

Optimización de sistemas de colas

- Introducción
- Modelos de colas de un canal de atención
 - Ejemplos #1, #2 y #3
- Modelos de colas de múltiples canales en paralelo
 - Ejemplos #4, #5 y #6
- Estudio de caso: Equipos de mantenimiento correctivo

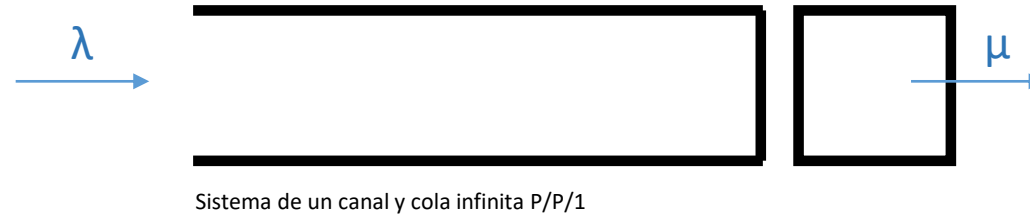
Optimización de sistemas de colas

Introducción

- La teoría de colas proporciona una metodología de formulación de modelos matemáticos que *describen* el funcionamiento de sistemas de espera.
- Estos modelos *descriptivos* pueden sin embargo utilizarse para estudiar estrategias óptimas de operación.
- Las variables sobre las que es posible actuar incluyen a:
 - La velocidad media de atención de los canales (μ)
 - La tasa de llegadas a sistema (λ)
 - La cantidad de canales de atención (M)
 - El tamaño del sistema de atención (N)
- En las funciones a optimizar intervienen como parámetros (entre otros posibles):
 - El costo de mantener un cliente en el sistema en la unidad de tiempo
 - El costo por unidad de tiempo de atender a una velocidad unitaria
 - El costo de un espacio en la cola
 - El precio de venta de los servicios
 - El costo por unidad de tiempo de cada canal

Optimización de sistemas de colas

Introducción

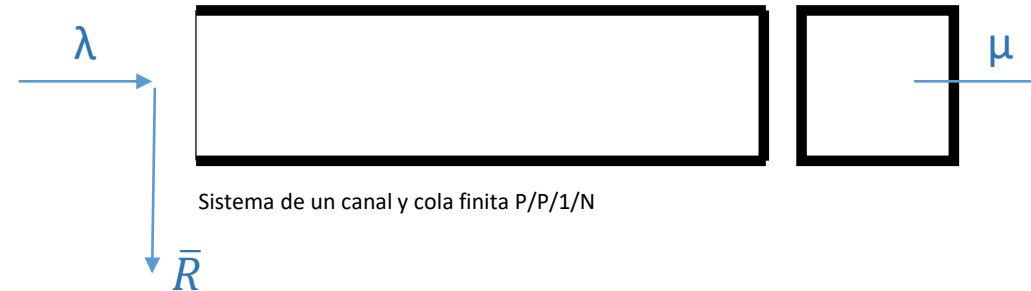


A mayor velocidad media de atención:

- Mayor costo de operación del canal de atención
- Menor tiempo de permanencia en el sistema
- Menor costo por mantener los clientes en el sistema

Optimización de sistemas de colas

Introducción

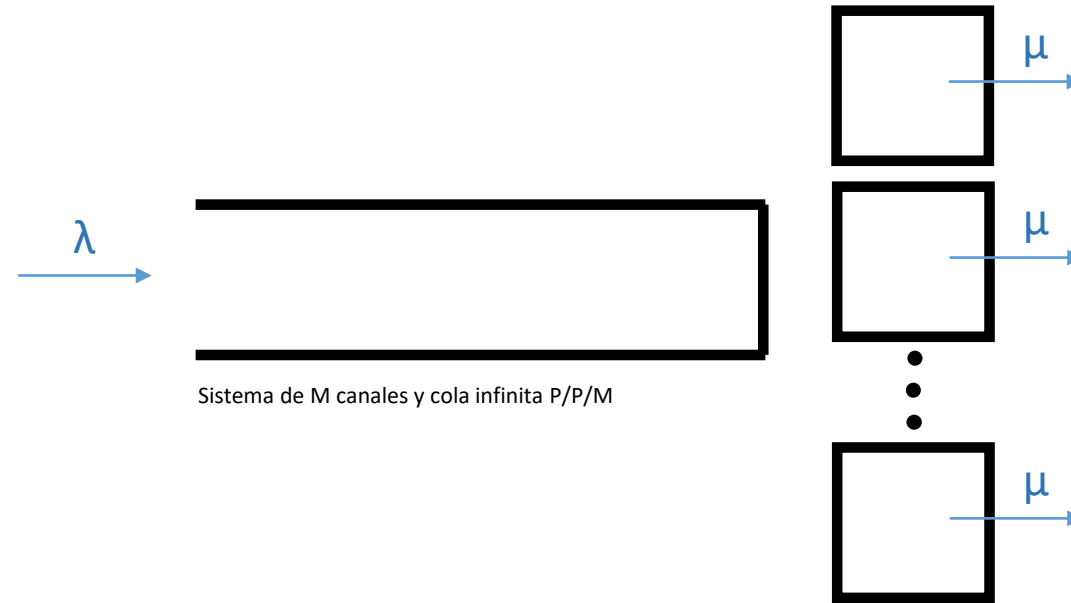


A mayor velocidad media de atención:

- Mayor costo de operación del canal de atención
- Menor tiempo de permanencia en el sistema
- Menor costo por mantener los clientes en el sistema
- Menor rechazo de clientes
- Menor costo de oportunidad por pérdida de clientes

Optimización de sistemas de colas

Introducción



A mayor número de canales de atención:

- Mayor costo de operación de los canales de atención
- Menor tiempo de permanencia en el sistema
- Menor costo por mantener los clientes en el sistema

Optimización de sistemas de colas

Ejemplo #1



Sistema de un canal y cola infinita P/P/1

Variable de decisión: velocidad media de atención (μ)

Costos de operación:

- c_e : Costo de mantener una unidad en el sistema en la unidad de tiempo $\left[\frac{\$}{t.cl} \right]$
- c_s : Costo por unidad de tiempo de atender a la velocidad unitaria $\left[\frac{\$}{t. \frac{cl}{t}} \right]$

$$Z = c_e L + c_s \mu \quad \rightarrow \min$$

$$Z = c_e \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + c_s \mu \quad \rightarrow \min$$

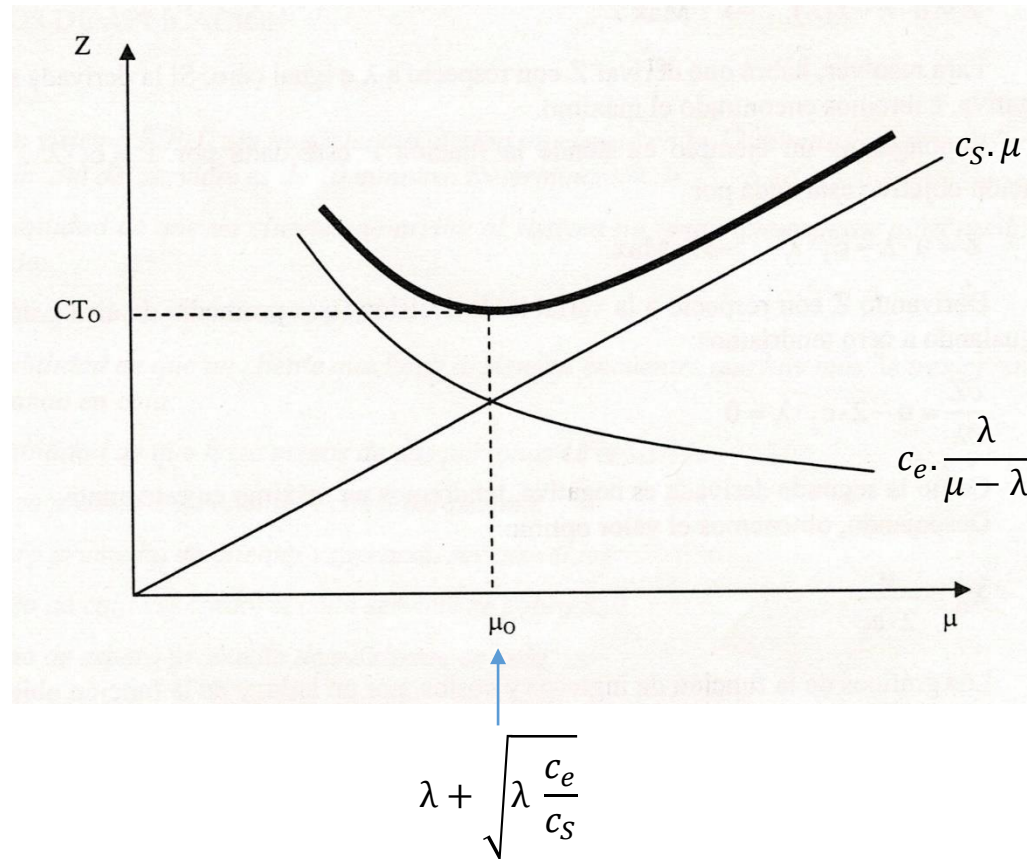
$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = -c_e \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)^2} + c_s = 0$$

$$c_e \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)^2} = c_s \rightarrow (\mu - \lambda)^2 = \lambda \frac{c_e}{c_s}$$

$$(\mu - \lambda) = \pm \sqrt{\lambda \frac{c_e}{c_s}} \rightarrow \mu_o = \lambda + \sqrt{\lambda \frac{c_e}{c_s}}$$

Optimización de sistemas de colas

Ejemplo #1



$$Z = c_e L + c_s \mu \quad \rightarrow \min$$

$$Z = c_e \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + c_s \mu \quad \rightarrow \min$$

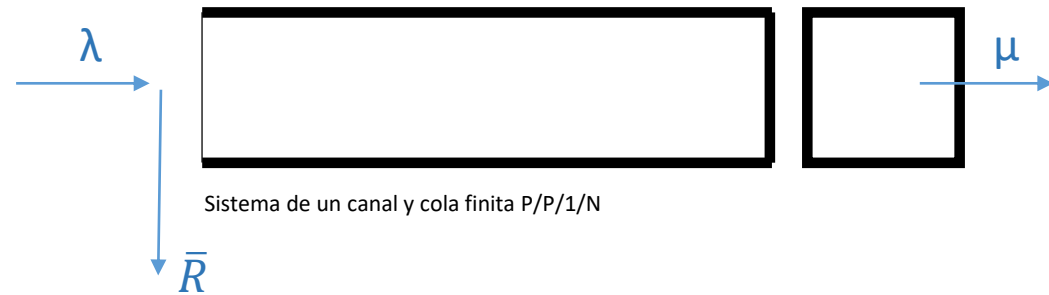
$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = -c_e \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)^2} + c_s = 0$$

$$c_e \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)^2} = c_s \rightarrow (\mu - \lambda)^2 = \lambda \frac{c_e}{c_s}$$

$$(\mu - \lambda) = \pm \sqrt{\lambda \frac{c_e}{c_s}} \rightarrow \mu_0 = \lambda + \sqrt{\lambda \frac{c_e}{c_s}}$$

Optimización de sistemas de colas

Ejemplo #2



$$Z = c_S \mu + u \bar{R} \quad \rightarrow \min$$

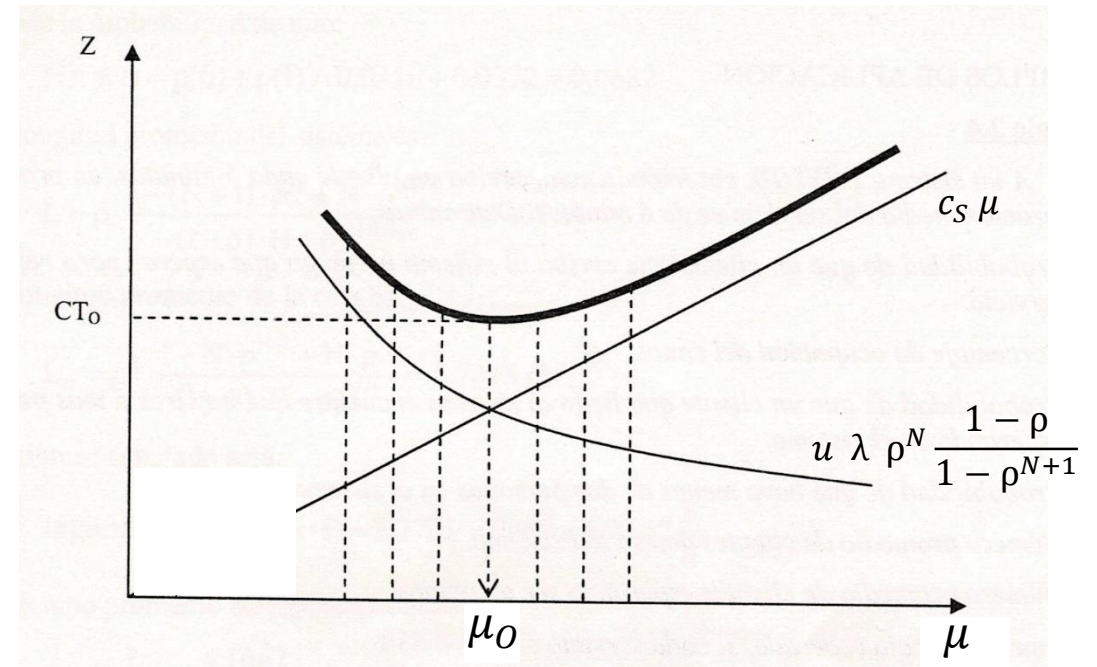
$$Z = c_S \mu + u \lambda \rho^N \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \quad \rightarrow \min$$

Variable de decisión: velocidad media de atención (μ)

- c_S : Costo por unidad de tiempo de atender a la velocidad unitaria $\left[\frac{\$}{t \cdot \frac{cl}{t}} \right]$

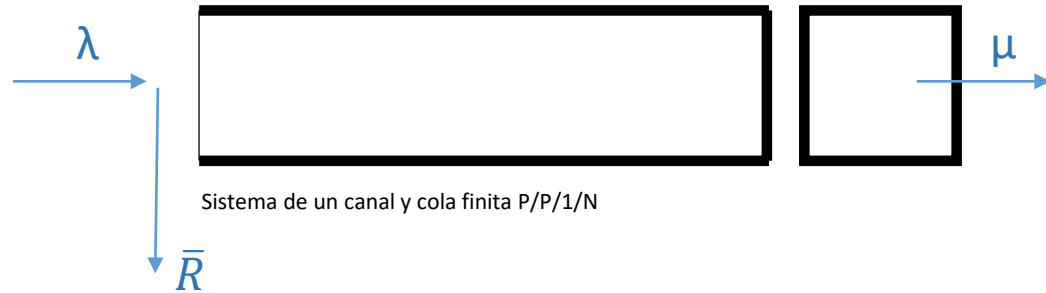
Ingresos:

- u : Precio de venta de cada servicio $\left[\frac{\$}{cl} \right]$



Optimización de sistemas de colas

Ejemplo #3



$$Z = c_L(N - 1) + u \bar{R} \quad \rightarrow \min$$

$$Z = c_L(N - 1) + u \lambda \rho^N \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \quad \rightarrow \min$$

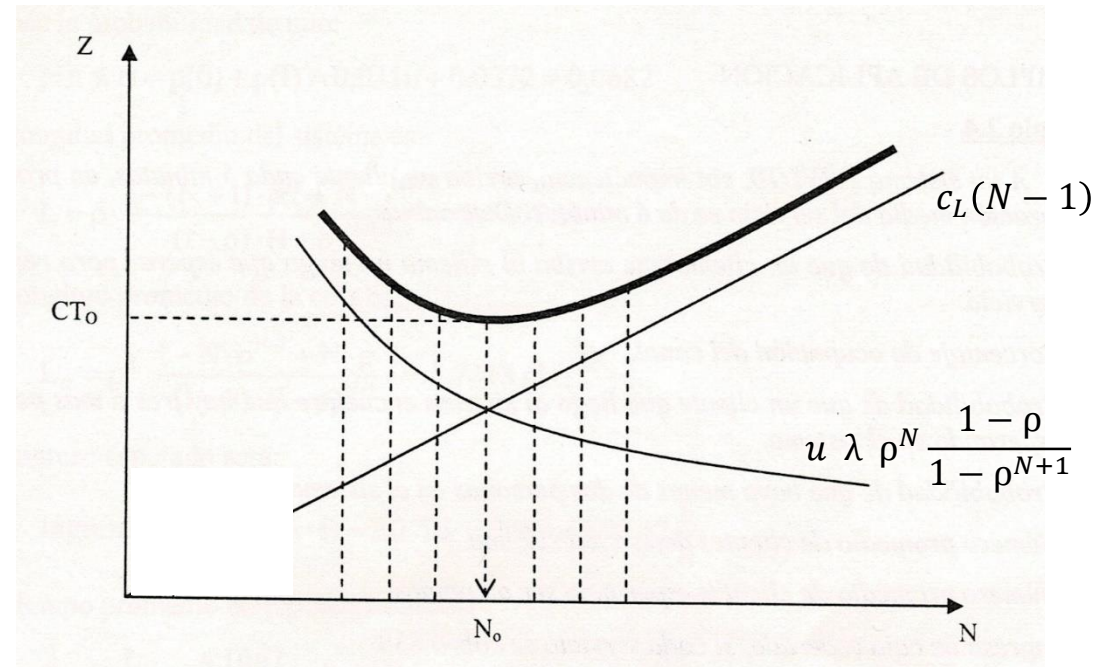
Variable de decisión: posiciones de espera (N-1)

Costos de operación:

- c_L : Costo de cada lugar en la cola por unidad de tiempo $\left[\frac{\$}{t.lugar} \right]$

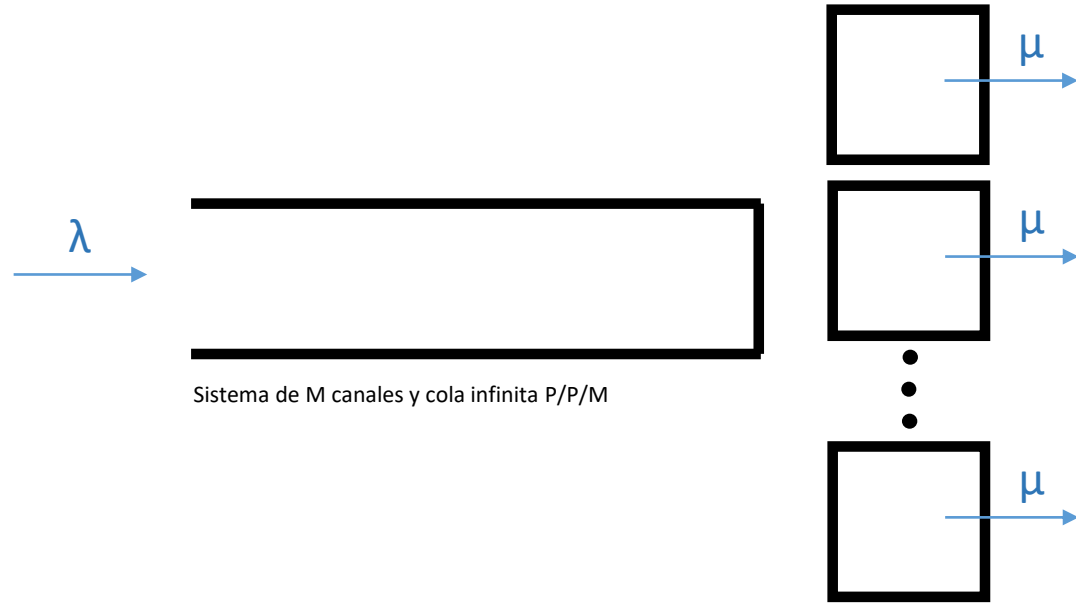
Ingresos:

- u : Precio de venta de cada servicio $\left[\frac{\$}{cl} \right]$



Optimización de sistemas de colas

Ejemplo #4



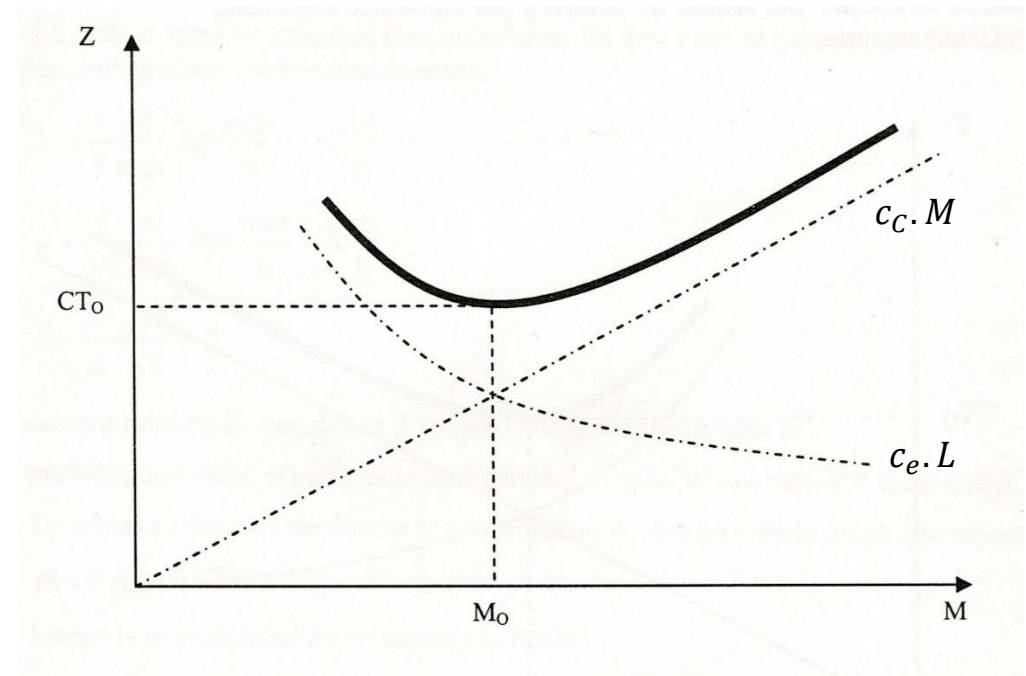
Variable de decisión: número de canales de atención (M)

Costos de operación:

- c_e : Costo de mantener una unidad en el sistema en la unidad de tiempo $\left[\frac{\$}{t.cl} \right]$
- c_C : Costo por unidad de tiempo de cada canal $\left[\frac{\$}{t.canal} \right]$

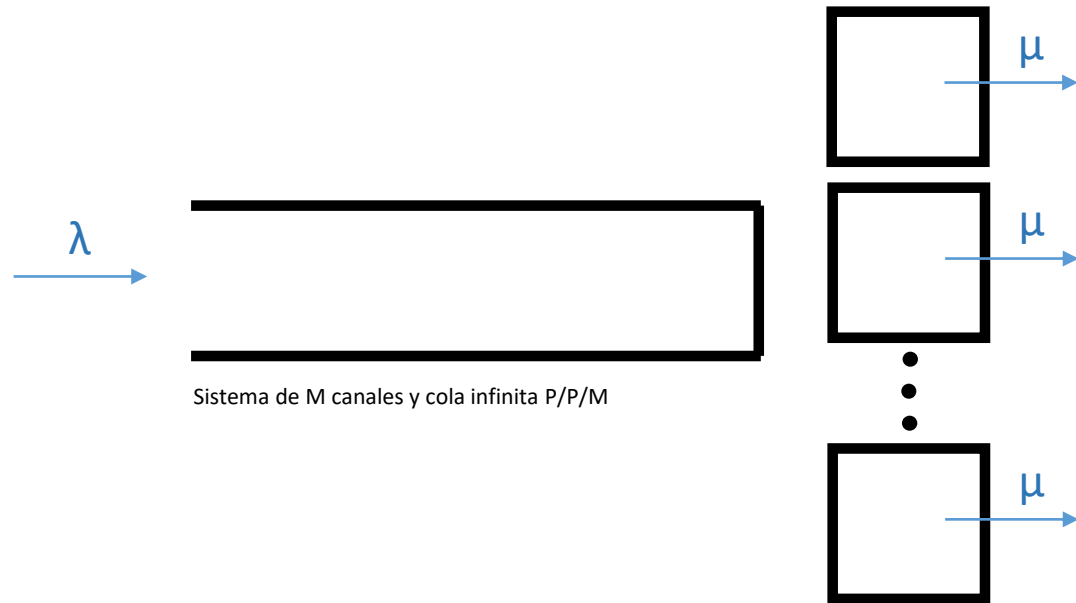
$$Z = c_e L + c_C M \quad \rightarrow \min$$

$$\text{donde: } L = \frac{\lambda \mu \rho^M}{(M-1)! (M\mu - \lambda)^2} p(0) + \rho$$



Optimización de sistemas de colas

Ejemplo #5



Variable de decisión: número de canales de atención (M)

Costos de operación:

- c_e : Costo de mantener una unidad en el sistema en la unidad de tiempo $\left[\frac{\$}{t.cl} \right]$
- c_C : Costo por unidad de tiempo de cada canal $\left[\frac{\$}{t.canal} \right]$
- c_D : Costo por unidad de tiempo de cada canal activo $\left[\frac{\$}{t.canal} \right]$

$$Z = c_e L + c_C M + c_D M \frac{H}{M} \quad \rightarrow \min$$

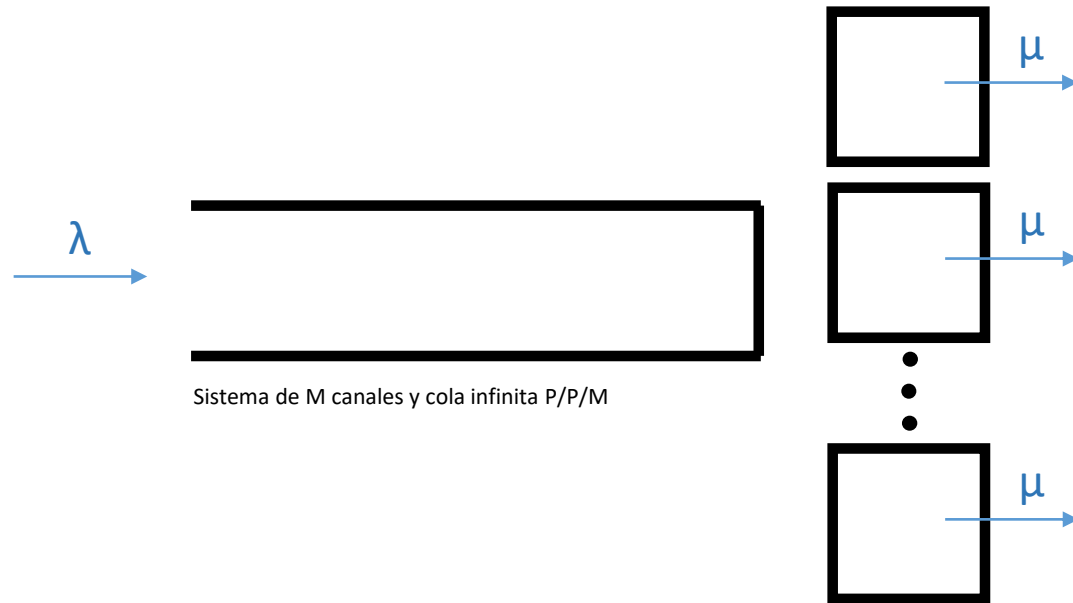
donde: H : número promedio de canales ocupados

$$Z = c_e L + c_C M + c_D H \quad \rightarrow \min$$

↑ Costo fijo por canal activo
 ↑ Costo variable de operación del canal

Optimización de sistemas de colas

Ejemplo #6



$$Z = c_e L + c_S M \mu \quad \rightarrow \min$$

Variable de decisión: velocidad media de atención (μ)

Costos de operación:

- c_e : Costo de mantener una unidad en el sistema en la unidad de tiempo
 $\left[\frac{\$}{t \cdot cl} \right]$
- c_S : Costo por unidad de tiempo de atender a la velocidad unitaria $\left[\frac{\$}{t \cdot \frac{cl}{t}} \right]$

Optimización de sistemas de colas

Estudio de caso: Equipos de mantenimiento correctivo



Objetivo del análisis

- Para un área de explotación petrolera, determinar la cantidad óptima de equipos de mantenimiento de una determinada especialidad.
- Dadas las características de la operación los equipos se contratan sobre la base de un costo fijo mensual con independencia de la actividad que desarrollen en el mes.

Optimización de sistemas de colas

Estudio de caso: Equipos de mantenimiento correctivo

Características del caso

Estimar el comportamiento de un servicio de mantenimiento correctivo de pozos petroleros de las siguientes características:

- La demanda del servicio es aleatoria; esto quiere decir que no es programable.
- La demanda del servicio es estable; esto quiere decir que si bien no es programable, la tasa de demanda (pej: servicios demandados/semana) es más o menos estable en el tiempo.
- El tiempo de ejecución del servicio es aleatorio; sin embargo, al igual que la demanda, es estable y puede estimarse (pej: horas/servicio).
- El costo de esperar la resolución del servicio es relativamente alto.
- La cantidad de pozos en operación es relativamente alta por lo que la población puede considerarse infinita.

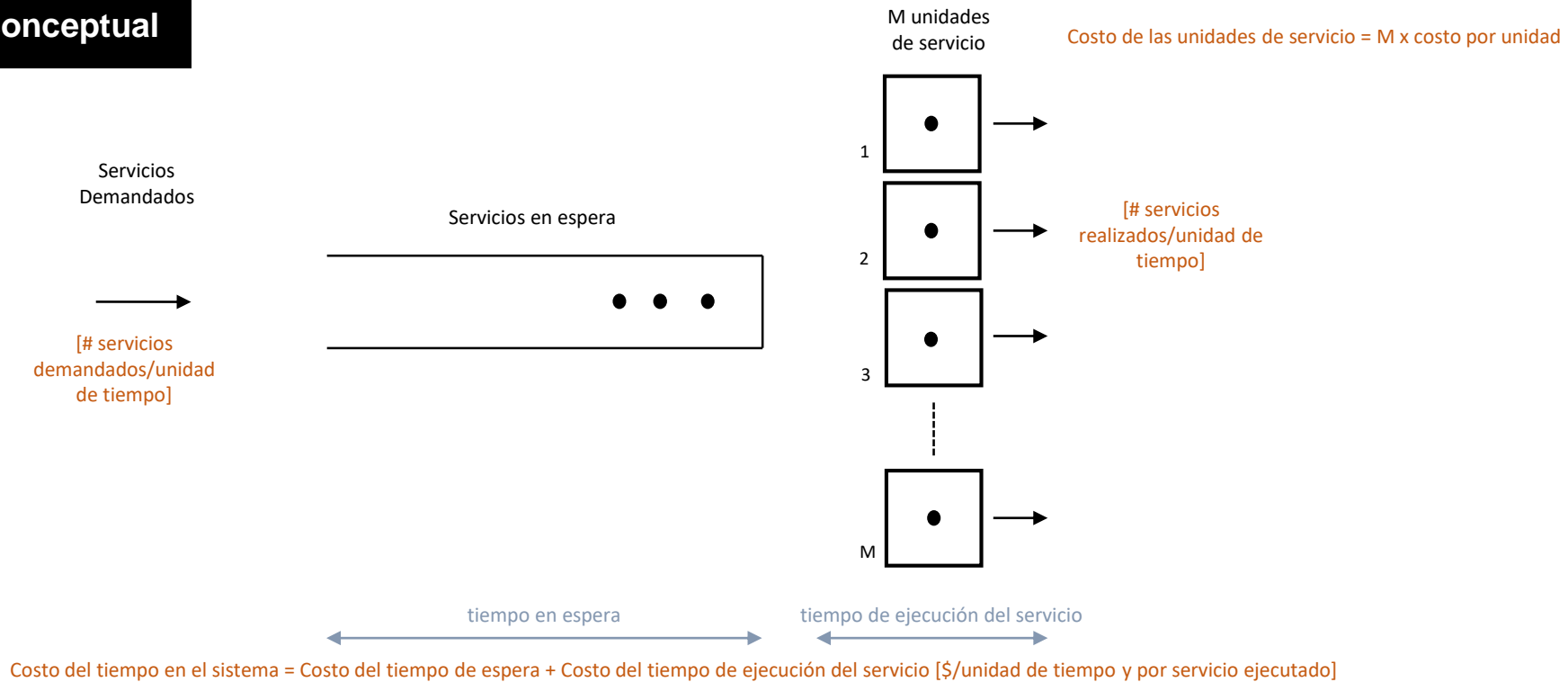
Estimar el comportamiento para:

- Determinar la cantidad óptima de equipos de mantenimiento.
- Estimar el nivel de servicio de una configuración determinada.

Optimización de sistemas de colas

Estudio de caso: Equipos de mantenimiento correctivo

Descripción conceptual



Dimensionar óptimamente el servicio es encontrar la cantidad de unidades de servicio que hace óptimo el Costo Total

$$\text{Costo Total} = \text{Costo del tiempo en el sistema} + \text{Costo de las unidades de servicio}$$

Optimización de sistemas de colas

Estudio de caso: Equipos de mantenimiento correctivo

Datos requeridos

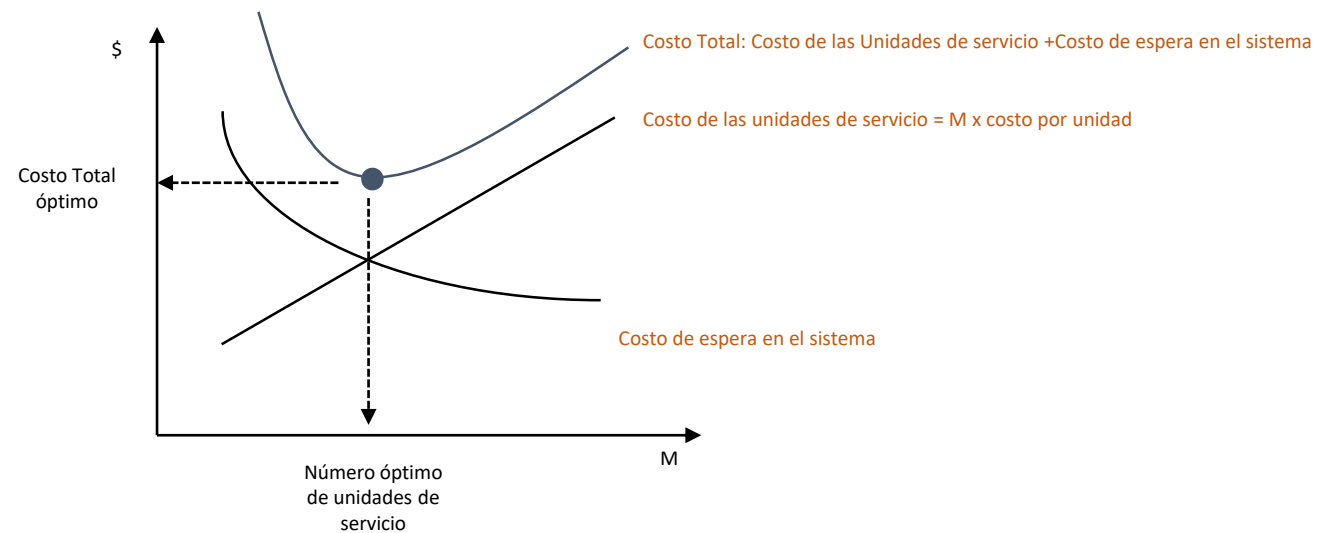
- Demanda de servicios: una estimación de la cantidad de servicios demandados por unidad de tiempo. Por ejemplo: cantidad de mantenimientos/semana requeridos de una especialidad en un área de explotación.
- Velocidad de ejecución del servicio: una estimación de la velocidad a la que trabaja cada equipo de servicio. En este caso, el tiempo medio de resolución de una tarea de mantenimiento.
- Costo del tiempo en el sistema: es el costo de oportunidad de un pozo fuera de servicio esperando la finalización de un servicio de mantenimiento.
- Costo de cada unidad de servicio: el costo mensual de disponer de un equipo de mantenimiento.

Optimización de sistemas de colas

Estudio de caso: Equipos de mantenimiento correctivo

Resultados

- Tiempo promedio de espera en el sistema: Es el tiempo que transcurre desde que se manifiesta la necesidad del servicio hasta que el servicio concluye.
- Costo Total: Es función de la cantidad de unidades de servicio. A mayor cantidad de unidades menor costo de espera pero mayor costo de contratación de las unidades de servicio.



Optimización de sistemas de colas

Estudio de caso: Equipos de mantenimiento correctivo

Datos de entrada:

- Demanda de servicios: 10 servicios/semana
- Velocidad de ejecución del servicio: 4,9 servicios/semana
- Costo del tiempo en el sistema: 100 \$/(servicio.semana)
- Costo de cada unidad de servicio: 10 \$/(unidad.semana)

Resultados para N = 5 unidades de servicio:

- Número mínimo de unidades de servicio: 3
- Cantidad promedio de servicios en el sistema: 2,085
- Tiempo promedio en el sistema: 0,209 semanas
- Costo del tiempo en el sistema: 208,5 \$/semana
- Costo de las unidades de servicio: 50 \$/semana
- Costo Total: 258,5 \$/semana
- Probabilidad de esperar: 6,4%

Resultados en función de la cantidad de unidades de servicio

