P/P/1 IMPACIENCIA

- Arribos Po
- Servicio Po
- Régimen permanente
- 1 canal
- 1 cola
- FIFO
- Capacidad infinita
- Con impaciencia
- Población infinita

Parámetros

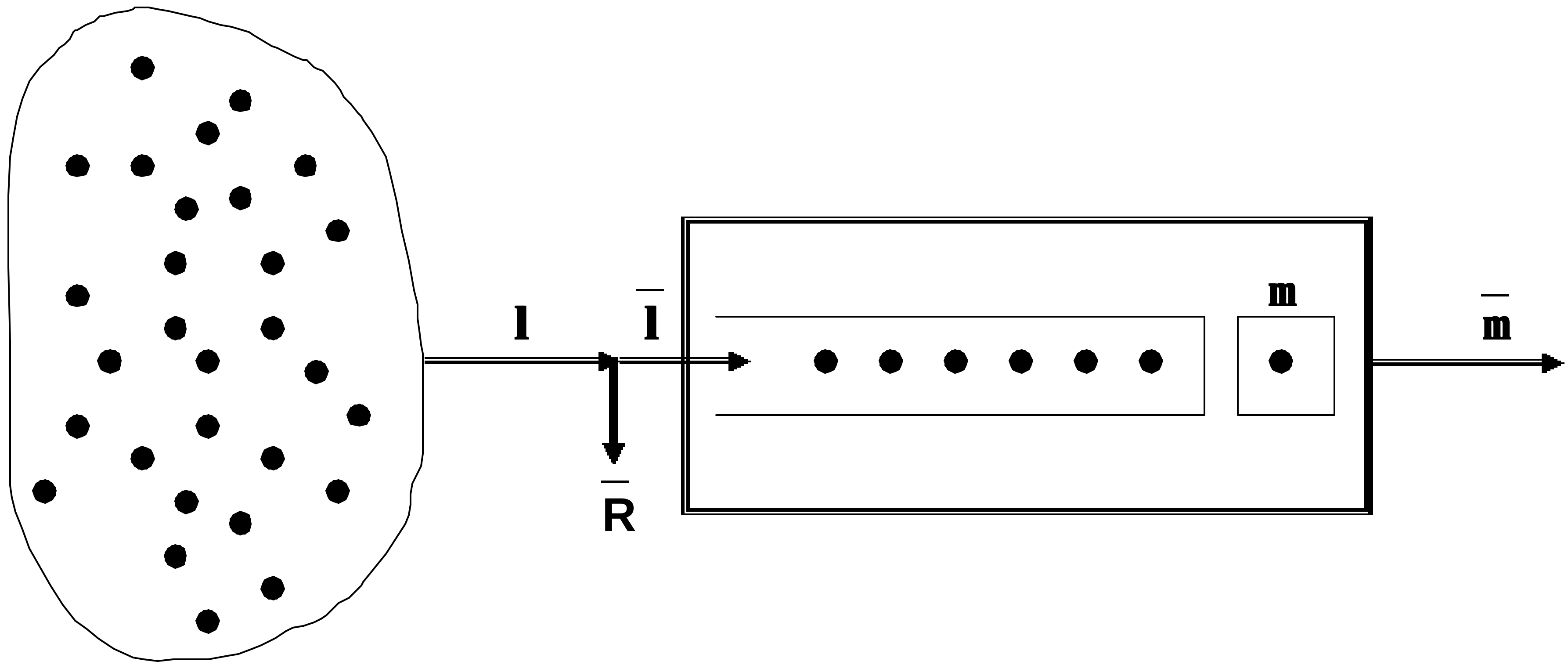
- λ $\qquad T_a = \dfrac{1}{\lambda}$
- μ $\qquad T_s = \dfrac{1}{\mu}$
- M = 1
- α

$$p(i/n) = e^{-\frac{\alpha \cdot n}{\mu}} = \gamma^{2 \cdot n} \qquad \gamma^2 = e^{-\frac{\alpha}{\mu}}$$

γ^2

Variables

- p(n)
- L_c
- L
- H
- W_c
- W
- γ^2



l
$\bar{l}$
$\bar{R}$
m
$\bar{m}$

$$\lambda_n = \lambda \cdot \gamma^{2\cdot n} \qquad n = 0, 1, 2, 3, ... \qquad \lambda_n = \lambda \cdot p(i/n)$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

$$p(1) = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p(0) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \qquad \Rightarrow \qquad p(1) = \rho \cdot p(0)$$

$$p(2) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p(1) = \frac{\lambda \cdot \gamma^2}{\mu} \cdot p(0)\frac{\lambda}{\mu} \qquad \Rightarrow \qquad p(2) = \rho^2 \cdot \gamma^2 \cdot p(0)$$

$$p(3) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p(2) = \frac{\lambda \cdot \gamma^4}{\mu} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot \gamma^2 \cdot p(0) \Rightarrow \qquad p(3) = \rho^3 . \gamma^6 \cdot p(0)$$

$$p(4) = \frac{\lambda_3}{\mu_4} \cdot p(3) = \frac{\lambda \cdot \gamma^6}{\mu} \cdot \frac{\lambda^3}{\mu^3} \cdot \gamma^6 \cdot p(0) \Rightarrow \qquad p(4) = \rho^4 . \gamma^{12} \cdot p(0)$$

$$\boxed{p(n) = \rho^n \cdot \gamma^{n\cdot(n-1)} \cdot p(0)}$$

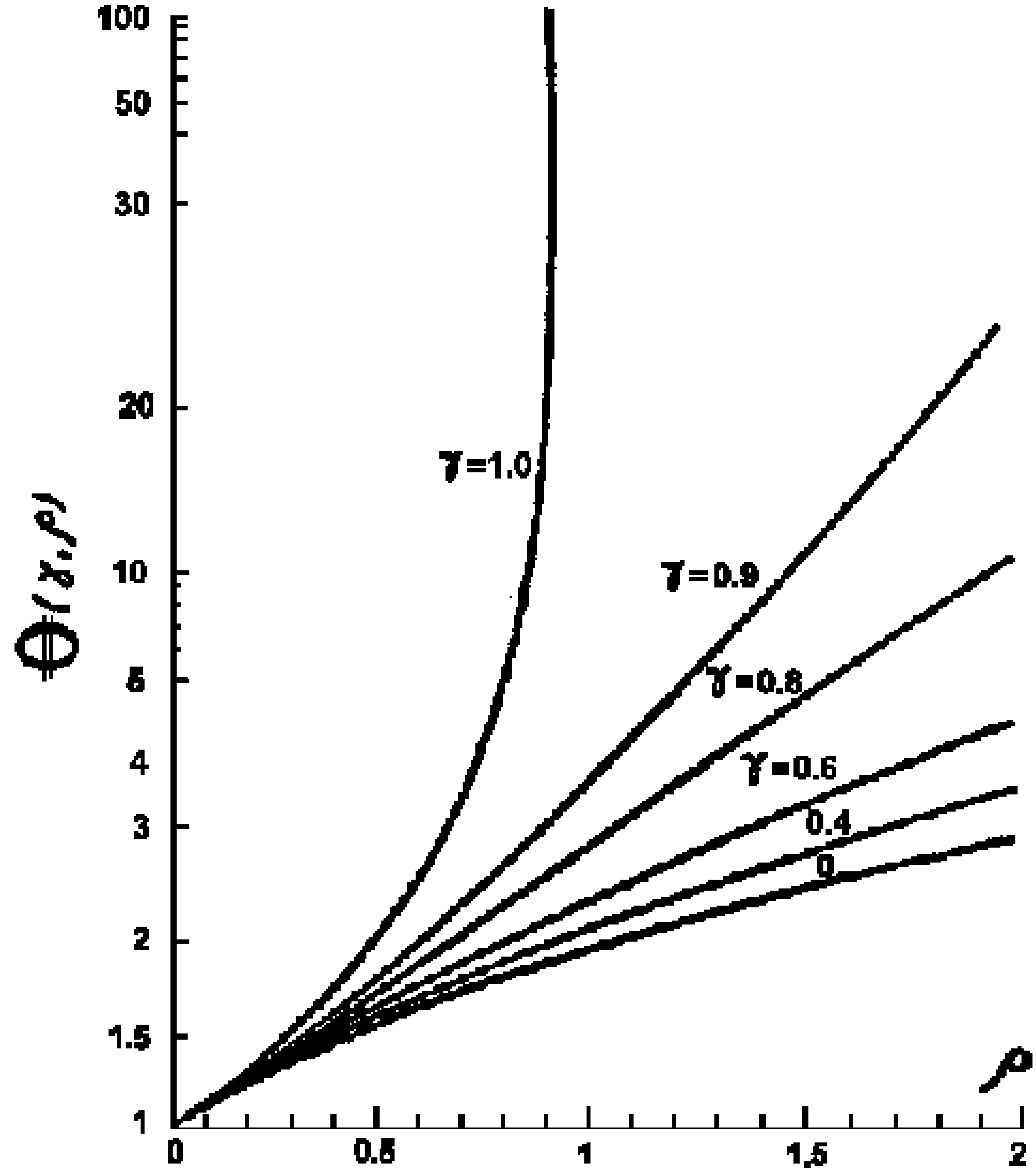
$$\sum_{0}^{\infty} p(n) = 1$$

$$\sum_{0}^{\infty} \rho^{n} \cdot \gamma^{n \cdot (n-1)} \cdot p(0) = 1$$

$$p(0) = \frac{1}{\sum_{0}^{\infty} \rho^{n} \cdot \gamma^{n \cdot (n-1)}}$$

$$\sum_{0}^{\infty} \rho^{n} \cdot \gamma^{n \cdot (n-1)} = \Theta(\rho, \gamma)$$

$$p(0) = \frac{1}{\Theta(\rho, \gamma)}$$



100
50
30
20
10
5
4
3
2
1.5
1
0
0.5
1
1.5
2
γ=1.0
γ=0.9
γ=0.8
γ=0.6
0.4
0
ρ
Φ(γ, ρ)

SISTEMAS P/P/1 CON IMPACIENCIA

Para probabilidad de ingresar $p(i/n) = \gamma^{2n} = e^{-\alpha \cdot n/\mu}$

FUNCIÓN INVERSA DE p(0): $\mathbf{Q}$(ñ,ã)

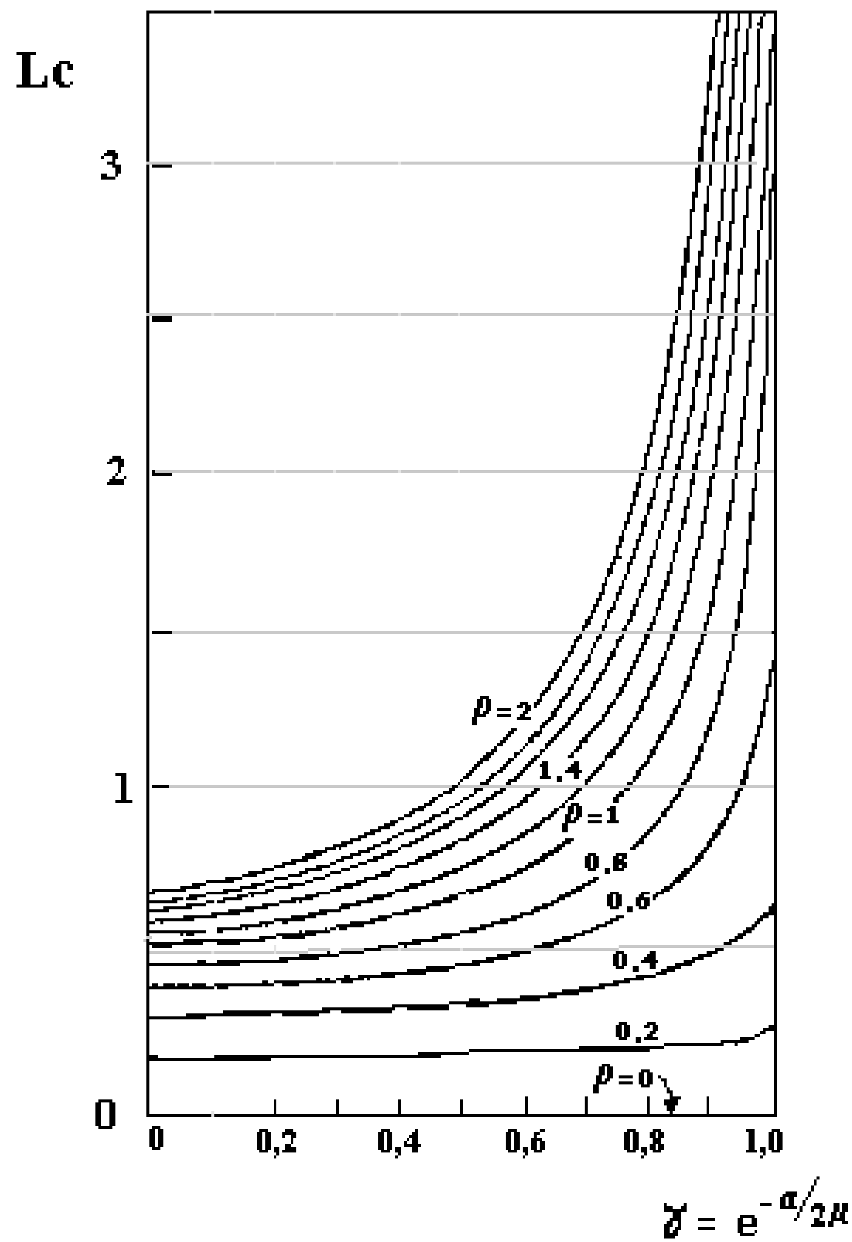
ñ \ ã	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,1	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,11	1,11
0,2	1,20	1,20	1,20	1,20	1,21	1,21	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25
0,3	1,30	1,30	1,30	1,31	1,31	1,32	1,33	1,35	1,37	1,39	1,43
0,4	1,40	1,40	1,41	1,41	1,43	1,44	1,46	1,49	1,52	1,57	1,40
0,5	1,50	1,50	1,51	1,52	1,54	1,56	1,60	1,64	1,70	1,79	2,00
0,6	1,60	1,60	1,61	1,63	1,66	1,69	1,74	1,80	1,90	2,05	2,50
0,7	1,70	1,70	1,72	1,74	1,78	1,83	1,89	1,98	2,12	2,37	3,33
0,8	1,80	1,81	1,83	1,86	1,90	1,97	2,06	2,18	2,38	2,76	5,00
0,9	1,90	1,91	1,93	1,97	2,03	2,11	2,23	2,39	2,66	3,23	10,00
1	2,00	2,01	2,04	2,09	2,16	2,27	2,41	2,62	2,98	3,80	101
1,1	2,10	2,11	2,15	2,21	2,30	2,42	2,60	2,87	3,34	4,50	-
1,2	2,20	2,21	2,26	2,33	2,44	2,59	2,80	3,14	3,75	5,36	-
1,3	2,30	2,32	2,37	2,45	2,58	2,76	3,02	3,43	4,20	6,40	-

$$L = \sum_{0}^{\infty} n \, . \, p(n) \qquad\qquad L = \sum_{0}^{\infty} n \, . \, \rho^{n} \cdot \gamma^{n\cdot(n-1)} p(0)$$

$$L_C = \sum_{1}^{\infty} (n-1) \cdot p(n) = \sum_{1}^{\infty} n \cdot p(n) - \sum_{1}^{\infty} p(n) = \sum_{0}^{\infty} n \cdot p(n) - [1 - p(0)] = L - [1 - p(0)]$$

LONGITUD PROMEDIO DE LA COLA: L_C

ã ñ	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,1	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10	0,10	0,10	0,11	0,11
0,2	0,17	0,17	0,17	0,17	0,18	0,18	0,19	0,20	0,21	0,23	0,25
0,3	0,23	0,23	0,24	0,24	0,25	0,26	0,28	0,30	0,32	0,36	0,43
0,4	0,29	0,29	0,29	0,30	0,32	0,34	0,36	0,39	0,44	0,51	0,67
0,5	0,33	0,34	0,34	0,36	0,38	0,40	0,44	0,48	0,55	0,67	1,00
0,6	0,38	0,38	0,39	0,41	0,43	0,47	0,51	0,57	0,67	0,84	1,50
0,7	0,41	0,42	0,43	0,45	0,48	0,53	0,58	0,66	0,79	1,03	2,33
0,8	0,44	0,45	0,47	0,49	0,53	0,58	0,65	0,75	0,91	1,23	4,00
0,9	0,47	0,48	0,50	0,53	0,57	0,63	0,71	0,83	1,03	1,44	9,00
1	0,50	0,51	0,53	0,57	0,62	0,68	0,78	0,91	1,14	1,66	66,04
1,1	0,52	0,53	0,56	0,60	0,65	0,73	0,83	0,99	1,26	1,89	438,64
1,2	0,55	0,55	0,58	0,63	0,69	0,77	0,89	1,07	1,37	2,11	1694,77
1,3	0,57	0,58	0,61	0,66	0,72	0,82	0,94	1,14	1,48	2,35	5715,76
1,4	0,58	0,59	0,63	0,68	0,76	0,86	1,00	1,21	1,59	2,58	
1,5	0,60	0,61	0,65	0,71	0,79	0,89	1,05	1,28	1,70	2,81	
1,6	0,62	0,63	0,67	0,73	0,82	0,93	1,09	1,34	1,80	3,04	
1,7	0,63	0,64	0,69	0,75	0,84	0,97	1,14	1,41	1,90	3,26	
1,8	0,64	0,66	0,70	0,77	0,87	1,00	1,18	1,47	2,00	3,49	
1,9	0,66	0,67	0,72	0,79	0,90	1,03	1,23	1,53	2,10	3,70	-



Lc
3
2
1
0
ρ=2
1,4
ρ=1
0,8
0,6
0,4
0,2
ρ=0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
γ = e^{-α/2μ}

$$H = \sum_{1}^{\infty} p(n) = 1 - p(0)$$

$$L = L_C + H$$

$$PA = \frac{H}{M} = \frac{[1 - p(0)]}{1} = 1 - p(0)$$

$$\overline{\mu} = \mu \cdot H \qquad \overline{\lambda} = \overline{\mu}$$

$$\overline{R} = \lambda - \overline{\lambda}$$

$$W_C = \frac{L_C}{\overline{\lambda}} = \frac{L_C}{\overline{\mu}}$$

$$W = W_C + T_S$$

A un sistema P/P/1, con impaciencia, arriban 8 clientes por hora, en promedio. La velocidad promedio de atención del canal es de 10 cl/h. Se ha determinado que la probabilidad de ingresar al sistema para un estado "n" está dada por la expresión:

$$p(i/n) = e^{-\frac{\alpha \cdot n}{\mu}}$$

siendo el coeficiente de impaciencia para esta población a = 2.

Calcular:

a.Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema no tenga que esperar para recibir el servicio.

b.Porcentaje de ocupación del canal.

c.Probabilidad de que un cliente que llega al sistema encuentre más de dos personas esperando en cola.

d.Número promedio de clientes esperando en cola.

e.Número promedio de clientes que permanecen dentro del sistema.

f.Ingreso de caja esperado, si cada servicio se cobra $50.

g.Lucro cesante esperado.

h.Tiempo de espera promedio de un cliente en cola.

i.Tiempo promedio de permanencia de un cliente dentro del sistema.

$$\lambda = 8\,\frac{\text{cl}}{\text{h}} \qquad \mu = 10\,\frac{\text{cl}}{\text{h}} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10} = 0{,}80$$

$$\gamma^{2\cdot n} = e^{-\frac{\alpha\cdot n}{\mu}} \Rightarrow \gamma^2 = e^{-\frac{\alpha}{\mu}} \Rightarrow \gamma = e^{-\frac{\alpha}{2\cdot\mu}}$$

$$\gamma = e^{-\frac{2}{2\cdot 10}} = e^{-0{,}1} = 0{,}9048 \cong 0{,}90$$

SISTEMAS P/P/1 CON IMPACIENCIA

Para probabilidad de ingresar $p(i/n) = \gamma^{2n} = e^{-\alpha \cdot n/\mu}$

FUNCIÓN INVERSA DE p(0): $Q(\tilde{n},\tilde{a})$

ñ \ ã	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,1	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,11	1,11
0,2	1,20	1,20	1,20	1,20	1,21	1,21	1,21	1,22	1,23	1,24	1,25
0,3	1,30	1,30	1,30	1,31	1,31	1,32	1,33	1,35	1,37	1,39	1,43
0,4	1,40	1,40	1,41	1,41	1,43	1,44	1,46	1,49	1,52	1,57	1,40
0,5	1,50	1,50	1,51	1,52	1,54	1,56	1,60	1,64	1,70	1,79	2,00
0,6	1,60	1,60	1,61	1,63	1,66	1,69	1,74	1,80	1,90	2,05	2,50
0,7	1,70	1,70	1,72	1,74	1,78	1,83	1,89	1,98	2,12	2,37	3,33
0,8	1,80	1,81	1,83	1,86	1,90	1,97	2,06	2,18	2,38	2,76	5,00
0,9	1,90	1,91	1,93	1,97	2,03	2,11	2,23	2,39	2,66	3,23	10,00
1	2,00	2,01	2,04	2,09	2,16	2,27	2,41	2,62	2,98	3,80	101
1,1	2,10	2,11	2,15	2,21	2,30	2,42	2,60	2,87	3,34	4,50	-
1,2	2,20	2,21	2,26	2,33	2,44	2,59	2,80	3,14	3,75	5,36	-
1,3	2,30	2,32	2,37	2,45	2,58	2,76	3,02	3,43	4,20	6,40	-

$$\lambda = 8\,\frac{\mathrm{cl}}{\mathrm{h}} \qquad \mu = 10\,\frac{\mathrm{cl}}{\mathrm{h}} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10} = 0{,}80$$

$$p(0) = \frac{1}{2{,}76} = 0{,}3623$$

$$PO = \frac{H}{M} = \frac{1 - 0{,}3623}{1} = 0{,}6377$$

$$p(n \geq 3) = 1 - p(0) - p(1) - p(2)$$

$$p(n) = \rho^{n} \cdot \gamma^{n\cdot(n-1)} \cdot p(0)$$

$$p(1) = 0{,}8^{1} \cdot 0{,}9^{1\cdot(1-1)} \cdot 0{,}3623 = 0{,}2898$$

$$p(2) = 0{,}8^{2} \cdot 0{,}9^{2\cdot(2-1)} \cdot 0{,}3623 = 0{,}1878$$

$$p(n \geq 3) = 1 - 0{,}3623 - 0{,}2898 - 0{,}1878 = 0{,}1601$$

LONGITUD PROMEDIO DE LA COLA: L_C

ã ñ	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,1	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10	0,10	0,10	0,11	0,11
0,2	0,17	0,17	0,17	0,17	0,18	0,18	0,19	0,20	0,21	0,23	0,25
0,3	0,23	0,23	0,24	0,24	0,25	0,26	0,28	0,30	0,32	0,36	0,43
0,4	0,29	0,29	0,29	0,30	0,32	0,34	0,36	0,39	0,44	0,51	0,67
0,5	0,33	0,34	0,34	0,36	0,38	0,40	0,44	0,48	0,55	0,67	1,00
0,6	0,38	0,38	0,39	0,41	0,43	0,47	0,51	0,57	0,67	0,84	1,50
0,7	0,41	0,42	0,43	0,45	0,48	0,53	0,58	0,66	0,79	1,03	2,33
0,8	0,44	0,45	0,47	0,49	0,53	0,58	0,65	0,75	0,91	1,23	4,00
0,9	0,47	0,48	0,50	0,53	0,57	0,63	0,71	0,83	1,03	1,44	9,00
1	0,50	0,51	0,53	0,57	0,62	0,68	0,78	0,91	1,14	1,66	66,04
1,1	0,52	0,53	0,56	0,60	0,65	0,73	0,83	0,99	1,26	1,89	438,64
1,2	0,55	0,55	0,58	0,63	0,69	0,77	0,89	1,07	1,37	2,11	1694,77
1,3	0,57	0,58	0,61	0,66	0,72	0,82	0,94	1,14	1,48	2,35	5715,76
1,4	0,58	0,59	0,63	0,68	0,76	0,86	1,00	1,21	1,59	2,58	
1,5	0,60	0,61	0,65	0,71	0,79	0,89	1,05	1,28	1,70	2,81	
1,6	0,62	0,63	0,67	0,73	0,82	0,93	1,09	1,34	1,80	3,04	
1,7	0,63	0,64	0,69	0,75	0,84	0,97	1,14	1,41	1,90	3,26	
1,8	0,64	0,66	0,70	0,77	0,87	1,00	1,18	1,47	2,00	3,49	
1,9	0,66	0,67	0,72	0,79	0,90	1,03	1,23	1,53	2,10	3,70	-

$$\lambda = 8\ \frac{\text{cl}}{\text{h}} \qquad \mu = 10\ \frac{\text{cl}}{\text{h}} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10} = 0{,}80$$

$$L_C = 1{,}23$$

$$L = L_c + [1 - p(0)] = 1{,}23 + 0{,}64 = 1{,}87\ \text{cl}$$

$$\text{Ingreso} = u \cdot \bar{\mu} = u \cdot \mu \cdot H = 50 \cdot 10 \cdot 0{,}6377 = 368{,}85\ \frac{\$}{\text{h}}$$

$$LC = u \cdot \bar{R} = u \cdot (\lambda - \bar{\lambda}) = 50 \cdot (8 - 6{,}377) = 81{,}15\ \frac{\$}{\text{h}}$$

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\mu}} = \frac{1{,}23}{6{,}3770} = 0{,}193\,\text{h} = 11{,}58\ \text{min}$$

$$W = W_C + T_S = 0{,}193 + 0{,}10 = 0{,}293\ \text{h} = 17{,}58\ \text{min}$$

Un taller de reparación de automóviles tiene una capacidad de reparación de 5 autos por día. El sector recibe por día 10 clientes, pero éstos tienen impaciencia. Ha sido posible determinar que la probabilidad de que un cliente que llega al taller deje su auto para arreglar está dada por la expresión:

$$p(i/n) = 1 - \frac{n}{3}$$

siendo "n" la cantidad de autos en el taller en el instante de arribo de un cliente.

Formular un modelo matemático que permita determinar las probabilidades asociadas, la ganancia esperada del taller (suponiendo que, en promedio, cada automóvil deja una ganancia de $150), la longitud de cola promedio y el tiempo promedio que transcurre desde que un cliente deja su auto en el taller hasta que éste está reparado (asumiendo 8 horas de trabajo por día).

l = 10 autos/DIA
m = 5 autos/DIA
r = 2

$$\lambda_n = \lambda \cdot \left[1 - \frac{n}{3}\right] = \begin{cases} \lambda & n = 0 \\ \frac{2}{3}\lambda & n = 1 \\ \frac{1}{3}\lambda & n = 2 \\ 0 & n = 3 \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

$$p(1) = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p(0) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(1) = \rho \cdot p(0)$$

$$p(2) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p(1) = \frac{2}{3}\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(2) = \frac{2}{3}\rho^2 \cdot p(0)$$

$$p(3) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p(2) = \frac{1}{3}\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{2}{3}\frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(3) = \frac{2}{9}\rho^3 \cdot p(0)$$

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1$$

$$p(0) + \rho \cdot p(0) + \frac{2}{3}\rho^2 \cdot p(0) + \frac{2}{9}\rho^3 \cdot p(0) = 1$$

$$p(0) = \frac{1}{1 + \rho + \frac{2}{3} \cdot \rho^2 + \frac{2}{9} \cdot \rho^3} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{2}{3} \cdot 2^2 + \frac{2}{9} \cdot 2^3} = 0{,}1343$$

p(1) = 0,2687

p(2) = 0,3582

p(3) = 0,2388

$$\bar{\mu} = \mu \cdot H = \mu \cdot \left[1 - p(0)\right] = 5 \cdot 0{,}8657 = 4{,}33\ \frac{\text{autos}}{\text{día}}$$

$$\text{Ganancia esperada} = u \cdot \bar{\mu} = 150 \cdot 4{,}33 \cong 649{,}5\ \frac{\$}{\text{día}}$$

$$L = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) = 1{,}70\ \text{autos}$$

$$L_C = 0 \cdot p(1) + 1 \cdot p(2) + 2 \cdot p(3) = 0{,}84\ \text{autos}$$

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\mu}} = \frac{0{,}84}{4{,}33} = 0{,}1940\ \text{dia} = 1{,}55\ \text{h}$$

$$W = W_C + T_S = \left(0{,}1940 + 0{,}2\right)\text{día} = 0{,}394\ \text{día} = 3{,}15\ \text{h}$$