TEORÍA DE COLAS

GUÍA COMPLEMENTARIA DE PROBLEMAS

Mayo 2021

PROBLEMA #1

Considere un sistema P/P/M. El funcionamiento de cada canal de atención cuesta 3000 USD/hora de operación efectiva. El costo del tiempo de espera en cola de cada cliente es de 10000 USD/hora.

1. Encontrar el número óptimo de canales para un promedio de arribos de 16 clientes/hora y una velocidad media de atención de 4 clientes/hora (ambos procesos son de tipo Poisson).
2. Para M = 6 canales, determinar el monto máximo de incentivo que convendría pagar para que los canales aumenten su rendimiento actual en un 30%

Resuelva nuevamente el problema suponiendo que el funcionamiento de cada canal de atención cuesta 3000 USD/hora (hora disponible del canal de atención, independientemente del tiempo efectivo de operación).

PROBLEMA #2

A un sistema de atención que funciona en régimen permanente arriban clientes siguiendo un proceso Poisson con una tasa promedio λ= 1 cliente/hora. El sistema de atención está formado por dos sub-sistemas:

- El primer sub-sistema está formado por dos canales de atención en paralelo con dos posiciones de espera en cola. Los tiempos de servicio de ambos canales son exponenciales y de media 2.5 horas.
- Los clientes que no pueden ingresar al primer sub-sistema pasan a un segundo sub-sistema formado por una cola infinita y un solo canal de atención cuyo tiempo de servicio es exponencial de media 2 horas.

Calcule:

1. Calcule el tiempo máximo posible del servicio del canal de atención del sub-sistema 2
2. Calcule la probabilidad de que un cliente que arriba al sistema no tenga que esperar para recibir el servicio.
3. Se quiere reemplazar el sistema (sub-sistema 1 y sub-sistema 2) por otro sistema de atención de cola infinita y un solo canal de atención. ¿Cuál debe ser el tiempo medio de servicio del canal de atención para que el tiempo medio de permanencia en el sistema sea el mismo?
4. Calcule la probabilidad de que el sistema se encuentre vacío (sub-sistema 1 y sub-sistema 2)
5. Calcule el número promedio de canales de atención activos.

PROBLEMA #3

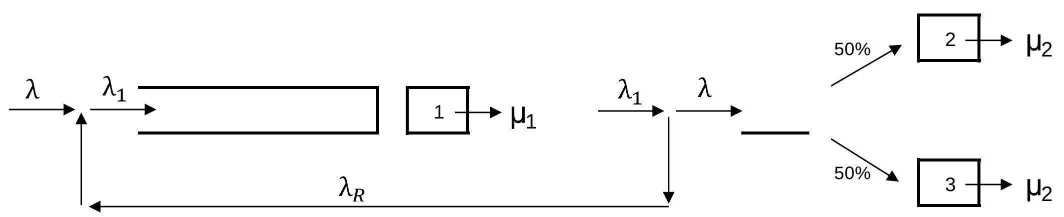
A un sistema de atención P/P/1 arriban clientes a una tasa promedio de 0.125 clientes/minuto. El tiempo de servicio promedio es de 10 minutos; en esta condición el costo del servicio es de 100 USD/minuto (minutos de trabajo efectivo). El tiempo de servicio puede reducirse en forma discreta en intervalos fijos de 0.5 minutos. Cada reducción de 0.5 minutos en el tiempo de servicio, incrementa el costo en 10 USD/minuto. (Por ejemplo para un tiempo de servicio de 8 minutos, el costo del servicio es 140 USD/minuto). El tiempo mínimo posible de servicio es 6.5 minutos. El costo de espera en cola es de 10 USD/minuto cliente.

1. Determine el mínimo tiempo de servicio para que el sistema pueda operar.
2. Determine el tiempo óptimo del servicio.
3. Determine el costo total óptimo del sistema.
4. Determine el tiempo en el sistema cuando se opera con el tiempo de servicio óptimo.
5. Determine el tiempo en cola cuando se opera con el tiempo de servicio óptimo.

PROBLEMA #4

Un sistema de atención está compuesto por dos subsistemas en serie:

- un canal de atención y cola infinita *(subsistema 1)*; seguido de
- un sistema de atención de dos canales de atención en paralelo con igual velocidad y una única posición de espera *(subsistema 2)*.



- Los arribos al sistema siguen una distribución Poisson de media λ [clientes/hora].
- El tiempo de servicio del canal 1 (μ_1) sigue una distribución exponencial de media μ_1 [clientes/hora].
- Los tiempos de servicio de los canales 2 y 3 son iguales y siguen una distribución de tiempo exponencial de media μ_2 [clientes/hora].
- Cuando la posición de espera del *subsistema 2* está ocupada, los clientes que finalizan el servicio en el *subsistema 1* reingresan al subsistema 1 y son reprocesados.
- Cuando el *subsistema 2* está totalmente vacío, los clientes que ingresan a éste subsistema eligen indistintamente (probabilidad=0,5) el canal 2 o el canal 3.

- Parámetros
    - Media del tiempo de servicio del canal 1: $\mu 1$ = 20 clientes por hora
    - Media del tiempo de servicio del canal 1: $\mu 2$ = 6 clientes por hora
    - Porcentaje de utilización del canal 1: H1 = 45%
    - Porcentaje de utilización del canal 2 y 3: H2 = H3 = 60,8392%
    - Probabilidad de que el subsistema 2 esté vacío: $p_2(0) = 0,2238$

1. Calcule la tasa de arribos al sistema (λ)
2. Calcule la tasa de ingresos al subsistema 1 (λ_1)
3. Calcule la tasa de rechazos del subsistema 2 (λ_R)
4. Calcule la longitud promedio del sistema.
5. Calcule la longitud promedio del subsistema 1.
6. Calcule la longitud promedio del subsistema 2.
7. Calcule el tiempo medio de permanencia en el sistema.
8. Calcule el tiempo medio de permanencia en el subsistema 1 (tiempo total considerando que un cliente puede pasar varias veces por ese subsistema).
9. Calcule el tiempo medio de permanencia para cada pasada por el subsistema 1.
10. Calcule el tiempo medio de permanencia en el subsistema 2.
11. Calcule el tiempo medio de espera en el subsistema 1, para una única pasada.
12. Calcule el tiempo medio de espera en el subsistema 2.
13. Calcule el tiempo promedio de permanencia en el sistema, para un cliente que tuvo que reingresar al subsistema 1 y luego pudo avanzar al subsistema 2 en el segundo intento.
14. Calcule el tiempo medio de permanencia en el sistema, para un cliente que pudo ingresar al subsistema 2 en el primer intento, sin reingreso al subsistema 1.
15. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un solo canal ocupado en todo el sistema?
16. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 2 clientes en todo el sistema?
17. ¿Qué porcentaje del tiempo se encontrarán los 3 canales ocupados en forma simultánea?
18. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no tenga que esperar en ningún momento?
19. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté vacío?

PROBLEMA #5

Un conjunto de 10 bombas de muy alta potencia trabajan en forma simultánea.

Cada una de las bombas funciona sin sobrecalentarse durante un promedio de 48 horas. Cuando una bomba deja de funcionar, demora 1 hora en promedio en enfriarse y volver al servicio.

El conjunto es operable con hasta 7 bombas en funcionamiento simultáneo. Cuando una cuarta bomba sale de servicio el sistema se desestabiliza y todo el conjunto debe detenerse. En esta condición reestablecer el servicio demora 15 horas, al cabo de las cuales las 10 bombas reanudan nuevamente la operación.

Determine:

1. La cadena markoviana que representa el sistema.
2. La probabilidad de que todas las bombas estén funcionando.
3. La probabilidad de que ninguna bomba esté funcionando.
4. La probabilidad de que el sistema esté operando (al menos 7 bombas funcionando)
5. La cantidad promedio de bombas en funcionamiento.
6. La cantidad promedio de bombas fuera de servicio.

PROBLEMA #6

Una tienda tiene dos empleados. Cada uno de ellos es capaz de atender a los clientes a una tasa promedio de 60 clientes/hora. Los tiempos reales de servicio se distribuyen exponencialmente. La capacidad total de la tienda es de cinco clientes, no se permite la espera en el exterior. Los clientes llegan a la tienda de acuerdo a un proceso Poisson, con una tasa promedio de llegadas que depende del número de personas que está en la tienda:

Número de personas en la tienda	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Tasa promedio de llegadas [clientes/hora]	100	110	120	140	170	200

Desarrolle a partir de la *Ecuación General de Estado*, un modelo matemático que le permita determinar para el estado de régimen permanente:

1. el número esperado de clientes simultáneos en la tienda.
2. el tiempo estimado que un cliente deberá esperar antes de comenzar a recibir el servicio.
3. la tasa estimada a la cual se pierden los clientes, debido a lo limitado de las instalaciones

PROBLEMA #7

Un sistema de colas tiene un canal de atención y solamente un lugar de espera. El servicio que se brinda en el canal consta de dos procesos (A y B) que se inician simultáneamente para cada cliente. La duración promedio del proceso A es $1/\mu A$ y la del proceso B es $1/\mu B$ (ambos tiempos exponenciales). Cada servicio deja un beneficio de X USD. La tasa de arribos por hora de clientes es Poisson de media λ.

Formular un modelo matemático para determinar el tiempo promedio de permanencia en el sistema de cada cliente y el lucro cesante esperado si:

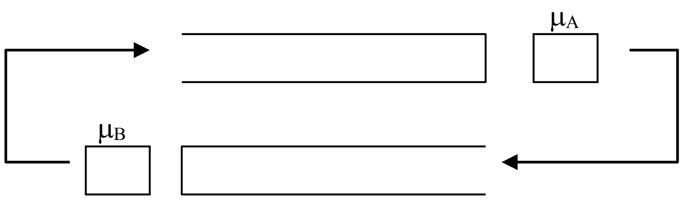
1. el servicio al cliente se termina una vez que finaliza cualquiera de los dos procesos.
2. el servicio al cliente se termina cuando terminan los dos procesos.

PROBLEMA #8

Un sistema cerrado, constituido por dos centros de atención, tiene una población de 6 clientes. El primer centro de atención (A) tiene un solo servidor que atiende a una velocidad promedio $\mu_A = 10$. Una vez que un cliente recibe el servicio en el primer centro pasa inmediatamente al segundo centro de atención (B). Este segundo centro también tiene un solo servidor, que provee el servicio a una velocidad promedio $\mu_B = 15$. Cuando un cliente termina el servicio en el centro B pasa nuevamente al centro A.

Determinar

1. La longitud de cola de cada uno de los subsistemas.
2. El porcentaje de ocupación de cada servidor.
3. La tasa de transferencia entre los centros.



PROBLEMA #9

Un sistema de atención funciona de la siguiente forma: La capacidad de la fila de espera es de 6 clientes como máximo. Si la cantidad de clientes dentro del sistema es menor o igual a k=3 se dispone de un solo canal de atención. Si la cantidad de clientes dentro del sistema es mayor a k=3, se habilita un segundo canal de atención (que trabaja en paralelo con el primero). La tasa de arribos al sistema es λ y la tasa de servicio de ambos canales de atención es μ.

1. Grafique la cadena markoviana y formule el modelo matemático que le permita determinar las probabilidades de estado en función de λ y μ.
2. Formule la cantidad de clientes perdidos y el tiempo de permanencia en el sistema.

PROBLEMA #10

A un centro de atención A tipo (P/P/1) ingresan en promedio 10 clientes/hora y el canal atiende en promedio a una velocidad de 14 clientes/hora.

El 20% de los clientes atendidos tienen que pasar por un centro B (P/P/1) y el resto se retira del sistema. El costo del canal de este centro es de 100 USD/hora efectivamente trabajada. El centro B atiende a una tasa de 14 clientes/hora.

El 30% de los atendidos en B deben pasar por un centro C (P/P/1) y el resto debe retornar al centro A. El costo del canal es de 120 USD/hora efectivamente trabajada.

El centro C atiende a una tasa de 2 clientes/hora. Una vez atendidos en este centro los clientes deben retornar al centro B. El costo del canal de este centro es de 140 USD/hora efectivamente trabajada.

Determinar:

1. La cantidad promedio de clientes que se atienden en el sistema
2. La longitud promedio de clientes en cada centro
3. El costo del sistema
4. La probabilidad de que el sistema esté vacío.