacio ocupado por cada unidad de producto v, $[v] = \frac{[volumen]}{[unidades]}$

10. Espacio disponible V, que debe ocuparse por completo al llegar cada lote.

Desarrollo: el modelo resulta:

$$CT = b \cdot D + \tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \frac{D}{Q_i} \rightarrow \text{Mínimo sujeto a } V = v \cdot Q_i$$

Se aplica el método de Lagrange: a la función objetivo CT, que es función de una única variable (Q_i) se le resta la diferencia entre los dos miembros de la ecuación que expresa la restricción, multiplicado por un coeficiente indeterminado (Y). Se obtiene así el “Lagrangiano”, función de Q_i e Y, que debe minimizarse, sin restricciones:

$$L(Q_i;Y) = b \cdot D + \tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \frac{D}{Q_i} - Y \cdot (v \cdot Q_i - V) \rightarrow \text{Mínimo}$$

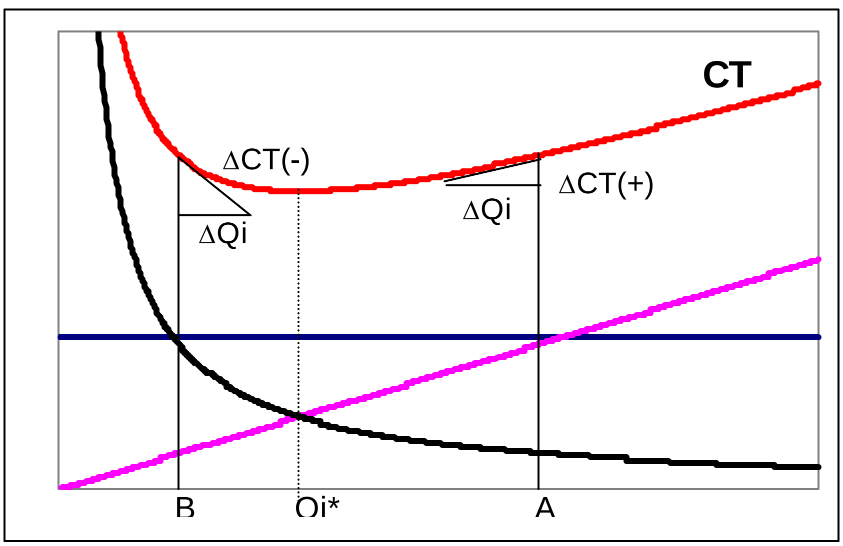
Como L es función de dos variables, la condición de optimo corresponderá a la anulación de sus derivadas parciales con respecto a ambas variables:

$$\frac{\partial L(Q_i;Y)}{\partial Q_i} = \tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - K \cdot \frac{D}{Q_i^2} - Y \cdot v = 0 \qquad \frac{\partial L(Q_i;Y)}{\partial Y} = -v \cdot Q_i + V = 0$$

Solución:

De la segunda: $Q_i = \dfrac{V}{v}$ que reemplazada en la primera da:

$$Y = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - K \cdot \dfrac{D}{Q_i^2}}{v} = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - K \cdot \dfrac{D}{\left(\dfrac{V}{v}\right)^2}}{v}$$



Interpretación de Y

El cociente Y tiene una interpretación económica. Supóngase de V es una variable, o sea que L es función de: Qi, V, e Y. Su derivada parcial con respecto a V resulta:

$$\frac{\partial L(Q_i;Y;V)}{\partial V} = Y$$

Esto significa que la variación de L (Y en el optimo, por ser $v \cdot Q_i - V = 0$ de CT). Por cada unidad en que varíe V, es Y. Dicho de otro modo: un incremento unitario en la disponibilidad de volumen V produce una variación de costo total de Y, por eso se dice que Y es el costo marginal de la restricción.

Supóngase que el valor de Qi hallado al resolver el problema es $A = \frac{V}{v}$ y que resulta $A > Q_i^*$, donde Q_i^* es el valor de Qi que corresponde al optimo sin restricciones. Obsérvese la expresión de Y: el numerador Y es positivo, un aumento del volumen disponible de V a $V + \Delta V$ producirá un aumento de costo igual a Y. En cambio, para un valor de V para el que la solución sea $Q_i = B$, donde $B < Q_i^*$, se ve en la expresión que la derivada de CT es negativa: si el volumen disponible pasa de V a $V + \Delta V$, el costo disminuirá en valor $|Y|$, por ser negativo.

(Téngase en cuanta, para la interpretación gráfica, que así como el espacio total V equivale a una cantidad almacenada $Q_i = \frac{V}{v}$, un incremento ΔV equivaldrá a un incremento de cantidad $\Delta Q_i = \frac{\Delta V}{v}$. Será $Y = \frac{\Delta CT}{\Delta v} = \frac{\Delta CT}{v \cdot Q_i}$: la pendiente de la curva CT(Q_i), multiplicada por $\frac{1}{Y}$ es Y)

3.1.2 Modelo básico con restricción de espacio ocupado (condición £)

Hipótesis: Deben agregarse a las del modelo básico:

9. Espacio ocupado por cada unidad de producto v
10. Espacio disponible V, que no puede sobrepasarse al llegar cada lote

Desarrollo: El modelo resulta:

$$CT = b \cdot D + \tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \frac{D}{Q_i} \rightarrow \text{Mínimo sujeto a } V \geq v \cdot Q_i$$

Para hallarse la solución optima debe transformarse, en primer lugar, la desigualdad en igualdad, se agrega una variable slack X que representa el espacio no utilizado.

$v \cdot Q_i + X = V$ Luego se plantea el Lagrangiano:

$$L(Q_i;Y) = b \cdot D + \tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \frac{D}{Q_i} - Y \cdot (v \cdot Q_i + X - V)$$

Para obtener la solución optima deben cumplirse las condiciones de Kuhn y Tucker:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - K \cdot \frac{D}{Q_i^2} - Y \cdot v = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -v \cdot Q_i - X + V = 0 \qquad (2)$$

$$X \cdot Y = 0 \qquad (3)$$

$$X \geq 0 \qquad (4)$$

$$Y \leq 0 \qquad (5)$$

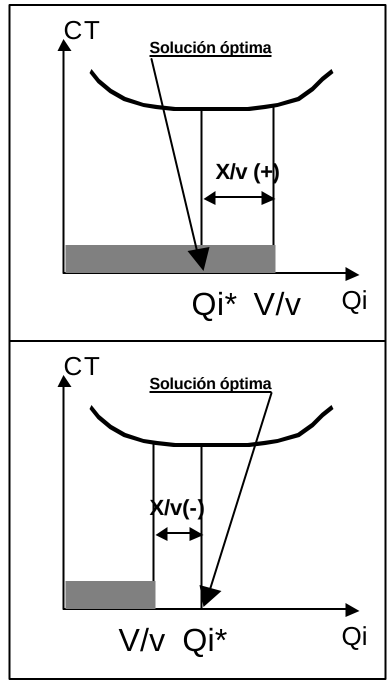
Solución: (3) exige $Y = 0$ o $X = 0$. Se analiza cada solución posible.

1º $Y = 0$ (cumple (3) y (5))

De (1): $Q_i = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot D}{c_1 \cdot T}}$ coincide con la solución para el modelo sin restricciones.

Se reemplaza ese valor de Q_i en (2) y se calcula X. Si es no negativo (cumple (4)) se ha obtenido la solución óptima. Si X resulta negativo, debe descartarse la suposición inicial ($Y = 0$). (no se cumples (4))

Para interpretar gráficamente ambos casos conviene plantear la ecuación (2), despejar X y dividir m.a.m. por v: $\frac{X}{v} = \frac{V}{v} \cdot Q_i$. El termino $\frac{X}{v}$ representa el espacio no ocupado, expresado en unidades de producto. $\frac{V}{v}_i$ es la máxima capacidad, en unidades de producto. Decir que X es no negativa significa que la capacidad de almacenamiento es mayor que la cantidad Q_i necesaria para el optimo sin restricciones: la condición no resulta restrictiva y se tendrá espacio sobrante. Decir que X es negativo significa que la la capacidad de almacenamiento es inferior a la que requiere la optimización sin restricciones, no puede almacenar esa cantidad, porque no se cumple la hipótesis 10.

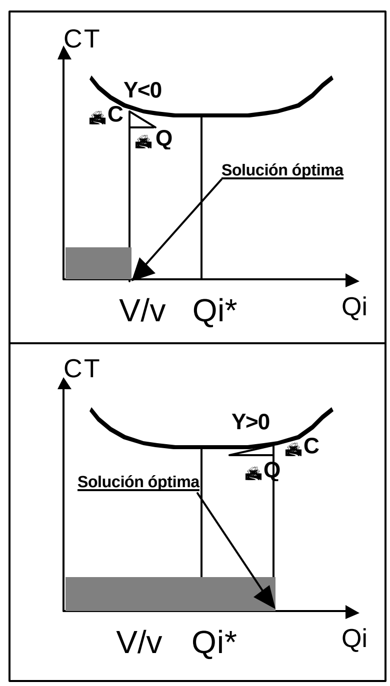


2º $X = 0$ (cumple (3) y (4))

De (2): $Q_i = \frac{V}{v}$ (coincide con la solución para la condición de =)

De (1): $Y = \frac{\frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - K \cdot \frac{D}{Q_i^2}}{v} = \frac{\frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - K \cdot \frac{D}{\left(\frac{V}{v}\right)^2}}{v}$ Si este valor cumple con (5) se tiene la solución optima sino se descarta la suposición $X = 0$.

Un análisis grafico similar al de la primera suposición muestra a que la solución optima corresponde al caso en que la máxima capacidad es inferior a Q_i^*. En este caso como se vio en 3.1.1 Y resulta negativo. La solución que se descarta corresponde a la situación en que la capacidad máxima es mayor que Q_i^*: saturar el recurso ($X = 0$) implica que Y es positivo. En este caso, si a un aumento del volumen disponible corresponde un incremento de costo. Dado que $v \cdot Q_i$ no debe igualar a V (como ocurre en 3.1.1), sino solo no debe excederlo, se puede disminuir el costo bajando Q_i: mientras Y sea positivo conviene seguir bajando Qi.. Al llegar a $Y = 0$ se tendrá el costo mínimo. (esta es la solución considerada en la 1º suposición). Se comprende ahora porque las condiciones de Kuhn y Tucker exigen $Y \leq 0$. No conviene saturar el recurso cuando el no saturarlo mejora el funcional ($Y > 0$). Conviene saturarlo cuando el no hacerlo empeora el funcional ($Y \leq 0$).



3.1.3 Modelo básico con restricciones de espacio ocupado (£) y capital promedio inmovilizado (£).

Hipótesis: a las del modelo expuesto en 3.1.2 se agrega:

11. El capital promedio inmovilizado en stock no puede exceder de TI $[TI] = \$$

Desarrollo: el modelo resulta:

$CT = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \dfrac{D}{Q_i}$ $\rightarrow$ Mínimo sujeto a $v \cdot Q_i \leq V$ y $\dfrac{1}{2} \cdot b \cdot Q_i \leq TI$

Si la condición fuera de máximo capital inmovilizado, seria: $b \cdot Q_i \leq TI$

Para convertir desigualdades en igualdades se agregan slacks:

$v \cdot Q_i + X_1 = V$; $\dfrac{1}{2} \cdot b \cdot Q_i + X_2 = TI$

Se forma el Lagrangiano:

$$L = b \cdot D + \tfrac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_i \cdot T + K \cdot \frac{D}{Q_i} - Y_1 \cdot (v \cdot Q_i + X_1 - V) - Y_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot Q_i + X_2 - TI \right)$$

Para que exista optimo deben cumplirse las condiciones de Kuhn y Tucker:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - K \cdot \frac{D}{Q_i^2} - Y_1 \cdot v - Y_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = - v \cdot Q_i - X_1 + V = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = - \frac{1}{2} \cdot b \cdot Q_i - X_2 + TI = 0 \qquad (3)$$

$$X_1 \geq 0 \qquad (4)$$

$$X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

$$Y_1 \leq 0 \qquad (6)$$

$$Y_2 \leq 0 \qquad (7)$$

$$X_1 \cdot Y_1 = 0 \qquad (8)$$

$$X_2 \cdot Y_2 = 0 \qquad (9)$$

Solución: El cumplimiento de (8) requiere $X_1 = 0$ o $Y_1 = 0$; el de (9), $X_2 = 0$ o $Y_2 = 0$.

La solución optima se tendrá para algunos de los casos siguientes:

I $Y_1 = Y_2 = 0$ **II** $Y_1 = X_2 = 0$ **III** $X_1 = Y_2 = 0$ **IV** $X_1 = X_2 = 0$

Se analiza cada una:

I $Y_1 = 0$ (cumple con (6) y (8)) $Y_2 = 0$ (cumple con (7) y (9))

De (1): $Q_i = \sqrt{\dfrac{2 \cdot K \cdot D}{c_1 \cdot T}}$

Se reemplaza en (2) y debe cumplirse (4)

Se reemplaza en (3) y debe cumplirse (5)

Si se cumplen ambas, se tiene la solución optima. Si no, se descarta la alternativa I.

II $Y_1 = 0$ (cumple con (6) y (8)) $X_2 = 0$ (cumple con (5) y (9))

De (3): $Q_i = \dfrac{2 \cdot TI}{b}$

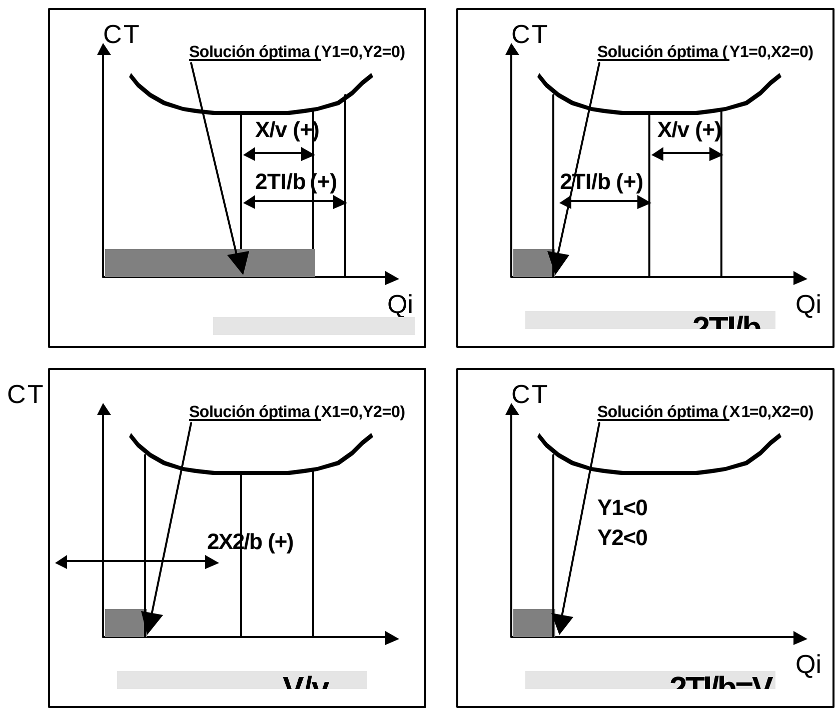
Se reemplaza en (2) y debe cumplirse (4)
Se reemplaza en (1) y debe cumplirse (7)
Si se cumplen ambas, se tiene la solución optima. Si no, se descarta la alternativa II.
III $X_1 = 0$ (cumple con (4) y (8)) $Y_2 = 0$ (cumple con (7) y (9))

De (2): $Q_i = \dfrac{V}{v}$

Se reemplaza en (3) y debe cumplirse (5)
Se reemplaza en (1) y debe cumplirse (7)
Si se cumplen ambas, se tiene la solución optima. Si no, se descarta la alternativa III.
IV $X_1 = 0$ (cumple con (4) y (8)) $X_2 = 0$ (cumple con (5) y (9))

De (2): $Q_i = \dfrac{V}{v}$ y de (3): $Q_i = \dfrac{2 \cdot TI}{b}$

Si ambos valores no coinciden, se descarta la alternativa IV.
Si da la casualidad que coinciden, se reemplaza en (1) y deben cumplirse (6) y (7).
Si se cumplen, se tiene la solución optima. Si no, se descarta la alternativa IV.



Se han graficado situaciones en las cuales, para cada una de las cuatro suposiciones iniciales, se obtiene una solución optima. Queda a cargo del alumno hallar, para cada suposición, alguna posible variante en la que también se tenga solución optima y las situaciones en las que la suposición inicial debe descartarse

3.1.4. Ejemplo

La empresa del ejemplo 1.4. desea considerar algunas restricciones que inicialmente no tuvo en cuenta.
Se sabe que cada unidad de producto ocupa 4 dm^3. La disponibilidad de espacio en deposito para almacenar ese producto es de 16 m^3. Se pide:

a) Determinar la cantidad de reposición para minimizar el costo total, suponiendo que se exige ocupar totalmente el espacio disponible al llegar cada partida
b) Calcular el costo total correspondiente
c) Determinar la variación de costo total que se produciría si se variase en 1 dm^3 en mas o en menos el espacio disponible (cumpliendo siempre la exigencia de ocuparlo totalmente)
d) Idem a), b) y c) si el espacio asignado al almacenamiento del producto fuese de 8 dm^3
e) Idem a), b) y c) si no se exige ocupar los 16 dm^3, pero no se puede superar ese valor
f) Idem e) con la disponibilidad de 8 dm^3
g) Idem e) agregando la condición de que el capital inmovilizado en stock, en promedio, no pase de 30,000$
h) Idem e) agregando la condición de que el capital inmovilizado en stock, en promedio, no pase de 40,000$
Solución:

a) (Es evidente que será $4\dfrac{dm^3}{u}\cdot Q_i = 16{,}000 dm^3 \Rightarrow Q_i = 4{,}000u$)

Por Lagrange: $CT = b\cdot D + \frac{1}{2}\cdot c_1\cdot Q_i\cdot T + K\cdot\dfrac{D}{Q_i}$

$$CT = 30\frac{\$}{u}\cdot 12{,}000u + \frac{1}{2}\cdot 0.25\frac{\$}{u\cdot mes}\cdot Q_i\cdot 1mes + 60\$\cdot\frac{12{,}000u}{Q_i}$$

$$CT = 360{,}000\$ + 0.125\frac{\$}{u}\cdot Q_i + \frac{720{,}000\$\cdot u}{Q_i}$$

Sujeta a $V = v\cdot Q_i = 4\dfrac{dm^3}{u}\cdot Q_i = 16{,}000 dm^3$

$$L = 360{,}000\$ + 0.125\frac{\$}{u}\cdot Q_i + \frac{720{,}000\$\cdot u}{Q_i} - Y\cdot\left(4\frac{dm^3}{u}\cdot Q_i - 16{,}000 dm^3\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0.125\frac{\$}{u} - \frac{720{,}000\$\cdot u}{Q_i} - Y\cdot 4\frac{dm^3}{u} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -4\frac{dm^3}{u}\cdot Q_i + 16{,}000 dm^3 = 0 \qquad (2) \Rightarrow Q_i = 4{,}000u$$

Reemplazando en (1): $Y = \dfrac{-\dfrac{720{,}000\$\cdot u}{(4{,}000u)^2} + 0.125\dfrac{\$}{u}}{4\dfrac{dm^3}{u}} = 0.02\dfrac{\$}{dm^3}$

b) $CT = 360{,}000\$ + 0.0125\dfrac{\$}{u}\cdot 4{,}000u + \dfrac{720{,}000\$\cdot u}{4{,}000u} = 360{,}680\$$

c) La variación de costo por unidad de incremento disponibilidad es $Y = 0.02\dfrac{\$}{dm^3}$: Si se incrementa el valor del volumen total a ocupar en 1 dm3, el costo total subirá 0.02$. Si se lo disminuye en 1 dm3, el costo bajara0.02$. (Resuelva el alumno el problema imponiendo la condición $v\cdot Q_i = 16{,}001 dm^3$ y compruebe que el costo total es

$CT = 360{,}680.02\$$; resuelva el alumno el problema imponiendo la condición $v \cdot Q_i = 15{,}999 dm^3$ y compruebe que el costo total es $CT = 360{,}679.98\$$.

d) Resuélvalo el alumno el problema y compruebe que:

$Q_i = 2{,}000u$; $\quad CT = 360{,}610\$$; $\quad Y = 0.01375 \dfrac{\$}{dm^3}$

e) (Si se tiene en cuenta que el optimo sin restricciones era cuando $Q_i^* = 2{,}400u$ y $4\dfrac{dm^3}{u} \cdot 2{,}400u = 9{,}600dm^3$ se concluye que la limitación no es restrictiva y la solución es la misma que en el ejemplo 1.4.)

El modelo será:

$$CT = 360{,}000\$ + 0.0125\frac{\$}{u} \cdot Q_i + \frac{720{,}000\$ \cdot u}{Q_i} \rightarrow \text{Mínimo sujeto a } 4\frac{dm^3}{u} \cdot Q_i \leq 16{,}000dm^3$$

La restricción se convierte en: $4\dfrac{dm^3}{u} \cdot Q_i + X = 16{,}000dm^3$

Se forma el Lagrangiano:

$$L = 360{,}000\$ + 0.0125\frac{\$}{u} \cdot Q_i + \frac{720{,}000\$ \cdot u}{Q_i} - Y \cdot \left(4\frac{dm^3}{u} + X - 16{,}000dm^3 \right)$$

Y se plantean las condiciones de Kuhn y Tucker:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = .0125\frac{\$}{u} - \frac{720{,}000\$ \cdot u}{Q_i} - Y \cdot 4\frac{dm^3}{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -4\frac{dm^3}{u} \cdot Q_i - X + 16{,}000dm^3 = 0 \quad (2)$$

$X \geq 0$ (3)

$Y \leq 0$ (4)

$X \cdot Y = 0$ (5)

El cumplimiento de (5) exige $X = 0$ o $Y = 0$

Se supone $Y = 0$ (cumple (4) y (5))

De (1): $Q_i = \sqrt{\dfrac{720{,}000\$ \cdot u}{0.125\dfrac{\$}{u}}} = 2{,}400u$

De (2): $X = 16{,}000dm^3 - 4\dfrac{dm^3}{u} \cdot 2{,}400u = 6{,}400dm^3$ cumple (3)

(Compruebe el alumno que suponer $X = 0$ lleva a $Q_i = 4{,}000u$ y a $Y = 0.02\dfrac{\$}{dm^3}$, que debe descartarse por no cumplir (4))

$Q_i = 2{,}400u$ es la cantidad de reposición que minimiza el costo total.

$$CT = 360{,}000\$ + 0.0125\frac{\$}{u} \cdot 2{,}400u + \frac{720{,}000\$ \cdot u}{2{,}400u} = 360{,}600\$$$

Como $Y = 0$, variar la disponibilidad de espacio no modifica el costo.

f) Resuélvalo el alumno y compruebe que la solución optima coincide con la del punto d), agregando $X = 0$ (recurso saturado) y que debe descartarse $Y = 0$ porque lleva a $Q_i = 2{,}400u$ y a $X = -16{,}000dm^3$

g) $CT = 360{,}000\$ + .0125\frac{\$}{u}\cdot Q_i + \frac{720{,}000\$\cdot u}{Q_i}$

Mínimo sujeto a $4\frac{dm^3}{u}\cdot Q_i \le 16{,}000dm^3$ y $\frac{1}{2}\cdot 30\frac{\$}{u}\cdot Q_i \le 30{,}000\$$

Se agregan slacks: $4\frac{dm^3}{u}\cdot Q_i + X_1 = 16{,}000dm^3$;

$\frac{1}{2}\cdot 30\frac{\$}{u}\cdot Q_i + X_2 = 30{,}000\$$

Se forma el Lagrangiano

$$L = 360{,}000\$ + 0.0125\frac{\$}{u}\cdot Q_i + \frac{720{,}000\$\cdot u}{Q_i} - Y_1\cdot\left(4\frac{dm^3}{u} + X_1 - 16{,}000dm^3\right) - Y_2\cdot\left(15\frac{\$}{u}\cdot Q_i + X_2 - 30{,}000\$\right)$$

Y se plantean las condiciones de Kuhn y Tucker:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = .0125\frac{\$}{u} - \frac{720{,}000\$\cdot u}{Q_i} - Y_1\cdot 4\frac{dm^3}{u} - Y_2\cdot 15\frac{\$}{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = -4\frac{dm^3}{u}\cdot Q_i - X_1 + 16{,}000dm^3 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = -15\frac{\$}{u}\cdot Q_i - X_2 + 30{,}000\$ = 0 \quad (3)$$

$X_1 \ge 0$ (4)

$Y_1 \le 0$ (5)

$X_1\cdot Y_1 = 0$ (6)

$X_2 \le 0$ (8)

$Y_2 \le 0$ (7)

$X_2\cdot Y_2 = 0$ (8)

Surgen cuatro posibilidades:

I $Y_1 = 0$ (cumple con (5) y (6)) $Y_2 = 0$ (cumple con (8) y (9))

De (1): $Q_i = \sqrt{\frac{720{,}000\$\cdot u}{0.125\frac{\$}{u}}} = 2{,}400u$

De (2) $X_1 = 16{,}000dm^3 - 4\frac{dm^3}{u}\cdot 2{,}400u = 6{,}400dm^3$ cumple (4)

De (3) $X_2 = 30{,}000\$ - 15\frac{\$}{u}\cdot 2{,}400u = -6{,}000\$$ no cumple (7)

II $Y_1 = 0$ (cumple con (5) y (6)) $X_2 = 0$ (cumple con (7) y (9))

De (3): $Q_i = \frac{30000\$}{15\frac{\$}{u}} = 2{,}000u$

De (2): $X_1 = 16{,}000dm^3 - 4\frac{dm^3}{u}\cdot 2{,}000u = 8{,}000dm^3$ cumple (4)

De (1): $Y_2 = \dfrac{0.125\dfrac{\$}{u} - \dfrac{720{,}000\$ \cdot u}{2{,}000u}}{15\dfrac{\$}{u}} = -0.003\overset{\frown}{6}\dfrac{\$}{\$}$ cumple (8)

Solución optima

III $X_1 = 0$ (cumple con (4) y (6)) $Y_2 = 0$ (cumple con (8) y (9))

De (2): $Q_i = \dfrac{16{,}000 dm^3}{4\dfrac{dm^3}{u}} = 4{,}000u$

De (3): $X_2 = 30{,}000\$ - 15\dfrac{\$}{u} \cdot 4{,}000u = -30{,}000u$ no cumple (7)

De (1): $Y_1 = \dfrac{0.125\dfrac{\$}{u} - \dfrac{720{,}000\$ \cdot u}{(4{,}000u)^2}}{4\dfrac{dm^3}{u}} = 0.02\dfrac{\$}{dm^3}$ no cumple (5)

IV $X_1 = 0$ (cumple con (4) y (6)) $X_2 = 0$ (cumple con (7) y (9))

De (2): $Q_i = \dfrac{16{,}000 dm^3}{4\dfrac{dm^3}{u}} = 4{,}000u$

De (3): $Q_i = \dfrac{30{,}000\$}{15\dfrac{\$}{u}} = 2{,}000u$ Soluciones incompatibles

h) Resuélvalo el alumno y compruebe que la solución coincide con la del caso sin restricciones ($Q_i = 2{,}400u$)

Se tiene:

$Y_1 = 0$; $Y_2 = 0$;

$X_1 = 6{,}400 dm^3$ (sobrante de espacio); $X_2 = 4{,}000\$$ (sobrante de capital)

3.2. RESTRICCIONES EN MODELOS MULTIPRODUCTO

3.2.1. Restricciones de igual

Se exponen dos ejemplos de modelos multiproducto con restricciones de igual. En ambos se quiere minimizar el costo total y se tiene una restricción expresada como igualdad. En un caso se impone un valor determinado para el capital promedio inmovilizado en stock y se trata de minimizar la cantidad de ordenes a emitir. En el otro se fija una cantidad de ordenes a emitir y se trata de minimizar el capital inmovilizado en stock.

Desde el punto de vista didáctico, se trata de dar un ejemplo de programación matemática con restricciones de igualdad (que vinculan entre si a los productos), para aplicar el método de Lagrange.

Desde el punto de vista practico debe pensarse en una empresa que ya estableció una política de stock y desea plantearse la posibilidad de disminuir el capital inmovilizado optimizando la asignación del capital que admite inmovilizar. Ambas situaciones son totalmente posibles y no debe pensarse que, en la realidad, todas las restricciones son desigualdades.

3.2.1.1. Capital Inmovilizado Fijo (TI)

Sea el caso de una empresa que maneja m productos, para cada uno de los cuales son validas las hipótesis del modelo básico y:

- El costo de almacenamiento c_{1j} de cada producto es el costo de oportunidad del capital inmovilizado en cada unidad de producto por unidad de tiempo. Se lo expresa como producto de una tasa de interés (i), por el costo unitario del producto: $C_{1j} = i \cdot b_j$
  (j = 1, 2, ..., m)
- Las ordenes de compra de los diversos productos tienen un mismo costo $k_j = k$ (j = 1, 2, ..., m)
- Se fija un valor determinado para el capital promedio inmovilizado en stock $\left(TI_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q_{ij} \right)$

Son datos: D_j, T, bj, i, k, TI (j = 1, 2, ..., m)

El costo de almacenar un producto j en el periodo de análisis T será: $CT_j = b_j \cdot D_j + \frac{1}{2} \cdot i \cdot b_j \cdot Q_{ij} \cdot T + K \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}}$ y para el conjunto de los m productos:

$$CT = \sum_{j=1}^{m} CT_j = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot i \cdot b_j \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} K \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}}$$

El primer término es el costo de adquisición de todos los productos demandados en el período T y es constante (no es función Q_{ij}).

El segundo término puede expresarse como: $i \cdot T \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot i \cdot b_j \cdot Q_{ij} = i \cdot T \cdot TI$, es el costo del capital inmovilizado y se expresa como producto de la tasa de interés, el tiempo y el capital promedio inmovilizado. Fijado TI, tampoco este término es función de Q_{ij}.

El último término si es función de Q_{ij}. Resulta así que minimizar el costo total queda reducido a minimizar la cantidad de ordenes a emitir.

El objetivo es minimizar $TO = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_{ij}}$ sujeto a $\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q_{ij} = TI$. Se resuelve aplicando Lagrange:

$L = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_j} - Y \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q_{ij} - TI \right)$ La condición de óptimo se obtiene igualando a 0 las derivadas parciales con respecto a las m variables Q_{ij} y con respecto a Y:

$\frac{\partial L}{\partial Q_{ij}} = -\frac{D_j}{Q_{ij}} - \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Y = 0$ (j = 1 a m) y $\frac{\partial L}{\partial Y} = -\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q_{ij} + TI = 0$

Las primeras m llevan a: $Q_{ij} = \sqrt{\frac{-2 \cdot D_j}{Y \cdot b_j}}$ y la última a $TI = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot Q_{ij}$

La determinación de los Q_{ij} exige conocer Y. Para vincular esta incógnita con TI puede hacerse lo siguiente:

Se parte de: $Q^*_{ij} = \sqrt{\frac{-2 \cdot D_j}{Y \cdot b_j}}$

Se multiplica por $\frac{1}{2} \cdot b_j$ y se obtiene $\frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q^*_{ij} = \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot \sqrt{\frac{-2 \cdot D_j}{Y \cdot b_j}}$

Se introducen factores: $\frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q^*_{ij} = \sqrt{\frac{-b_j \cdot D_j}{2 \cdot Y}}$

Se suman las m ecuaciones, se distribuye y se saca factor común: $\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q^*_{ij} = \frac{1}{\sqrt{-2 \cdot Y}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}$

Se reemplaza por TI $TI = \frac{1}{\sqrt{-2 \cdot Y}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}$

Y se despeja Y $Y = \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}\right]^2}{2 \cdot TI^2}$

Expresado en función de los datos, con ella se calculan las Qij, con lo que queda resuelto el problema.

Se buscará ahora vincular el total de ordenes con el capital inmovilizado:

$TO = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q^*_{ij}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{\sqrt{-\frac{2 \cdot D_j}{Y \cdot b_j}}} = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{-Y \cdot \frac{b_j \cdot D_j}{2}} = \sqrt{-Y} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}}{\sqrt{2}}$ Si se compara con la expresión obtenida antes para Y, se comprueba que $\frac{\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}}{\sqrt{2}} = \sqrt{-Y} \cdot TI$.

Reemplazando: $TO^* = \sqrt{-Y} \cdot \sqrt{-Y} \cdot TI = -Y \cdot TI$

Por último, es conveniente hallar la vinculación entre TO^* y TI, en función de los datos:

$TO^* = -Y \cdot TI$ pero $Y = \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}\right]^2}{2 \cdot TI^2}$ de donde: $TO^* = -\frac{\left[\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}\right]^2}{2 \cdot TI^2} \cdot TI$ y

resulta: $TO^* \cdot TI = \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}\right]^2}{2}$

Esta expresión se utilizará en las representaciones gráficas del punto 3.2.1.3

3.2.1.2. Total de órdenes fijo (TO)

Sea el caso anterior, pero reemplazando la restricción de capital promedio inmovilizado fijo por la de total de órdenes fijo ($TO = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_{ij}}$)

La expresión del costo total es la misma: $CT = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot i \cdot b_j \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} K \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}}$

El primer término, como antes, es constante. El tercero resulta $\sum_{j=1}^{m} K \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}} = K \cdot TO$; es el costo de ordenamiento, que resulta constante. El segundo es función de Q_{ij}.

Minimizar el costo total es minimizar el costo de almacenamiento y, por ser i y T constantes y positivos, es minimizar el capital promedio inmovilizado en stock. La función objetivo será entonces:

$TI = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q_{ij}$ sujeta a $\sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_{ij}} = TO$ se resuelve por Lagrange:

$$L = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q_{ij} - Y \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_{ij}} - TO \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{ij}} = \frac{1}{2} \cdot b_j + Y \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}} = 0 \Rightarrow Q_{ij} = \sqrt{-\frac{2 \cdot Y \cdot D_j}{b_j}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_{ij}} + TO = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_{ij}} = TO$$

Para obtener Y se procede de la misma manera que en el caso anterior:

$$\frac{1}{Q_{ij}} = \sqrt{-\frac{B_j}{2 \cdot Y \cdot D_j}} \qquad \frac{D_j}{Q_{ij}} = D_j \cdot \sqrt{-\frac{B_j}{2 \cdot Y \cdot D_j}}$$

$$\frac{D_j}{Q_{ij}} = \sqrt{-\frac{B_j \cdot D_j}{2 \cdot Y}} \qquad \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{-2 \cdot Y}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}$$

$$TO = \frac{1}{\sqrt{-2 \cdot Y}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j} \qquad Y = -\frac{\left(\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j} \right)^2}{2 \cdot TO^2}$$

Como Y es función de los datos, pueden hallarse las Q_{ij}.

Se vincula ahora TI^* con TO:

$$TI^* = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot \sqrt{-\frac{2 \cdot Y \cdot D_j}{b_j}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-2 \cdot Y} \cdot \sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}$$

$$TI^* = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-2 \cdot Y} \cdot \sqrt{-2 \cdot Y} \cdot TO = -Y \cdot TO$$

Por último, se vinculan TI^* y TO en función de los datos:

$$TI^* = -Y \cdot TO = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{b_j \cdot D_j}\right)^2}{2 \cdot TO^2} \cdot TO = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{b_j \cdot D_j}\right)^2}{2 \cdot TO}$$

De donde: $TI^* \cdot TO = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{b_j \cdot D_j}\right)^2}{2}$

3.2.1.3. Gráficos TI-TO

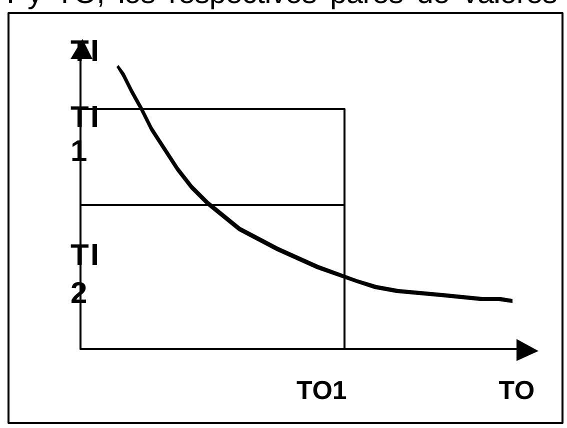
Para considerar la relación entre los dos modelos estudiados y el caso de optimización libre, es útil la representación en gráficos TI-TO.

En 3.2.1.1. se demostró que, fijando TI, el TO que minimiza el costo total es el mínimo TO^* que cumple la restricción, vinculándose ambos por $TI \cdot TO^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{b_j \cdot D_j}\right)^2$

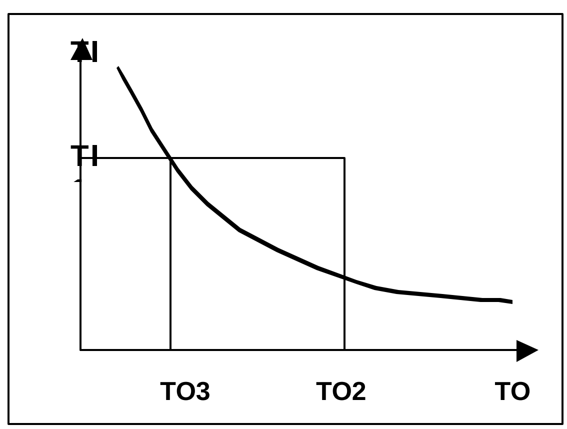
En 3.2.1.2. se demostró que, fijando TO, el TI que minimiza el costo total es el mínimo TI^* que cumple la restricción, vinculándose ambos por $TI^* \cdot TO = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m}\sqrt{b_j \cdot D_j}\right)^2$

Esto significa que, dados los m valores de b_j y de D_j si se fija cierto valor de TI, se puede obtener directamente valor óptimo de TO. Si se fija un valor de TO igual al obtenido, el TI óptimo que corresponde coincide con el inicial. Además, en un gráfico cartesiano en cuyos ejes se representen TI y TO, los respectivos pares de valores óptimos se encuentran en una hipérbola equilátera.

Los pares de valores que no corresponden a la solución óptima corresponden a puntos situados por encima de la hipérbola. Por ejemplo, dado un valor del total de órdenes TO_1, el mínimo costo total se obtiene minimizando el capital inmovilizado: su valor será TI_1; una solución no óptima llevará a un valor de TI mayor, por ejemplo TI_2.



Y si, por ejemplo, se fija un capital inmovilizado TI_3 el mínimo costo total se obtiene minimizando el total de ordenes: su valor será TO_3; una solución no óptima llevará a un valor de TO mayor, por ejemplo, TO_2.



Se considera ahora la posibilidad de indicar en el gráfico a que punto corresponden los valores de TI y TO que se obtienen optimizando sin restricciones.
Intuitivamente se puede decir que el par de valores también debe determinar un punto de la hipérbola: si se obtienen las Q_{ij} que optimizan el costo total sin restricciones y se calculan los valores de TI^* y TO^* correspondientes, es evidente que si se fija, por ejemplo, TI^*, el valor de TO que se obtenga del gráfico deberá ser TO^*.
Esto puede demostrarse de la siguiente manera:

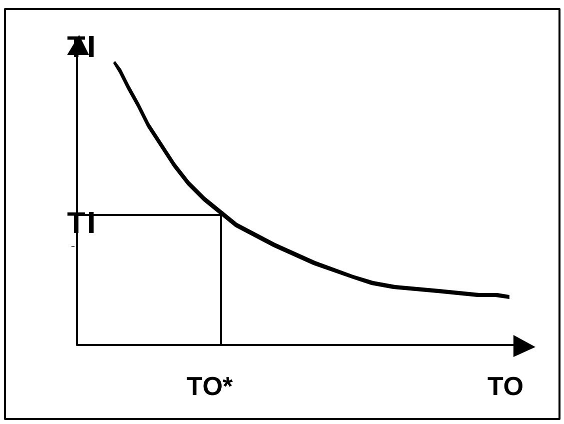
Cada Q_{ij} se obtiene con $Q^*_{ij} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot k \cdot D_j}{i \cdot b_j \cdot T}}$ (optimización sin restricciones)

El total inmovilizado será:

$$TI^* = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot b_j \cdot Q_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot b_j \cdot D_j}{i \cdot T}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{i \cdot T}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}$$

El total de órdenes será: $TO^* = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{Q_{ij}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{D_j}{\sqrt{\dfrac{2 \cdot k \cdot D_j}{i \cdot b_j \cdot T}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot i \cdot T}{k}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}$

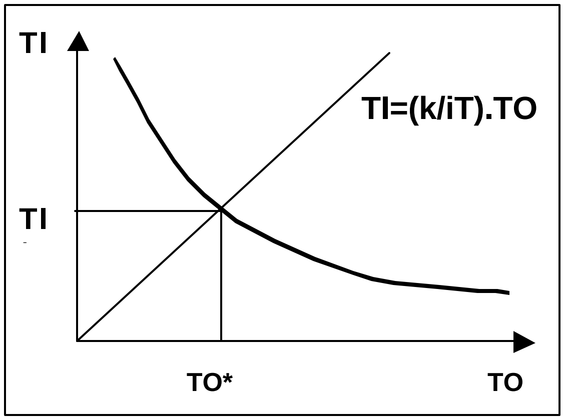
El producto resulta: $TI^* \cdot TO^* = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j} \right)^2$ (corresponde a un punto de la hipérbola)



Es obvio que, dados k, i, T y por supuesto, los bj y Dj pueden hallarse los valores de TI* y TO* con las expresiones deducidas, y ubicarse en el gráfico el punto que corresponde a la optimización sin restricciones.
Pero también se lo puede hacer por un sencillo procedimiento gráfico.
Si se hace el cociente:

$$\frac{TI^*}{TO^*} = \frac{\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot k}{i \cdot T}} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}}{\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot i \cdot T}{k}} \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j}} = \sqrt{\frac{k^2}{i^2 \cdot T^2}} = \frac{k}{i \cdot T}$$

se comprueba que el punto buscado se encuentra sobre la recta $TI^* = \dfrac{k}{i \cdot T} \cdot TO^*$ Si se traza una recta que pasa por el origen, de pendiente $\frac{k}{i \cdot T}$, la intersección con la hipérbola determinará el punto que corresponde a la optimización sin restricciones.



3.2.1.4. Ejemplo

La empresa del ejemplo 1.4. decide incluir en su estudio un segundo producto, cuya demanda mensual es de 9.000 unidades y su costo unitario 90$. El costo de adquisición de cada pedido es el mismo que para el primer producto. El costo de almacenamiento es el costo de oportunidad del capital inmovilizado con una tasa del 10% anual. Se pide:

a) Determinar las cantidades de reordenamiento, para ambos productos, que minimizan el costo total.
b) Determinar los respectivos períodos de reordenamiento.
c) Determinar el costo de adquisición total para ambos productos en conjunto.
d) Determinar el costo de ordenamiento total para ambos productos en conjunto.
e) Determinar el costo de almacenamiento total para ambos productos en conjunto.
f) Determinar el costo de total para ambos productos en conjunto.
g) Si la empresa decide que el capital promedio inmovilizado en stock debe ser 150.000$, determinar las cantidades a ordenar de cada producto para minimizar el costo total.
h) Determinar los respectivos períodos de reordenamiento.
i) Determinar la cantidad de órdenes mensuales que se deberán emitir.
j) Comprobar que se cumple $TI = -Y \cdot TO$
k) Si, en vez de fijarse el capital a inmovilizar, se impone la condición de emitir mensualmente 15 órdenes de compra, determinar las cantidades a ordenar de cada producto para minimizar el costo total.
l) Determinar los respectivos períodos de reordenamiento.
m) Determinar el capital total que, en promedio, se inmovilizará en stock.
n) Comprobar que se cumple $TO = -Y \cdot TI$
o) Verificar que las cantidades de TI y TO halladas para los casos propuestos en g y en k corresponden a puntos de la hipérbola $TI^* \cdot TO^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \sqrt{b_j \cdot D_j} \right)^2$
p) Obtener gráficamente los valores de TI y TO que corresponden a la optimización sin restricciones y verificar que coinciden con los calculados a partir de la solución de los puntos a y siguientes.

Solución:

Se agregan a los datos:

$D_2 = 9000u \qquad T = 1mes$

$k = 60\$ \qquad c_2 = 0.1\frac{\$}{\$\cdot año}\cdot 90\frac{\$}{u} = 9\frac{\$}{u\cdot 12meses} = 0.75\frac{\$}{u\cdot mes}$

a) $CT = b_1\cdot D_1 + \frac{1}{2}\cdot c_{11}\cdot Q_{i1}\cdot T + k\cdot\frac{D_1}{Q_{i1}} + b_2\cdot D_2 + \frac{1}{2}\cdot c_{12}\cdot Q_{i2}\cdot T + k\cdot\frac{D_2}{Q_{i2}}$

$$CT = 30\frac{\$}{u}\cdot 12.000u + \frac{1}{2}\cdot 0.25\frac{\$}{u\cdot mes}\cdot 1mes\cdot Q_{i1} + 60\$\cdot\frac{12.000u}{Q_{i1}} + 90\frac{\$}{u}\cdot 9.000u + \frac{1}{2}\cdot 0.75\frac{\$}{u\cdot mes}\cdot 1mes\cdot Q_{i2} + 60\$\cdot\frac{9.000u}{Q_{i2}}$$

$$CT = 360.000\$ + 0.125\frac{\$}{u}\cdot Q_{i1} + \frac{720.000\$\cdot u}{Q_{i1}} + 810.000\$ + 0.375\frac{\$}{u}\cdot Q_{i2} + \frac{540.000\$\cdot u}{Q_{i2}}$$

$$\frac{\partial CT}{\partial Q_{i1}} = 0.125\frac{\$}{u} - \frac{720.000\$\cdot u}{Q_{i1}^2} = 0 \Rightarrow Q_{i1} = \sqrt{\frac{720.000\$\cdot u}{0.125\frac{\$}{u}}} = 2.400u$$

$$\frac{\partial CT}{\partial Q_{i2}} = 0.375\frac{\$}{u} - \frac{540.000\$\cdot u}{Q_{i2}^2} = 0 \Rightarrow Q_{i2} = \sqrt{\frac{540.000\$\cdot u}{0.375\frac{\$}{u}}} = 1.200u$$

Nótese que ambos productos son independientes: optimizar el costo total es lo mismo que optimizar el costo de cada producto.

b) $\frac{D}{T} = \frac{Q_{i1}}{T_{i1}} \Rightarrow T_{i1} = Q_{i1}\cdot\frac{T}{D_1} = 2.400u\cdot\frac{1mes}{12.000u} = 0.2mes = 6días$

$\frac{D_2}{T} = \frac{Q_{i2}}{T_{i2}} \Rightarrow T_{i2} = Q_{i2}\cdot\frac{T}{D_2} = 1.200u\cdot\frac{1mes}{9.000u} = 0.1\hat{3}mes = 4días$

c) Costo de adquisición total: $= b_1\cdot D_1 + b_2\cdot D_2 = 360.000\$ + 810.000\$ = 1.170.000\$$

d) Costo de ordenamiento total $= k\cdot\frac{D_1}{Q_{i1}} + k\cdot\frac{D_2}{Q_{i2}} = \frac{720.000\$\cdot u}{2.400u} + \frac{540.000\$\cdot u}{1.200u} = 750\$$

e) Costo de almacenamiento total $= \frac{1}{2}\cdot c_{11}\cdot Q_{i1}\cdot T + \frac{1}{2}\cdot c_{12}\cdot Q_{i2}\cdot T = 0.125\frac{\$}{u}\cdot 2.400u + 0.375\frac{\$}{u}\cdot 1.200u = 750\$$

f) Costo total $= C_{adq} + C_{ord} + C_{alm} = 1.170.000\$ + 750\$ + 750\$ = 1.171.500\$$

g) Deben ser: $Q_{i1} = \sqrt{\frac{-2\cdot D_1}{Y\cdot b_1}}$ y $Q_{i2} = \sqrt{\frac{-2\cdot D_2}{Y\cdot b_2}}$ con $Y = -\frac{\left(\sqrt{b_1\cdot D_1} + \sqrt{b_2\cdot D_2}\right)^2}{2\cdot TI^2}$ con $TI = 150.000\$$

$$\therefore Y = -\frac{\left(\sqrt{30\frac{\$}{u}\cdot 12.000u} + \sqrt{90\frac{\$}{u}\cdot 9.000u}\right)^2}{2\cdot(150.000\$)^2} = -0.00005\frac{1}{\$}$$

$$\therefore Q_{i1} = \sqrt{\frac{2\cdot 12.000u}{0.00005\frac{1}{\$}\cdot 30\frac{\$}{u}}} = 4.000u \qquad Q_{i2} = \sqrt{\frac{2\cdot 9.000u}{0.00005\frac{1}{\$}\cdot 90\frac{\$}{u}}} = 2.000u$$

h) $\dfrac{D_1}{T} = \dfrac{Q_{i1}}{T_{i1}} \Rightarrow T_{i1} = Q_{i1} \cdot \dfrac{T}{D_1} = 4.000u \cdot \dfrac{1mes}{12.000u} = 0.\hat{3}mes = 10días$

$\dfrac{D_2}{T} = \dfrac{Q_{i2}}{T_{i2}} \Rightarrow T_{i2} = Q_{i2} \cdot \dfrac{T}{D_2} = 2.000u \cdot \dfrac{1mes}{9.000u} = 0.\hat{2}mes = 6.\hat{6}días$

i) $n_1 = \dfrac{D_1}{D_{i1}} = \dfrac{12.000u}{4.000u} = 3$ $\qquad n_2 = \dfrac{D_2}{D_{i2}} = \dfrac{9.000u}{2.000u} = 4.5$

$TO = n_1 + n_2 = 7{,}5$

j) $TI = 150.000\$$ $\qquad TO = 7{,}5$ $\qquad Y = -0{,}00005$

$TO = -y \cdot TI = -150.00 \cdot (-000005) = 7{,}5$ $\Rightarrow$ se verifica.

k) Deben ser: $Q_{i1} = \sqrt{\dfrac{-2 \cdot Y \cdot D_1}{b_1}}$ $\qquad Q_{i2} = \sqrt{\dfrac{-2 \cdot Y \cdot D_2}{b_2}}$

con $Y = -\dfrac{\left(\sqrt{b_1 \cdot D_1} + \sqrt{b_1 \cdot D_1}\right)^2}{2 \cdot TO^2}$ $\qquad TO = 15$

$$Y = -\frac{\left(\sqrt{30\frac{\$}{u} \cdot 12.000u} + \sqrt{90\frac{\$}{u} \cdot 9.000u}\right)^2}{2 \cdot 15^2} = -5.000\$$$

$\Rightarrow Q_{i1} = \sqrt{\dfrac{-2 \cdot 5.000\$ \cdot 12.000u}{30\frac{\$}{u}}} = 2.000u$ y $Q_{i2} = \sqrt{\dfrac{-2 \cdot 5.000\$ \cdot 9.000u}{90\frac{\$}{u}}} = 1.000u$

l) $T_{i1} = Q_{i1} \cdot \dfrac{T}{D_1} = 2.000u \cdot \dfrac{1mes}{12.000u} = 0.1\hat{6}mes = 5días$

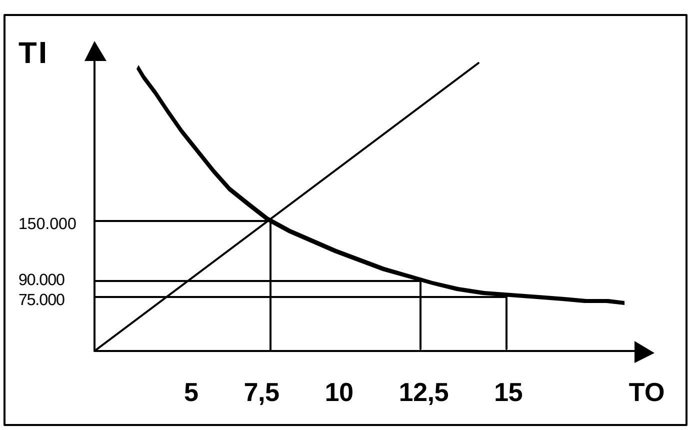
$T_{i2} = Q_{i2} \cdot \dfrac{T}{D_2} = 1.000u \cdot \dfrac{1mes}{9.000u} = 0.\hat{1}mes = 3.\hat{3}días$

m) $TI = \dfrac{1}{2} \cdot Q_{i1} \cdot b_1 + \dfrac{1}{2} \cdot Q_{i2} \cdot b_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2.000u \cdot 30\dfrac{\$}{u} + \dfrac{1}{2} \cdot 1.000u \cdot 90\dfrac{\$}{u} = 75.000\$$

n) $TO = 15$ $\qquad TI = 75.000\$$ $\qquad Y = -5.000\$$

$TI = -y \cdot TO = 5.000\$ \cdot 15 = 75.000\$$ se verifica

o) $TI \cdot TO = \dfrac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{2} \sqrt{b_j \cdot D_j}\right]^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{30\dfrac{\$}{u} \cdot 12.000u} + \sqrt{90\dfrac{\$}{u} \cdot 9.000u}\right]^2 = 1.125.00\$$



TO	TI($)	Comentarios
5.0	225.000	
7.5	150.000	Puntos g y j
10.0	112.500	
12.5	90.000	
15.0	75.000	Puntos k y n

p) Debe trazarse la recta: $TI = \frac{k}{i \cdot T} \cdot TO$ con $\frac{k}{i \cdot T} = \frac{60\$}{\frac{0{,}1\$ \cdot 1mes}{12mes}}$

$TI = 7.200\$ \cdot TO$

La intersección con la hipérbola corresponde a: $TO = 12.5$ y $TI = 90.000\$$

Verificación:

$$TO = \frac{D_1}{Q_{i1}} + \frac{D_2}{Q_{i2}} = \frac{12.000u}{2.400u} + \frac{9.000u}{1.200u} = 12.5$$

$$TI = \frac{1}{2} \cdot Q_{i1} \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot Q_{i2} \cdot b_2 = \frac{1}{2} \cdot 2.400u \cdot 30\frac{\$}{u} + \frac{1}{2} \cdot 1.200u \cdot 90\frac{\$}{u} = 90.000\$$$

Se verifica.

3.2.2. Restricciones de desigualdad

3.2.2.1. Limitación de espacio disponible

Sea nuevamente la empresa que maneja m productos, para los que se cumplen las hipótesis del modelo básico. Sean los datos: $D_j ; T ; c_{ij} ; k (j = 1......m)$

Supóngase una restricción de capacidad de almacenamiento: v_j es el espacio ocupado por cada unidad del producto j; el espacio total disponible, que no puede sobrepasarse, es: V

El objetivo, como en los demás casos, es minimizar el costo total.

El costo total, como en los casos anteriores, será:

$$CT = \sum_{j=1}^{m} CT_j = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} kj \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}}$$

La restricción será: $\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} \leq V$, que puede convertirse en igualdad $\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} + X = V$ (una ecuación para cada restricción).

El Lagrangiano resulta:

$$L = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{J=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} k \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}} - Y\left(\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} + X - V \right)$$

Las condiciones de Kuhn y Tucker para que exista el óptimo serán:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{ij}} = \sum_{J=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} k \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}^{2}} - Y \cdot v_j = 0 \text{ (m ecuaciones)} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} - X + V \qquad (2)$$

$$Y \leq 0 \qquad (3)$$

$X \geq 0$ (4)
$X \cdot Y = 0$ (5)
El cumplimiento de (5) exige $X = 0$ o $Y = 0$. Se analiza cada una de las alternativas.
a) $Y = 0$ (cumple 3 y 5).
De (1):

b) $$Q_{ij} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D_j}{C_{1j} \cdot T}} \quad \text{(j = 1 a m)}$$

De la (2) se obtiene:

c) $$X = V - \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij}$$

El valor obtenido debe cumplir (4). De ser así, se habrá encontrado la solución óptima. El caso corresponde a una limitación de espacio que no impide almacenar las Q_{ij} en la optimización sin restricciones. Un X positivo, como exige (4), es el espacio no utilizado (sobrante). $Y = 0$ significa que no existe costo marginal de la restricción: una variación de V (dentro de ciertos límites) no modifica la solución obtenida. Si el X obtenido no cumple (4), la suposición inicial ($Y = 0$) deberá descartarse. Esto significa que no existe suficiente espacio disponible para almacenar las Q_{ij} correspondientes a optimizar sin restricciones: la restricción de espacio obliga a modificar esos valores de las Q_{ij}, el recurso se saturará y no puede tener costo marginal nulo como se había supuesto inicialmente.

d) $X = 0$ (cumple 4 y 5).
De (2):

e) $$V = \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij}$$

De (1) $$k \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}^2} = \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot T - Y \cdot v_j \Rightarrow Q_{ij} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D_j}{C_{1j} \cdot T}}$$ (m ecuaciones)

Encontrar la solución óptima para esta posibilidad no es tan simple como en otros casos. No se puede, como en el caso de un producto (ver 3.1.2), obtener la solución posible de (2), reemplazar en (1), hallar Y y verificar si cumple $Y \leq 0$. Para un único producto (2) tiene solución única y tal procedimiento es correcto. Pero para varios productos se tiene una infinidad de conjuntos de valores que pueden cumplir (2), para cada solución factible de (2) debería reemplazarse en (1) (que no es una ecuación sola, si no m, una para cada producto) y hallarse Y : si los m valores de Y que se encuentran son iguales entre sí (nótese que Y es único) y cumplen (3), se tiene la solución. Es sumamente difícil aplicar con éxito este procedimiento.
Tampoco es posible recurrir al procedimiento utilizado en 3.2.1.1 y 3.2.1.2 para vincular Y con V : aunque cada valor de Q_{ij} se multiplicase por su respectivo v_j y se sumasen todas m a m, no se podría despejar Y : es imprescindible que sea factor en la expresión de Q_{ij} para poder sacar factor común de la sumatoria. Como Y es parte de un término, no se puede usar ese método.

Lo que puede hacerse es un procedimiento de “tanteo”. Dar diversos valores a Y (que cumplan 3), para cada uno hallar los respectivos Q_{ij} y reemplazar en (2 hasta que se cumpla la igualdad.
Es relativamente fácil hallar la solución: para un valor de Y determinado se obtienen ciertos Q_{ij} y un valor de $\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij}$. Si este valor supera a V, debe incrementarse el valor absoluto de Y: los nuevos Q_{ij} serán menores, por lo que $\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij}$ será menor. Si todavía supera a V, se sigue incrementando el valor absoluto de Y. Si la sumatoria resulta inferior a V debe disminuirse el valor absoluto de Y: los nuevos Q_{ij} resultaran mayores.
Discutida la solución matemática de la alternativa $X = 0$, resta exponer su interpretación. Suponer $X = 0$ es admitir que se utiliza todo el espacio disponible. La exigencia $Y \leq 0$ (condición 3) impuesta al valor de Y con que se calculan los Q_{ij} significa que el costo marginal del recurso es negativo. Si se incrementase el espacio total disponible V se podrían incrementar los Q_{ij}, disminuyendo el costo total.

Si no es posible hallar un valor negativo de Y para el que se determinen Q_{ij} que saturen V, y sólo un valor positivo de Y permite saturar el recurso, debe descartarse la suposición inicial ($X = 0$). El motivo matemático es que no se cumple la condición (3). Esto se interpreta de la siguiente manera: si un valor positivo de Y permite saturar el recurso, el costo marginal del recurso es positivo; incrementar el espacio disponible, si se lo ocupa totalmente, sube el costo, pero ocupar menos espacio baja el costo. No se tendrá el costo mínimo saturando el recurso, sino dejando parte de él sin ocupar. Evidentemente, el caso del que se hable es aquél en que se dispone de mayor espacio que el necesario para optimizar sin restricciones por eso se descarta la suposición de saturar el recurso y se considera la primera alternativa ($Y = 0$).

3.2.2.2 Ejemplo:

Considerar para el ejemplo 3.2.1.4, que existe una restricción del espacio disponible para almacenamiento. Cada unidad del primer producto ocupa 4 dm3 y cada unidad del segundo , 3 dm3. Se dispone de una capacidad de almacenamiento de 7,5 m3. Se pide:

a) Determinar si esta restricción obligará o no a modificar las cantidades de reordenamiento obtenidas al suponer la ausencia de restricciones.
b) Graficar curvas isocosto para el conjunto de ambos productos.
c) Indicar en el gráfico la solución sin restricciones y hallar la solución con la restricción de espacio.
d) Resolver analíticamente.
e) Resolver gráficamente y analíticamente suponiendo que la restricción de espacio fuera de 16 m3.

Solución:

a) En 3.2.1.4 (a) se determinaron Qi1=2400u y Qi2=1200u.
   El espacio requerido será:

$$v1.Qi1 + v2.Qi2 = \frac{4dm3}{u}.2400u + \frac{3dm3}{u}.1200u = 13200dm3$$

   La restricción de espacio disponible (V=7,5 m3) obligará a modificar la solución.

b) CT = CT1 + CT2 ;

$$CT1 = 30\,{}^{\$}\!/\!_{u}.12.000u + 0{,}125\,{}^{\$}\!/\!_{u}.Qi1 + \frac{720.000\$u}{Qi1};$$

$$CT2 = 90\,{}^{\$}\!/\!_{u}.9.000u + 0{,}375\,{}^{\$}\!/\!_{u}.Qi2 + \frac{540.000\$u}{Qi2};$$

   Se determinan CT1 y CT2 para diversos valores de Qi. Luego se obtiene CT=CT1+CT2 para cada par de valores de Qi1 y Qi2:

Qi	CT1	CT2
500	$ 361.502,5	$ 811.267,5
1000	$ 360.845,0	$ 810.915,0
1500	$ 360.667,5	$ 810.922,5
2000	$ 360.610,0	$ 811.020,0
2500	$ 360.600,5	$ 811.153,5
3000	$ 360.615,0	$ 811.305,0
3500	$ 360.643,2	$ 811.466,8
4000	$ 360.680,0	$ 811.635,0

Qi1/Qi2	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
500	$ 1.172.770,0	$ 1.172.417,5	$ 1.172.425,0	$ 1.172.522,5	$ 1.172.656,0	$ 1.172.807,5	$ 1.172.969,3	$ 1.173.137,5
1000	$ 1.172.112,5	$ 1.171.760,0	$ 1.171.767,5	$ 1.171.865,0	$ 1.171.998,5	$ 1.172.150,0	$ 1.172.311,8	$ 1.172.480,0
1500	$ 1.171.935,0	$ 1.171.582,5	$ 1.171.590,0	$ 1.171.687,5	$ 1.171.821,0	$ 1.171.972,5	$ 1.172.134,3	$ 1.172.302,5
2000	$ 1.171.877,5	$ 1.171.525,0	$ 1.171.532,5	$ 1.171.630,0	$ 1.171.763,5	$ 1.171.915,0	$ 1.172.076,8	$ 1.172.245,0
2500	$ 1.171.868,0	$ 1.171.515,5	$ 1.171.523,0	$ 1.171.620,5	$ 1.171.754,0	$ 1.171.905,5	$ 1.172.067,3	$ 1.172.235,5
3000	$ 1.171.882,5	$ 1.171.530,0	$ 1.171.537,5	$ 1.171.635,0	$ 1.171.768,5	$ 1.171.920,0	$ 1.172.081,8	$ 1.172.250,0
3500	$ 1.171.910,7	$ 1.171.558,2	$ 1.171.565,7	$ 1.171.663,2	$ 1.171.796,7	$ 1.171.948,2	$ 1.172.110,0	$ 1.172.278,2
4000	$ 1.171.947,5	$ 1.171.595,0	$ 1.171.602,5	$ 1.171.700,0	$ 1.171.833,5	$ 1.171.985,0	$ 1.172.146,8	$ 1.172.315,0

c) La solución sin restricciones corresponde a:

Qi1=2400, Qi2=1200; CT= 1.171.500$

La restricción de espacio puede expresarse como:

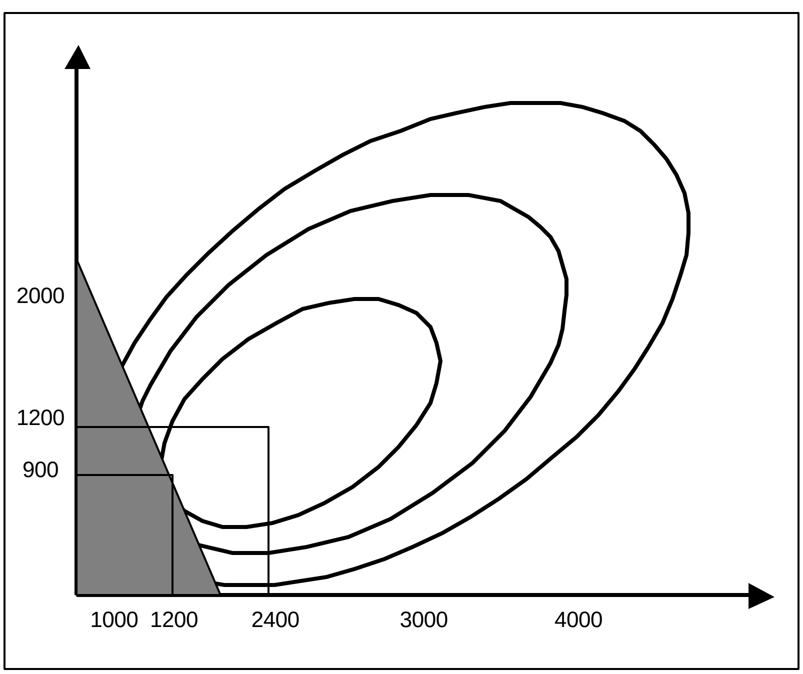
$$v1.Qi1 + v2.Qi2 \leq V$$

$$\frac{Qi1}{\frac{V}{v1}} + \frac{Qi2}{\frac{V}{v2}} \leq 1$$

$$\frac{Qi1}{\frac{7500dm3}{4dm3/u}} + \frac{Qi2}{\frac{7500dm3}{3dm3/u}} \leq 1$$

Del gráfico se ve que el mínimo costo corresponde a:

Qi1= 1200u ; Qi2=900u y CT=1.171.700$



d) CT= 360000$ +0.125 $/u. Qi1+ 720000$u/Qi1+810.000$+0.375$/u.Qi2+540000$u/Qi2

Sujeto a: $v1.Qi1 + v2.Qi2 \leq V$

Se expresa la restricción como igualdad: $4dm3/u.Qi1 + 3dm3/u.Qi2 + X = 7500dm3$
Y se forma el Lagrangiano:

$$L = 360000\$ + 0.125\$/u.\,Qi1 + 720000\$u/Qi1 + 810.000\$ + 0.375\$/u.Qi2 + 540000\$u/Q2 - y(4dm3/u.Qi1 + 3dm3/u.Qi2 + X - 7500dm3)$$

Se plantean las condiciones de Kuhn y Tucker:

$$\partial L/\partial Qi1 = 0.125\$/u.\,Qi1 + 720000\$u/(Qi1)^2 - y.4dm3/u = 0$$

$$\partial L/\partial Qi2 = 0.375\,\$/u.\,Qi2 + 540000\$u/(Qi2)^2 - y.3dm3/u = 0$$

$$\partial L/\partial y = -4dm3/u.\,Qi1 - 3dm3/u.\,Qi2 - X + 7500dm3 = 0$$

$$X \geq 0 \qquad y \leq 0 \qquad X.y = 0$$

el cumplimiento de esta última restricción exige que X=0 o y=0

I. y=0 (cumple con 5 y con 6)

De 1: $Qi1 = \sqrt{\dfrac{720000\,\$u}{0{,}125\$/u}} = 2400\,u$

De 2: $Qi2 = \sqrt{\dfrac{540000\,\$u}{0{,}375\,\$/u}} = 1200\,u$

De 3: X=7500dm3-4dm3/u.2400u-3dm3/u.1200u=-5700u
No se cumple 4. Se descarta la suposición I. Nótese que este planteo formal coincide con el análisis intuitivo del punto a).

II. X=0 (cumple con 4 y 5).

De 3: 4dm3/u. Qi1+3dm3/u. Qi2= 7500dm3

De 1: $Qi1 = \sqrt{\dfrac{720000\,\$u}{0{,}125\,\$/u - y.4dm3/u}}$

De 2: $Qi2 = \sqrt{\dfrac{540000\,\$u}{0{,}375\$/u - y.3dm3/u}}$

Debe tantearse para valores negativos de y (con I se descartó Y=0).

y	Qi1	Qi2	4dm3/u. Qi1+ 3dm3/u. Qi2
-0,01	2088	1154	11814
-0,02	1874	1114	10838
-0,03	1714	1077	10087
-0,04	1589	1044	9488
-0,05	1488	1014	8994
-0,06	1404	986	8574
-0,07	1333	960	8212
-0,08	1271	937	7895
-0,09	1218	914	7614
-0,091	1213	912	7588
-0,092	1208	910	7562
-0,093	1207	908	7552
-0,094	1198	906	7514
-0,095	1194	904	7488

La solución óptima aproximada es:
Y: entre –0.094 y –0.095: si la disponibilidad de espacio se aumenta en 1dm3, el costo disminuirá en 9,4 centavos. Si se disminuye la disponibilidad en 1dm3, el costo aumentará en 9,4 centavos.

e) Resuélvalo el alumno y compruebe que la solución coincide con la del problema sin restricciones:
Qi1=2400u Qi2=1200 u y=0 (el costo no varía si se modifica la disponibilidad).

3.2.2.3 Limitación del tiempo disponible para lanzar órdenes de producción:
Sea otra vez la empresa que maneja m productos para los que se cumplen las hipótesis del modelo básico. Sean los datos: Dj, T, C1j, Kj (j=1....m)
Supóngase una restricción del tiempo disponible para el lanzamiento de ordenes de producción (o de compra): cada una requiere un tiempo aj y el tiempo total disponible, que no puede sobrepasarse, es A.
El objetivo, como en los casos anteriores, es minimizar el costo total.

El costo total será $CT = \sum_{j=1}^{m} CT_j = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} kj \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}}$

La cantidad de órdenes emitidas en el período T es, para un producto: Dj/Qij y el tiempo insumido aj Dj/Qij, la restricción resulta: $\sum_{j=1}^{m} ajDj/Qij \le A$, que puede convertirse en igualdad : $\sum_{j=1}^{m} ajDj/Qij + X = A$

El Lagrangiano será: $L = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{J=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} k \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}} - Y\left(\sum_{j=1}^{m} aj \cdot \frac{Dj}{Qij} + X - A \right)$

Las condiciones de Kuhn y Tucker para que exista óptimo serán:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{ij}} = \sum_{J=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} kj \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}^{\ 2}} + Y \cdot aj \frac{Dj}{Qij} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = -\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \frac{Dj}{Qij} - X + A = 0$$

Y≤0

X≥0

X.Y=0

El cumplimiento de 5 exige X=0 o Y=0. Se analiza cada una:

- Y=0 (cumple 3 y 5)

De 1 $Qij = \sqrt{\frac{2KjDj}{C1jT}}$ (j=1 a m). De 2 $X = A - \sum_{j=1}^{m} aj \frac{Dj}{Qij}$

El valor obtenido para X debe cumplir 4. De ser así se tendrá la solución óptima, lo que significa que el tiempo disponible no impide emitir la cantidad de órdenes que corresponde a la optimización sin restricciones. El valor de X es el tiempo sobrante. Y=0, como siempre, significa que el recurso no saturado no tiene costo marginal.
Si el valor obtenido para X no cumple 4 debe descartarse la suposición inicial (Y=0): el recurso deberá estar saturado y no tendrá costo marginal nulo.

- X=0 (cumple 4 y 5)

De 2 : $\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \frac{Dj}{Qij} = A$. Nuevamente deberá recurrirse a un procedimiento “de tanteo”.

De 1: $Qij = \sqrt{\frac{2(KjDj - YajDj)}{C1jT}}$ se darán valores a Y (que cumplan 3) hasta llegar a un conjunto de Qij que satisfagan 2.

Obsérvese que, para Y=0, los Qij corresponden, como se vio arriba, a optimizar sin restricciones (si estos Qij hacen que $\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \frac{Dj}{Qij}$ no supere el tiempo disponible A ya se tiene la solución). Si la expresión excede a A deberá suponerse un valor negativo de Y, que dará un conjunto de Qij **mayores** que antes, con lo que $\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \frac{Dj}{Qij}$ **disminuirá**.

Se seguirá incrementando el **valor absoluto** de Y hasta que $\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \frac{Dj}{Qij}$ iguale a A. Si, al tantear se da un valor negativo de Y tal que se determinen Qij para los cuales $\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \frac{Dj}{Qij}$ resulta inferior a A, deberá buscarse un valor de Y cuyo **valor absoluto** sea un poco menor. De este modo se llega rápidamente a la solución.

3.2.2.4. Ejemplo

Considerar para el ejemplo 3.2.1.4 que existe una restricción del tiempo disponible para emitir órdenes. Cada orden del primer producto requiere 10 hs y cada orden del segundo, 20 hs. Se dispone de 150 hs mensuales para emitir ordenes.

a) Determinar si esta restricción obligará o no a modificar las cantidades de reordenamiento obtenidas al suponer la ausencia de restricciones.
b) Utilizando el gráfico obtenido en 3.2.2.2 hallar la solución con la restricción de tiempo.
c) Resolver analíticamente.
d) Resolver gráfica y analíticamente suponiendo que el tiempo disponible es de 300 hs mensuales.

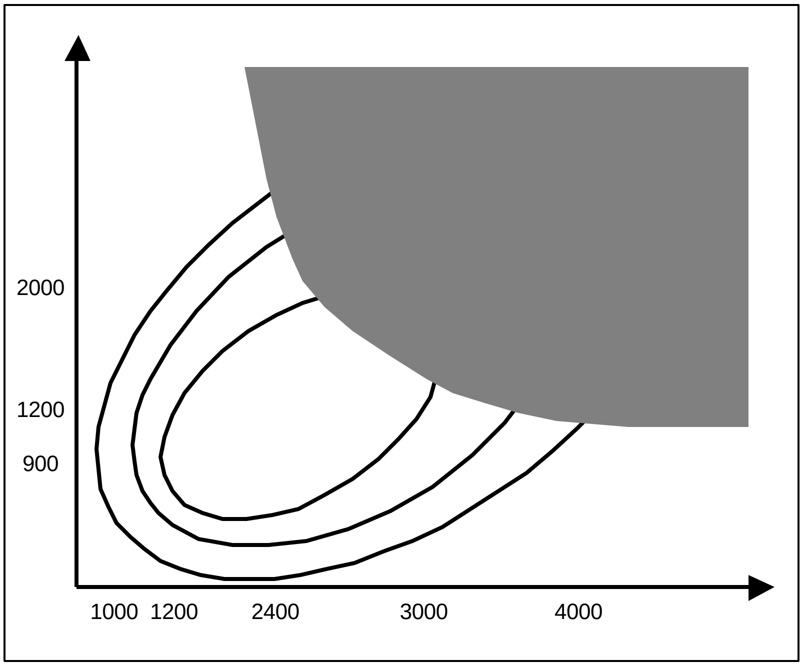
a) En 3.2.1.4 (a) se determinaron Qi1= 2400 u Qi2= 1200 u (para optimizar sin restricciones)

El tiempo requerido será:

$$a1\frac{D1}{Qi1} + a2\frac{D2}{Qi2} = 10hs\frac{12000u/mes}{2400u} + 20hs\frac{9000u/mes}{1200u} = 200hs$$

La restricción de tiempo disponible (150 hs) obliga a modificar la solución.

b) Se determinan puntos pertenecientes a la hipérbola que representa el límite de la restricción. Estos puntos y los correspondientes a Qij **mayores** (por estar los Qij en el denominador y ser restricción de ≤) corresponden al conjunto de soluciones factibles. Se superpone esta región en la gráfica anterior.



c) CT= 360000$ +0.125 $/u. Qi1+ 720000$u/Qi1+810.000$+0.375$/u.Qi2+540000$u/Qi2

Sujeto a $a1\frac{D1}{Qi1} + a2\frac{D2}{Qi2} = 10hs\frac{12000u/mes}{Qi1} + 20hs\frac{9000u/mes}{Qi2} \leq 150hs$

Se expresa la restricción como igualdad:

$$10hs\frac{12000u/mes}{Qi1} + 20hs\frac{9000u/mes}{Qi2} + X = 150hs$$

Se forma el Lagrangiano:

$$L = 360000\$ + 0.125\ \$/u.Qi1 + \frac{720000}{Qi1} + 810.000\$ + 0.375\$/u.Qi2 + \frac{540000}{Qi2} - y(\frac{120000}{Qi1} + \frac{180000}{Qi2} + X - 150hs)$$

Y se plantean las condiciones de Kuhn y Tucker:

$$\partial L/\partial Qi1 = 0.125\$/u.\,Qi1 + \frac{720000}{(Qi1)^2} + y\frac{120000hu/mes}{(Qi1)^2} = 0$$

$$\partial L/\partial Qi2 = 0.375\$/u.\,Qi2 + \frac{540000}{(Qi2)^2} + y\frac{180000hu/mes}{(Qi2)^2} = 0$$

$$\partial L/\partial y = \frac{-120000\text{hu/mes}}{\text{Qi1}} + \frac{-180000\text{hu/mes}}{\text{Qi2}} - X + 150hs = 0$$

$$X \geq 0 \qquad y \leq 0 \qquad X.y = 0$$

El cumplimiento de 6 exige X=0 o Y=0

- Y=0 (cumple5 y 6)

De 1: $Qi1 = \sqrt{\dfrac{120000\,\$u}{0{,}125\$/u}} = 2400u$

De 2: $Qi2 = \sqrt{\dfrac{540000\,\$u}{0{,}375\$/u}} = 1200u$

De 3: $X = 150\,hs/mes - \dfrac{120000\,hu/mes}{2400u} - \dfrac{180000\,hu/mes}{1200u} = -50h/mes$

No cumple 4, se descarta.

Esta alternativa se había planteado intuitivamente en (a).

- X=0 (cumple 4 y 6)

De 3: $\dfrac{120000\ \ hu\ /mes}{Qi1} - \dfrac{180000\ \ hu\ /mes}{Qi2} = 150\ h/mes$

De 1: $Qi1 = \sqrt{\dfrac{720000\,\$u - Y.120000\,hs.u.mes}{0{,}125\$/u}}$

De 2: $Qi2 = \sqrt{\dfrac{540000\,\$u - Y.180000\,hs.u.mes}{0{,}375\$/u}}$

Deben tantearse valores negativos de Y (con I se descartó Y=0).

Y $/(h/mes)	Qi1 (u)	Qi2 (u)	120000/Qi1+180000/Qi2
-1	2592.29	1385.64	176.19
-2	2771.28	1549.19	159.49
-3	2939.38	1697.05	146.89
-2.6	2873.32	1639.51	151.55
-2.7	2889.98	1654.08	150.34
-2.8	2906.54	1668.53	149.16

d) Resuélvalo el alumno y compruebe que la solución coincide con la optimización sin restricciones:

   Qi1= 1200u Qi2=1200u X=100h/mes Y=0

3.2.2.5 Limitación simultánea de espacio disponible y de tiempo para emitir órdenes.

Supóngase la existencia simultánea de las restricciones consideradas en 3.2.2.1 y 3.2.2.3

El costo total será: $CT = \sum_{j=1}^{m} CT_j = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} kj \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}}$

Las restricciones: $\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} \leq V \qquad \sum_{j=1}^{m} ajDj / Qij \leq A$

Expresadas como igualdades: $\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} + X = V \qquad \sum_{j=1}^{m} ajDj / Qij + X = A$

El Lagrangiano resulta:

$$L = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot D_j + \sum_{J=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot Q_{ij} \cdot T + \sum_{j=1}^{m} k \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}} - Y1\left(\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} + X - V \right) - Y2\left(\sum_{j=1}^{m} aj \cdot \frac{Dj}{Qij} + X - A \right)$$

Y las condiciones de Kuhn y Tucker:

1) $\frac{\partial L}{\partial Q_{ij}} = \frac{1}{2} \cdot C_{1j} \cdot T + k \cdot \frac{D_j}{Q_{ij}} - Y1.vj + Y2 \cdot aj \frac{Dj}{Qij} = 0$

2) $\frac{\partial L}{\partial Y1} = -\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} - X + V = 0$

3) $\frac{\partial L}{\partial Y2} = -\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \frac{Dj}{Qij} - X + A = 0$

4)Y1≤0

5)Y2≤0

6)X1≥0

7)X2≥0

8)X1.Y1=0

9)X2.Y2=0

El cumplimiento de 8 exige X1=0 o Y1=0. El cumplimiento de 9 exige X2=0 o Y2=0. Surgen cuatro alternativas.

I. Y1=0, Y2=0

De 1: $Qij = \sqrt{\dfrac{2KDj}{C1jT}}$ Reemplazando en 2 se obtiene X1, que debe cumplir 6. Reemplazando en 3 se obtiene X2, que debe cumplir 7.

II. X1=0, Y2=0 (cumple 5, 6 , 8 y 9)

De 1: $1/2.C1j.T - k\dfrac{Dj}{Qij^2} - Y1.vj = 0$

De 2: $\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} = V$

Deben tantearse valores de Y1 hasta hallar los Qij que verifiquen 2. Una vez hallados, reemplazar en 3 y hallar el valor de X2, que debe cumplir 7.

III. Y1=0, X2=0 (cumplen 4, 7, 8 y 9)

De 1: $1/2.C1j.T - k\dfrac{Dj}{Qij^2} + Y2.aj\dfrac{Dj}{Qij^2} = 0$

De 3: $\sum_{j=1}^{m} ajDj/Qij = A$

Deben tantearse valores de Y2 hasta hallar los Qij que verifiquen 3. Una vez hallados, reemplazar en 2 y hallar el valor de X1, que debe cumplir 6.

IV. X1=0, X2=0 (cumplen 6, 7, 8 y 9)

De 2: $\sum_{j=1}^{m} v_j \cdot Q_{ij} = V$

De 3: $\sum_{j=1}^{m} ajDj/Qij = A$

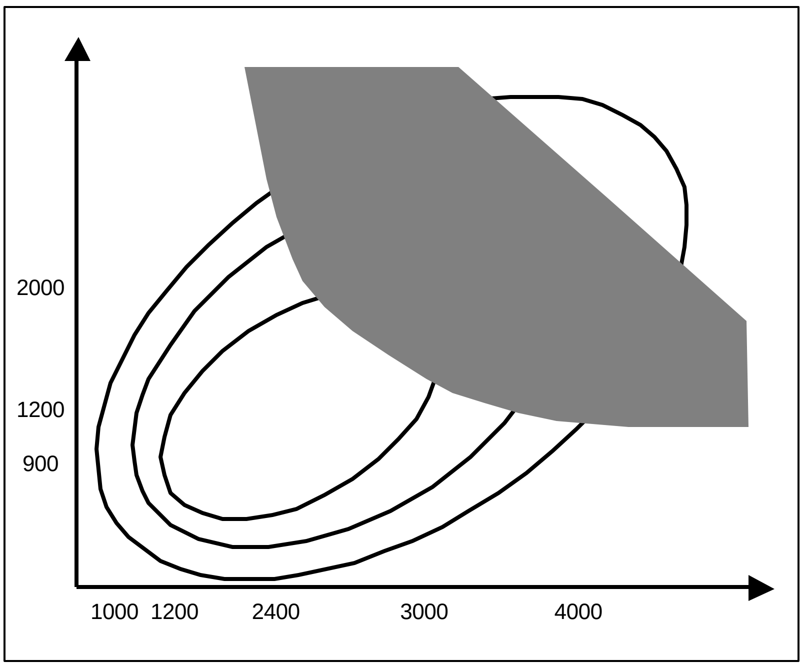
Hallados los Qij que cumplen ambas condiciones, se obtienen de las 1 los valores de Y1 e Y2. Estos valores deben cumplir 4 y 5.

3.2.2.6 Ejemplo.

Considerar que, en el ejemplo 3.2.2.4 se agrega a la restricción de tiempo para emitir ordenes, una limitación del espacio de almacenamiento: se disponen de 24m3, cada unidad ocupa 4dm3 para el primer producto y 3dm3 para el segundo.

a) Resolver gráficamente.
b) Resolver analíticamente.

a) La factible es la intersección de la obtenida en 3.2.2.4 y el semiplano que tiene por borde a la recta 4Qi1+3Qi2≤24000.
   La solución óptima coincide con la de 3.2.2.4. Aproximadamente: Qi1= 3000u y Qi2=1636u.



b) CT= 360000$ +0.125 $/u. Qi1+ 720000$u/Qi1+810.000$+0.375$/u.Qi2+540000$u/Qi2

Sujeto a: $4dm3/u.Qi1 + 3dm3/u.Qi2 \leq 24000dm3$

Y a: $\dfrac{120000hu/mes}{Qi1} + \dfrac{180000hu/mes}{Qi2} \leq 150h/mes$

Se expresan las restricciones como igualdades:

$4dm3/u.Qi1 + 3dm3/u.Qi2 + X1 = 24000dm3$

$$\frac{120000 hu/mes}{Qi1} + \frac{180000 hu/mes}{Qi2} + X2 = 150 h/mes$$

Se forma el Lagrangiano:

$$L = 360000 + 0.125.\,Qi1 + \frac{720000}{Qi1} + 810.000 + 0.375.Qi2 + \frac{540000}{Qi2} - Y1(4Qi1 + 3Qi2 + X1 - 24000) - Y2(\frac{120000}{Qi1} + \frac{180000}{Qi2} + X - 150hs)$$

Y se plantean las condiciones de Kuhn y Tucker:

1) $\partial L/\partial Qi1 = 0.125\ \$/u.\ Qi1 + \frac{720000}{(Qi1)^2} - Y1.4 + Y2\frac{120000 hu/mes}{(Qi1)^2} = 0$

2) $\partial L/\partial Qi2 = 0.375\ \$/u.\ Qi2 + \frac{540000}{(Qi2)^2} - Y1.3 + Y2\frac{180000 hu/mes}{(Qi2)^2} = 0$

3) $\partial L/\partial Y1 = -4Qi1 - 3Qi2 + X1 + 24000 = 0$

4) $\partial L/\partial Y2 = \frac{-120000 hu/mes}{Qi1} + \frac{-180000 hu/mes}{Qi2} - X2 + 150hs = 0$

5) $Y1 \le 0$

6) $Y2 \le 0$

7) $X1 \ge 0$

8) $X2 \ge 0$

9) $X1.Y1=0$

10) $X2.Y2=0$

El cumplimiento de 9 exige X1=0 o Y1=0.
El cumplimiento de 10 exige X2=0 o Y2=0.

I. Y1=0, Y2=0 cumple 5, 6, 9 y 10.

De 1: $Qi1 = \sqrt{\frac{120000\,\$u}{0{,}125\,\$/u}} = 2400u$

De 2: $Qi\,2 = \sqrt{\dfrac{540000\,\$u}{0{,}375\,\$/u}} = 1200u$

De 3: X1=10800dm^3 cumple 7.

De 4: X2=-50h/mes no cumple 8.

La interpretación de esta alternativa es obvia: suponer que los costos marginales de ambos recursos son nulos significa que para ambos, hay sobrante (no están saturados), por eso la solución debe coincidir con la optimización sin restricciones. Las cantidades de reordenamiento deberían cumplir con ambas restricciones. Como hay sobrante de espacio pero se excede el tiempo disponible para emitir ordenes, debe descartarse la alternativa. Es fácil verificar en el grafico que el punto que corresponde a optimizar sin restricciones pertenece a la región factible determinada por la restricción de espacio, no así a la de tiempo: entonces no pertenece a la intersección de ambas y no puede ser solución.

II. X1=0, Y2=0 Se cumplen 6, 7, 9 y 10.

De 1: $Qi\,1 = \sqrt{\dfrac{720000\,\$us}{0{,}125\,\$/u - Y1.4dm3}}$

De 2: $Qi\,2 = \sqrt{\dfrac{540000\,\$u}{0{,}375\,\$/u - Y1.3dm3}}$

De 3: $4Qi1 + 3Qi2 = 24000$

Según se ha explicado en 3.2.2.5 deberían tantearse valores negativos de Y1 (para cumplir 5) hasta hallar los valores de Qi1 y Qi2 que verifiquen 3. Queda a cargo del alumno verificar que no existen valores negativos de Y1 que cumplen la condición y por lo tanto debe descartarse la alternativa. La explicación es la siguiente: con Y1=0 se obtuvieron Qi que no saturaban el recurso de espacio, valores negativos de Y1 aumentarían el denominador de los radicandos, dando menores Qi e incrementando en el sobrante. Obviamente, se podrían tantear valores de Y1 positivos que lleven a Qi a que saturen el recurso. Esto no es valido como solución por no cumplir 5: se estaría en un punto de la recta correspondiente a la saturación del espacio, donde una curva isocosto es tangente a la misma, si se usa menos recurso se pasa a una isocosto de menor valor (esto confirma que es positivo), no es solución óptima la que satura el recurso.

III. X2=0, Y1=0. Se cumple 5, 8, 9 y 10.

De 1: $Qi1 = \sqrt{\dfrac{720000\,\$u - Y.120000\,hs.u.mes}{0{,}125\$/u}}$

De 2: $Qi2 = \sqrt{\dfrac{540000\,\$u - Y.180000\,hs.u.mes}{0{,}375\$/u}}$

De 4: $\dfrac{120000hu/mes}{Qi1} + \dfrac{180000hu/mes}{Qi2} = 150h/mes$

Pueden resolverse estas ecuaciones repitiendo el mismo tanteo que se hizo en 3.2.2.3, la solución aproximada es: Y2=-2,7$/h/mes Qi1= 2889 u Qi2= 1654 u
El valor de Y2 cumple 6.

De 3: $X1 = 24000dm3 - 4dm3/u.2889u - 3dm3/u.1654u = 7477dm3$ cumple 7.

La solución hallada cumple todas las condiciones de Kuhn y Tucker (1 a 10), por lo tanto es óptima.
Se ha encontrado el punto de la hipérbola correspondiente a la saturación de tiempo disponible, en que una curva isocosto es tangente a ella: si se dispusiese de mas tiempo se podrían ordenar Qi menores (mas próximas al óptimo sin restricciones, recuérdese que en la restricción las Qi están en el denominador), pasando a una isocosto de menor valor (por eso Y es negativo). Se ve, entonces que el menor costo posible se tiene para la saturación del recurso tiempo y que, alejándose de ese punto se tendría mayor costo. Por otra parte, el punto determinado está dentro de la región factible determinada por la restricción de espacio: hay sobrante de espacio y no se satura el recurso (su costo marginal es nulo).

IV. X1=0, X2=0.

De 3: $4Qi1 + 3Qi2 = 24000$

De 4: $\dfrac{120000hu/mes}{Qi1} + \dfrac{180000hu/mes}{Qi2} = 150h/mes$

Queda a cargo del alumno resolver el sistema de ecuaciones (o sea hallar los puntos de intersección entre la recta y la hipérbola correspondientes a la saturación de ambos recursos) y comprobar que corresponden a:
IVa. Qi1=974 Qi2=6700 Ivb. Qi1=4925 Qi2=1432

Si para cada uno de los puntos se reemplazan Qi1 y Qi2 en 1 y 2 queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que permite calcular Y1 e Y2.

Verifique el alumno que, para el caso IVa, se obtienen:
Y1=0,1333273 Y2=9,2323919. Debe descartarse por no cumplir con 5 ni 6.

Y para el caso IVb:
Y1=0,0232351 Y2=-0,4814281. Debe descartarse por no cumplirse 5.