Tutorial Teoría de Colas
Parte 3

El tema debe estudiarse junto con:

- Miguel Miranda; Teoría de Colas (Educa)
- Guía de Trabajos Prácticos (tema 10)
- Tutoriales guía TP
- Material de apoyo del Campus

“R”- Paquete *queueing*

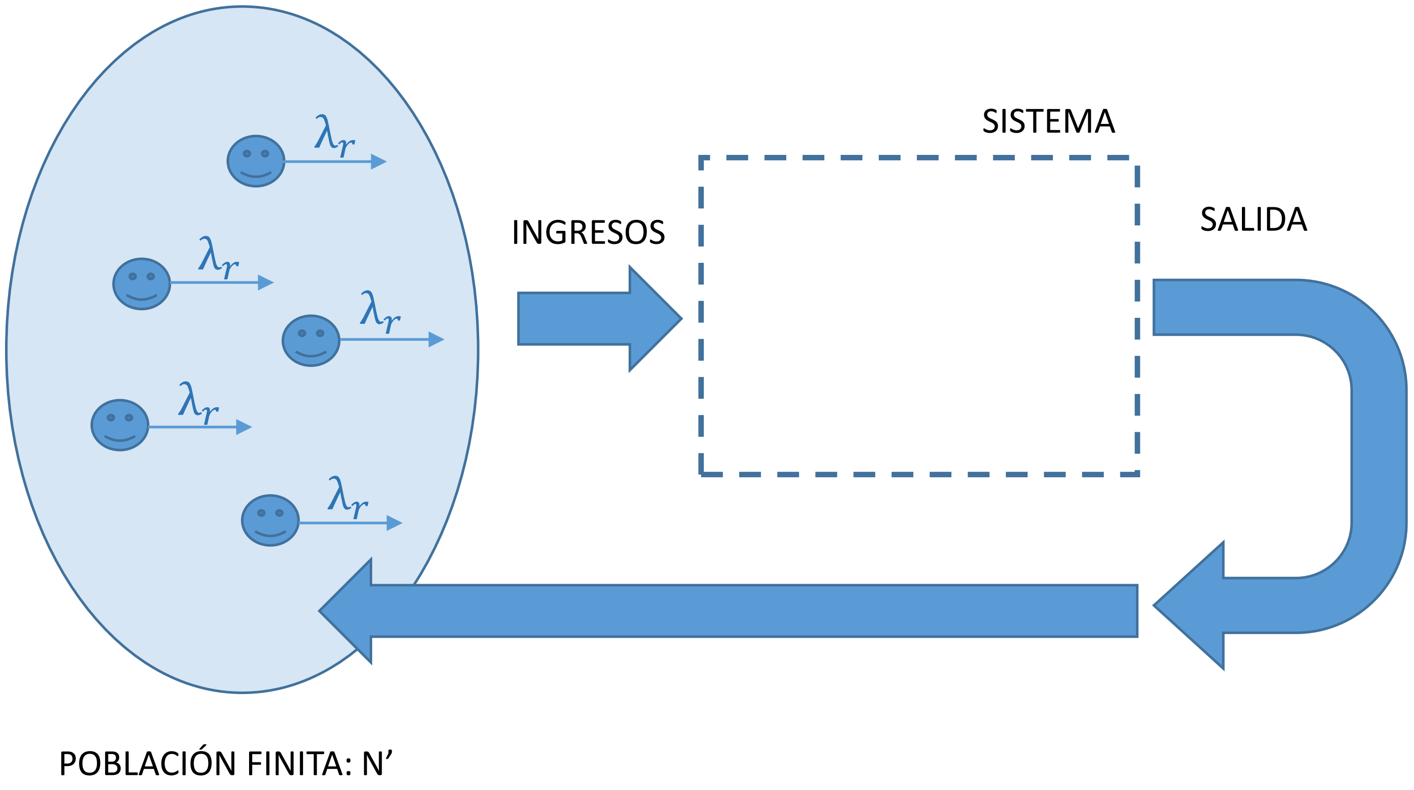
El paquete resuelve una cantidad importante de modelos de colas. En el CAMPUS encontrarán un script que contiene la mayoría de los ejemplos del libro *Teoría de Colas* de Miguel Miranda. El script es útil para trabajar los ejemplos del libro, realizar sensibilidades y expandir el alcance de los ejemplos.

Tutorial Teoría de Colas
Parte 3

- Sistemas de población finita
- Sistemas con interrupción de servicio
- Redes cerradas
- Propiedad PASTA

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas de población finita

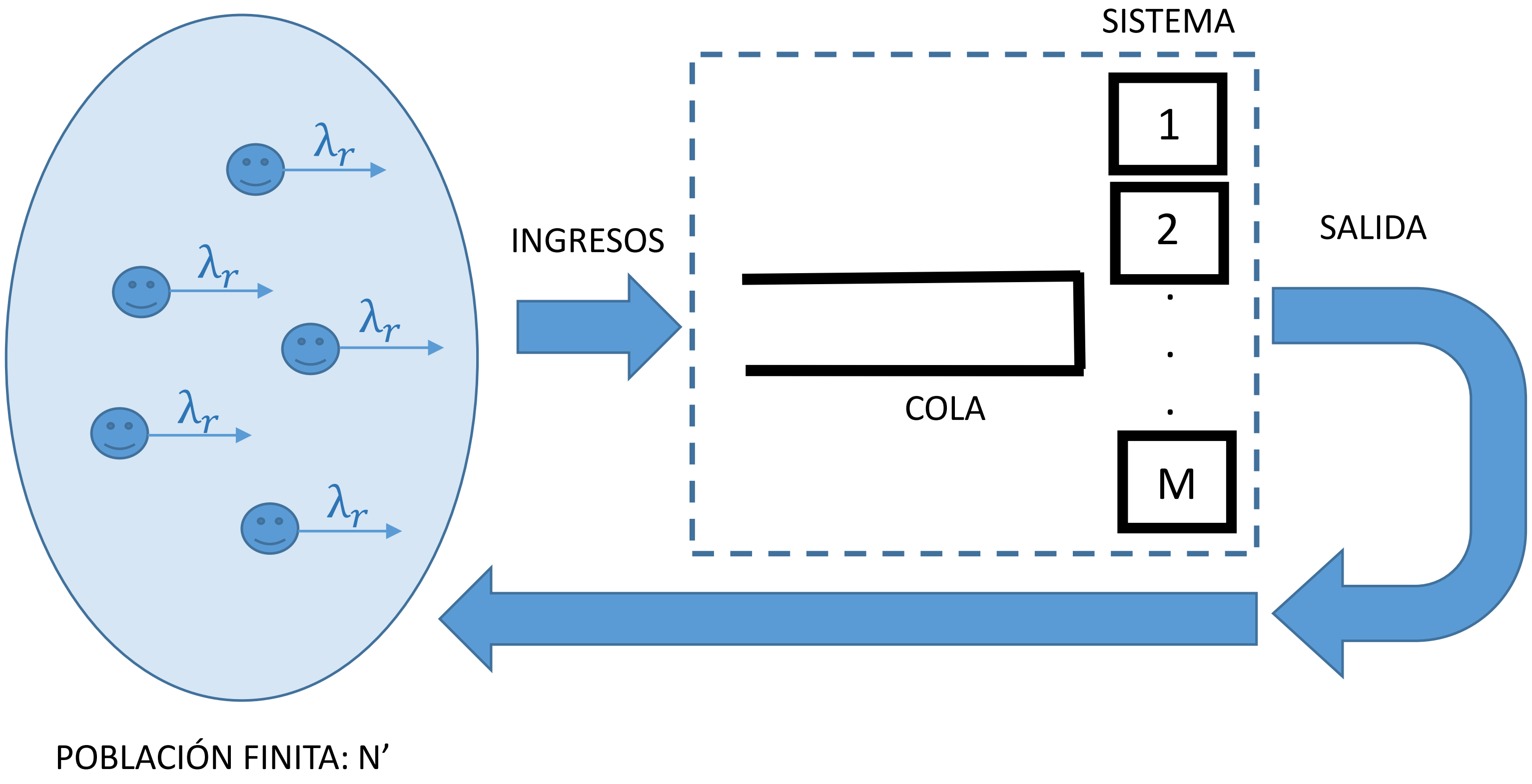


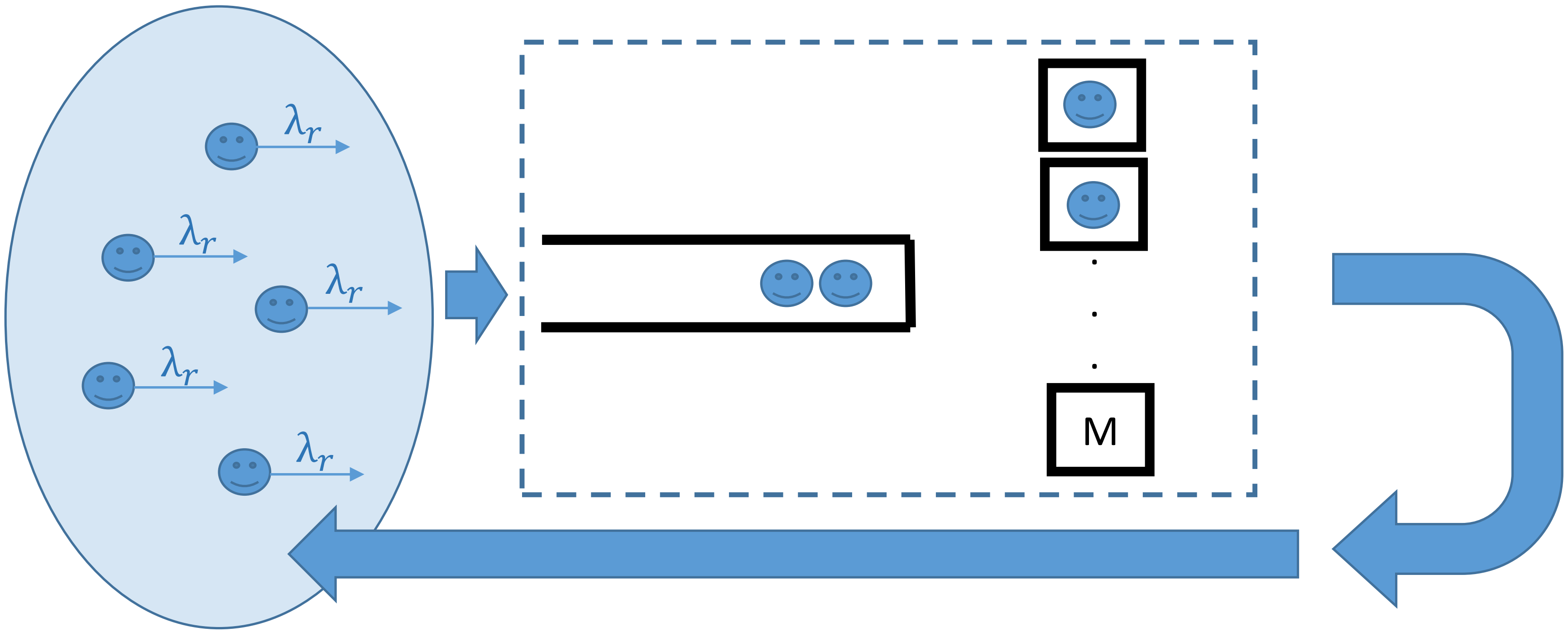
Para modelar este tipo de sistemas utilizamos un nuevo parámetro λ_r que es la frecuencia con la que un cliente requiere el servicio en el sistema
Es decir, el número promedio de veces que, por unidad de tiempo, un cliente que está fuera del sistema llega para recibir el servicio.

$T_r = \frac{1}{\lambda_r}$ es el tiempo medio entre llegadas de un mismo cliente al sistema. Es el tiempo medio de permanencia fuera del sistema para un cliente.

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas de población finita. P/P/M (N’)





	Fuera del sistema		Cola		Canales de atención		Total
Número promedio de clientes	J		L_c		H		$N' = J + L_c + H$
Tiempo promedio de permanencia	$U = T_r = 1/\lambda_r$		W_c		$T_s = 1/\mu$		$U + W_c + T_s$
Troughput = $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$	J/U	=	L_c/W_c	=	H/T_s	=	$N'/(U + W_c + T_s)$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas de población finita

$$J = N'.\frac{U}{T_s + U + W_c}$$

$$L_c = N'.\frac{W_c}{T_s + U + W_c}$$

$$H = N'.\frac{T_s}{T_s + U + W_c}$$

Factor de eficiencia
A menor tiempo en cola mayor es el factor de eficiencia

$$F = \frac{T_s + U}{T_s + U + W_c} = \frac{H + J}{N'} \quad (1)$$

Factor de servicio

$$X = \frac{T_s}{T_s + U} = \frac{H}{H + J} \quad (2)$$

$$X = \frac{T_s}{T_s + U} = \frac{\lambda_r}{\lambda_r + \mu}$$

$$\left.\begin{aligned} (1) &\longrightarrow F.N' = H + J \\ (2) &\longrightarrow \frac{H}{X} = H + J \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{H = F.N'.X}$$

$$(1) \longrightarrow J = F.N' - H$$

$$J = F.N' - F.N'.X \longrightarrow \boxed{J = F.N'.(1 - X)}$$

$$N' = J + L_c + H$$

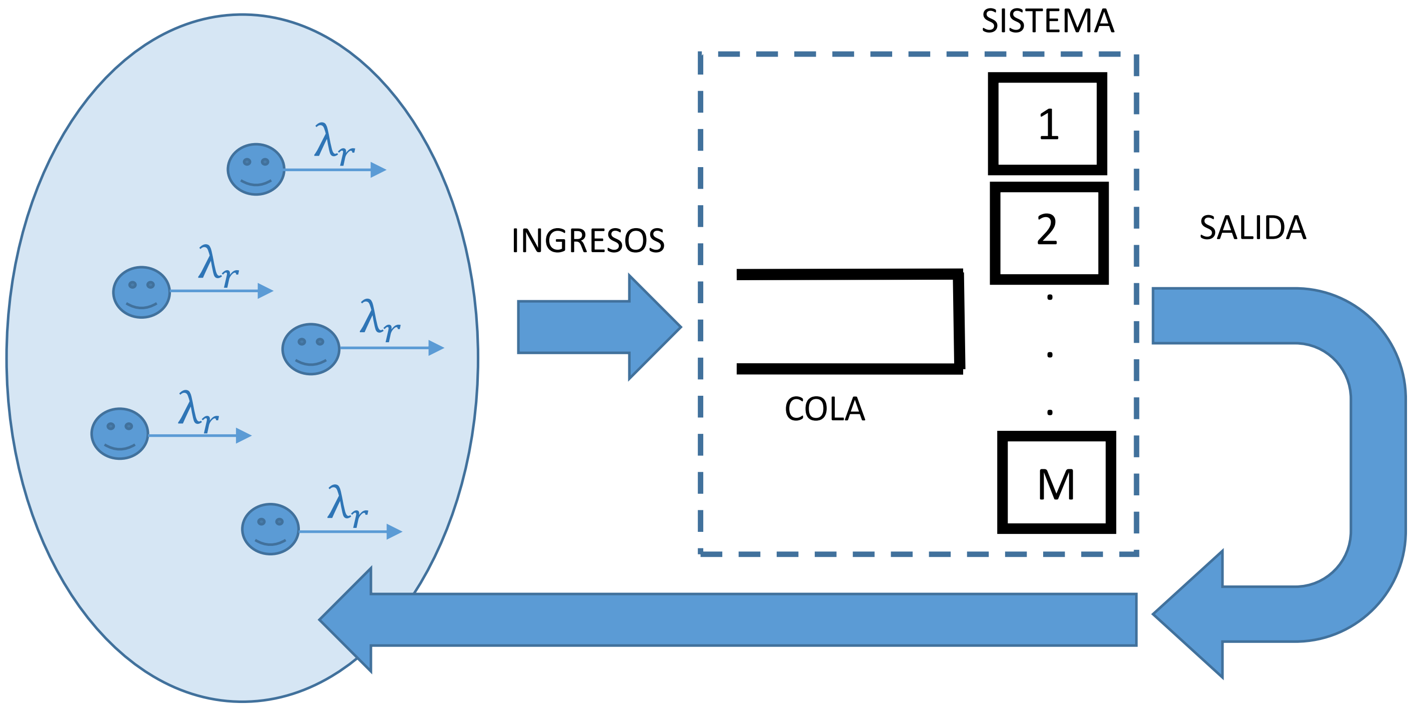
$$L_c = N' - J - H$$

$$L_c = N' - F.N'.(1 - X) - F.N'.X$$

$$\boxed{L_c = N'.(1 - F)}$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas de población finita. P/P/M (N’)



$N'; M; X$

Tablas de Peck & Hazelwood

$F; D$

$$F = \frac{T_S + U}{T_S + U + W_c}$$

$$H = F.N'.X$$

$$J = F.N'.(1 - X)$$

$$L_c = (1 - F).N'$$

$$W = W_c + T_S$$

$$L = L_c + H$$

Tutorial Teoría de Colas
Sistemas de población finita

Notar que en los sistemas de población finita los arribos no son equiprobables en un intervalo Δt.
La probabilidad de un arribo en el intervalo Δt depende del número de clientes en el sistema

***Probabilidad de esperar*:**

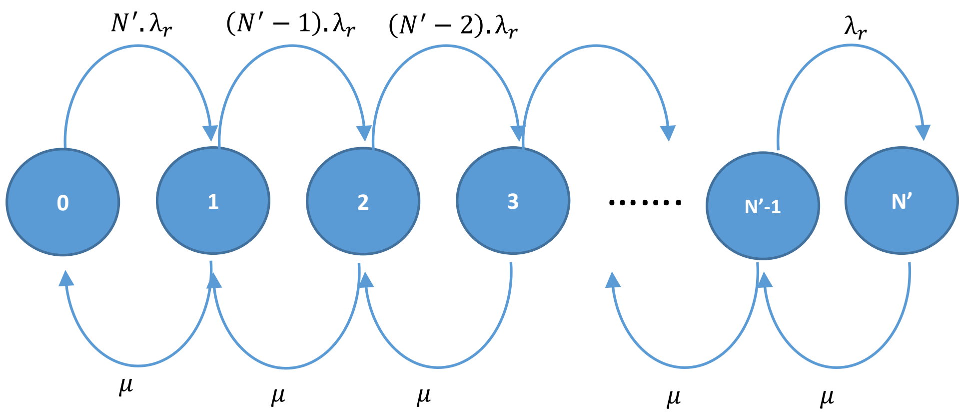
$$D \neq p(M \leq n < N')$$

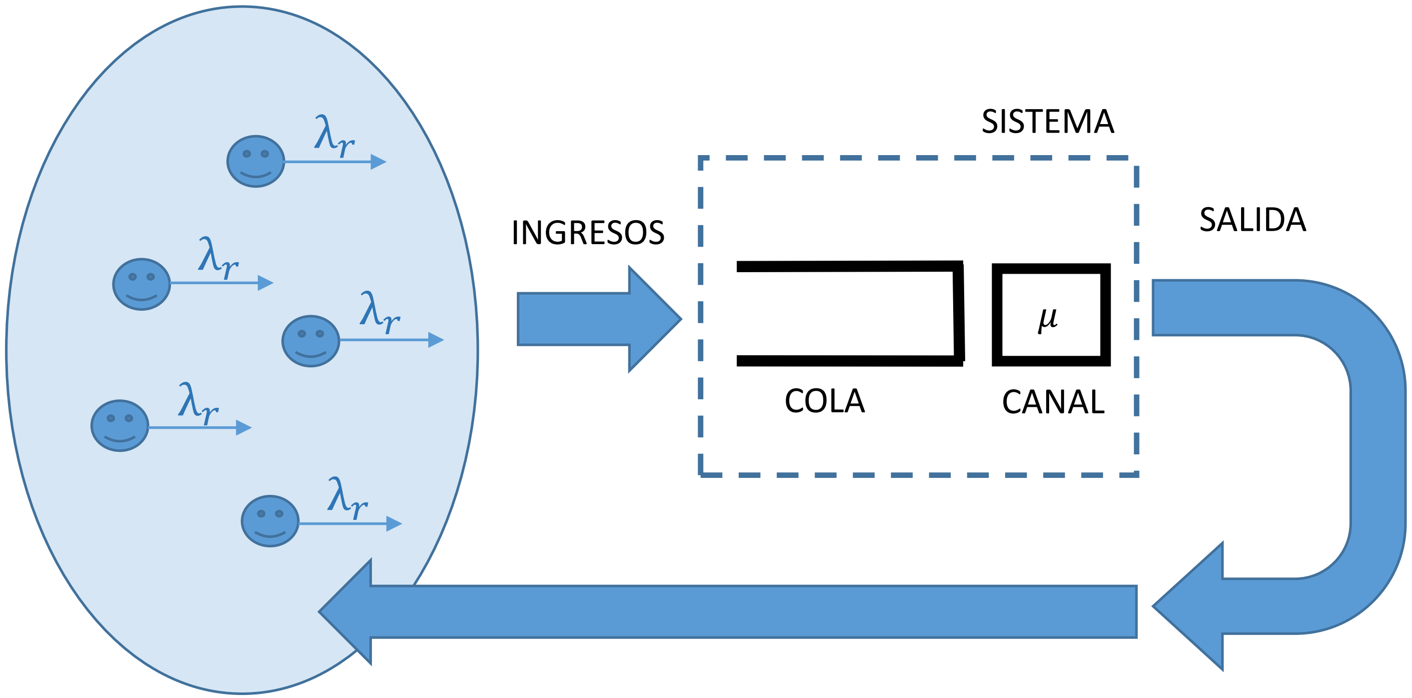
$$D = \frac{\text{número de clientes que piden el servicio en } \Delta t \text{ y tienen que esperar}}{\text{número de clientes que piden el servicio en } \Delta t}$$

$$\mathrm{D} = \frac{\sum_{n=M}^{n=N'-1}(N'-n).p_n.\cancel{\lambda_r}.\Delta t}{\sum_{n=0}^{n=N'-1}(N'-n).p_n.\cancel{\lambda_r}.\Delta t} = \frac{\sum_{n=M}^{n=N'-1}(N'-n).p_n}{\sum_{n=0}^{n=N'-1}(N'-n).p_n} \Rightarrow D = \frac{1}{J}.\sum_{M}^{N'-1}(N'-n).p_n$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas de población finita. P/P/1 (N’)





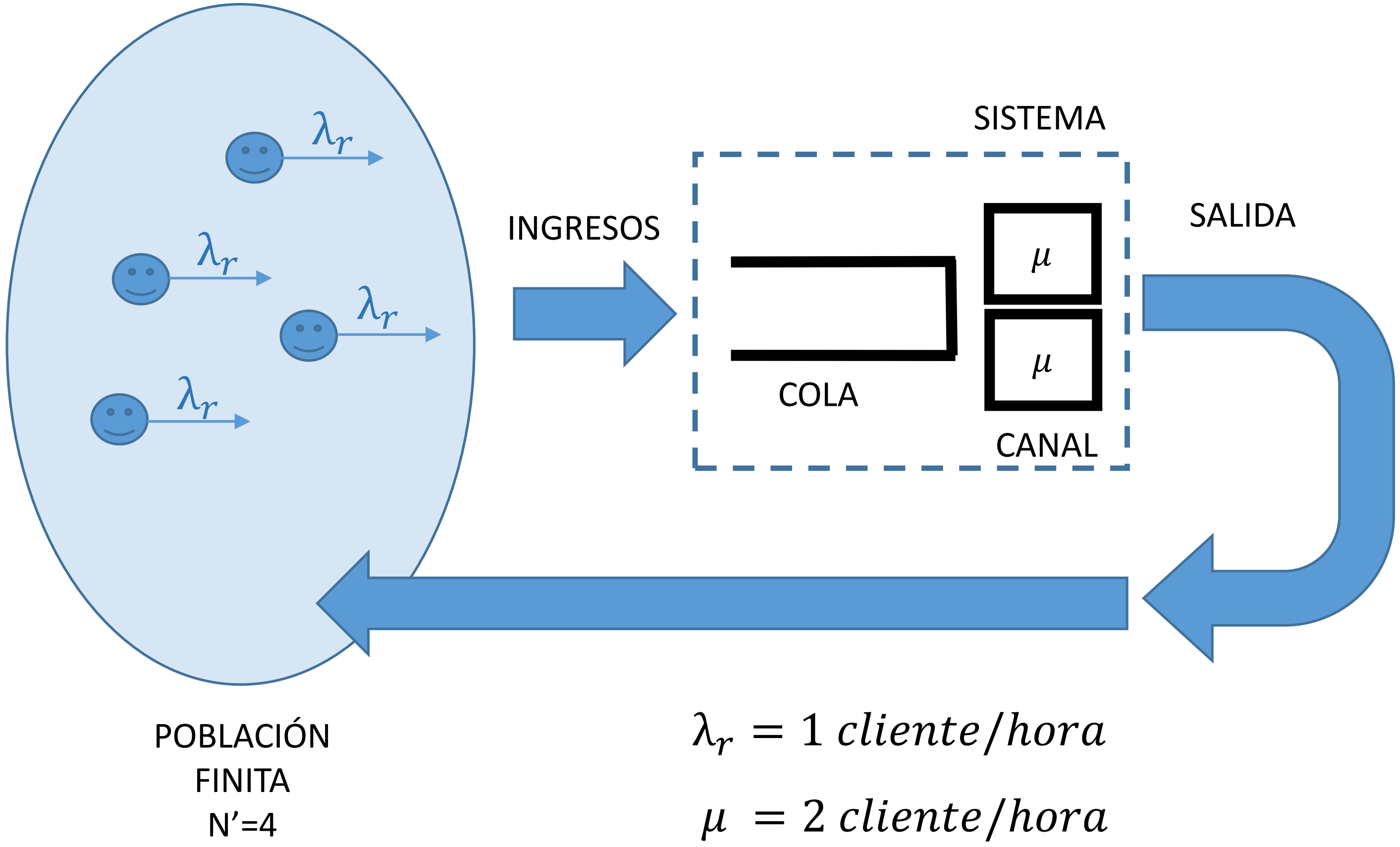
$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} . p_{n-1} \qquad \rho_r = \frac{\lambda_r}{\mu}$$

$$p_n = \frac{N'!}{(N'-n)!} . \rho_r^n . p_0$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=N'} \frac{N'!}{(N'-n)!} . \rho_r^n}$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas de población finita. Ejemplo P/P/2/(4)



$$\lambda_r = 1\ cliente/hora$$

$$\mu = 2\ cliente/hora$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas de población finita. Ejemplo P/P/2/(4)

$$\lambda_r = 1\frac{cliente}{hora} \rightarrow U = 1$$

$$\mu = 2\frac{cliente}{hora} \rightarrow T_s = 0{,}5$$

$$N' = 4$$

$$M = 2$$

$$X = \frac{T_s}{T_s + U} = \frac{0{,}5}{0{,}5 + 1} = 0,\hat{3}$$

$$D = 0{,}273$$

$$F = 0{,}948$$

$$F = \frac{T_S + U}{T_S + U + W_c} \rightarrow W_c = 0{,}08$$

$$H = F.N'.X = 1{,}26$$

$$J = F.N'.(1 - X) = 2{,}53$$

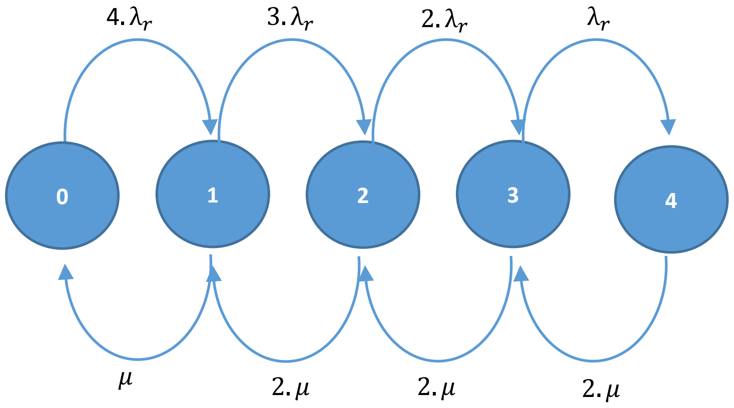
$$L_c = (1 - F).N' = 0{,}21$$

$$W = W_c + T_S = 0{,}58$$

$$L = L_c + H = 1{,}47$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas de población finita. Ejemplo P/P/2/(4)



$$\lambda_r = 1\ cliente/hora$$

$$\mu = 2\ cliente/hora$$

D=

	0	1	2	3	4
0	-4	4	0	0	0
1	2	-5	3	0	0
2	0	4	-6	2	0
3	0	0	4	-5	1
4	0	0	0	4	-4

A=

	0	1	2	3	4
0	-4	4	0	0	1
1	2	-5	3	0	1
2	0	4	-6	2	1
3	0	0	4	-5	1
4	0	0	0	4	1

A^{-1}=

	0	1	2	3	4
0	-0.38	-0.26	0.05	0.28	0.32
1	-0.18	-0.36	-0.02	0.24	0.31
2	-0.1	-0.21	-0.16	0.17	0.29
3	-0.05	-0.09	-0.07	-0.03	0.24
4	0.18	0.37	0.28	0.14	0.03

B=

0	0	0	0	1

p

0.18	0.37	0.28	0.14	0.03

Tutorial Teoría de Colas

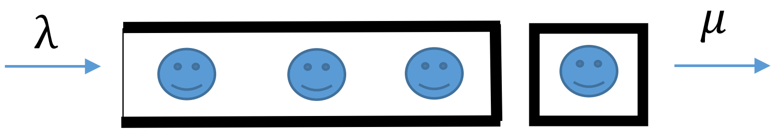
Sistemas de población finita. Ejemplo

Script disponible en el Campus

```
# Ejemplo M/M/2/(4) (Población finita)

library(queueing)
lambda<-1          # (clientes/hora)
mu<-2              # (clientes/hora)
k<-4               # capacidad del sistema
c<-2               # número de canales de atención

# Resolución del modelo
Ejemplo <- NewInput.MMCKK(lambda, mu, c, k)
model <- QueueingModel(Ejemplo)
CheckInput.i_MMCKK(Ejemplo)
Report(model)

The inputs of the model M/M/c/K/K are:
lambda: 1, mu: 2, c: 2, k: 4, method: 0
The outputs of the model M/M/c/K/K are:

The probability (p0, p1, ..., pk) of the clients in the system are:
0.183908 0.3678161 0.2758621 0.137931 0.03448276
The mean think time is : 1
The traffic intensity is: 1.26436781609195
The server use is: 0.632183908045977
The mean number of clients in the system is: 1.47126436781609
The mean number of clients in the queue is: 0.206896551724138
The mean number of clients in the server is: 1.26436781609195
The mean time spend in the system is: 0.581818181818182
The mean time spend in the queue is: 0.0818181818181818
The mean time spend in the server is: 0.5
The mean time spend in the queue when there is queue is: 0.3
The throughput is: 2.52873563218391
```

Tutorial Teoría de Colas

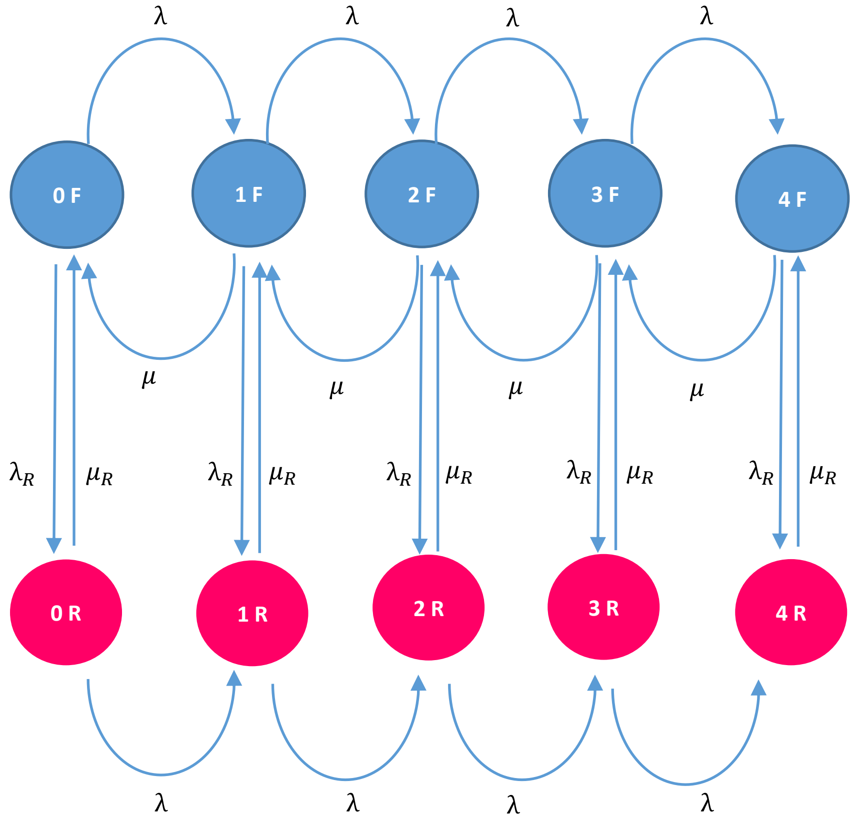
Sistemas con interrupción del servicio



λ_R : Cantidad promedio de interrupciones por unidad de tiempo de funcionamiento del sistema (La inversa de este parámetro es el tiempo promedio que transcurre desde que se reanudó el funcionamiento hasta que se produce una interrupción $T_R = 1/\lambda_R$)

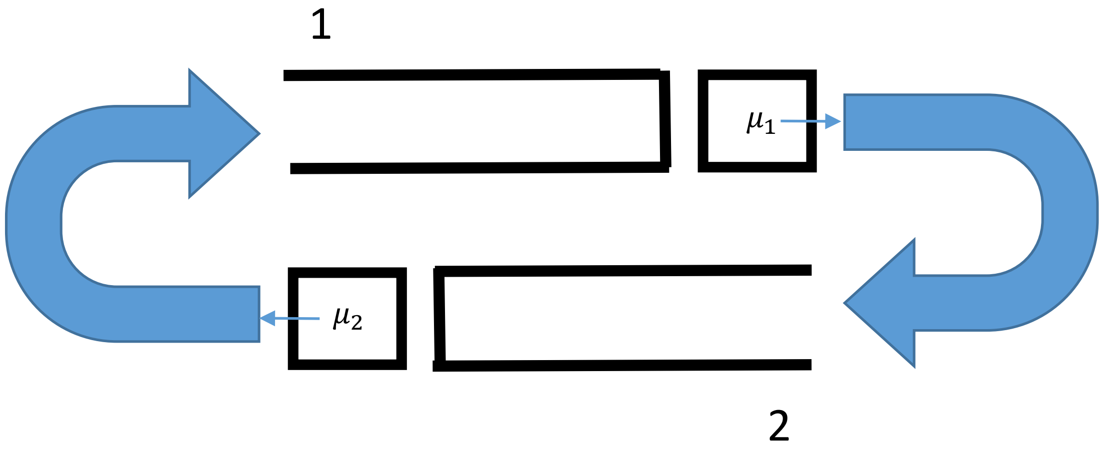
μ_R : Velocidad promedio de restitución del servicio (La inversa de este parámetro es la duración promedio de la interrupción $T_{SR} = 1/\mu_R$)

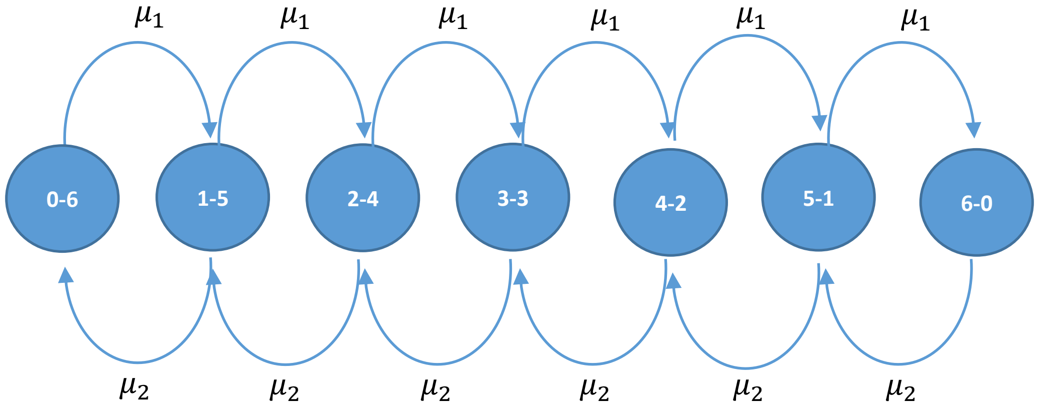
- Clientes Tolerantes
- Se conserva el trabajo



Tutorial Teoría de Colas

Redes cerradas. Ejemplo





$$N' = L = 6$$

$$\mu_1 = 10$$

$$\mu_2 = 15$$

$$p_n = p_0 \left[\frac{\mu_2}{\mu_1}\right]^n$$

$$\sum_{n=0}^{n=6} p_n = 1$$

Tutorial Teoría de Colas

Redes cerradas. Ejemplo

p(0,6) = 0,0311
p(1,5) = 0,0466
p(2,4) = 0,0699
p(3,3) = 0,1049
p(4,2) = 0,1536
p(5,1) = 0,2360
p(6-0) = 0,3541

$$L_1 = 0.p(0{,}6) + 1.p(1{,}5) + 2.p(2{,}4) + 3.p(3{,}3) + 4.p(4{,}2) + 5.p(5{,}1) + 6.p(6{,}0) = 4{,}44$$

$$L_2 = 6.p(0{,}6) + 5.p(1{,}5) + 4.p(2{,}4) + 3.p(3{,}3) + 2.p(4{,}2) + 1.p(5{,}1) + 0.p(6{,}0) = 1{,}56$$

$$L_1 + L_2 = N' = 6$$

$$H_1 = \left(1 - p_{0,6}\right) = 0{,}9689$$

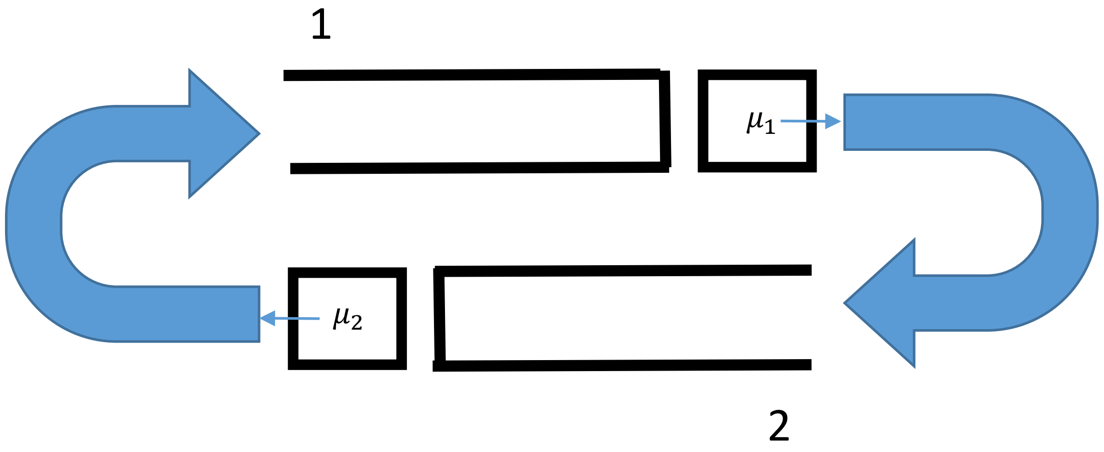
$$H_2 = \left(1 - p_{6,0}\right) = 0{,}6459$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \mu_1.H_1 = 9{,}689 \\ \lambda = \mu_2.H_2 = 9{,}689 \end{array}\right\} \text{Tasa de transferencia}$$

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = \dfrac{L_1}{\lambda} = 0{,}458 \\[2em] W_2 = \dfrac{L_2}{\lambda} = 0{,}161 \end{array}\right\} W = W_1 + W_2 = 0{,}619$$

Tutorial Teoría de Colas

Redes cerradas. Ejemplo



$$N' = L = 6$$

$$\mu_1 = 10$$

$$\mu_2 = 15$$

Script disponible en el Campus

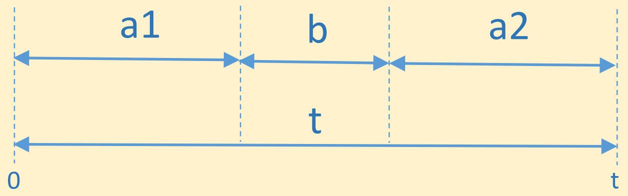
```
rm(list=ls())
dev.off()
cat("\014")

# Ejemplo Red cerrada

library(queueing)
m<-c(0,1,1,0)
prob<-matrix(data=m, nrow=2, ncol=2, byrow=TRUE)
prob

n<-6                                 # número de clientes en el sistema
z<-0                                 # think time of the client ?
operational<-FALSE                   # los valores de la matriz prob son probabilidades

n1 <- NewInput.MM1(lambda=0, mu=10)    # subsistema 1
n2 <- NewInput.MM1(lambda=0, mu=15)    # subsistema 2

# Resolución del modelo
cjn1 <- NewInput.CJN(prob, n, z, operational, 0, 0.001, n1, n2)
model<-QueueingModel(cjn1)


print(summary(model), digits=4)
     L      W     X    Lk     Wk    Xk    ROk
Net  6 0.3096 19.38    NA     NA    NA     NA
Nd1 NA     NA    NA 4.435 0.4577 9.689 0.9689
Nd2 NA     NA    NA 1.565 0.1615 9.689 0.6459

Report(model)
The outputs of the closed Jackson network are:

---------- Complete network -------------------------

The mean number of clients in the network is: 6
The mean time spend in the network is: 0.309624060150376
The throughput of the network is: 19.3783389995143


--------- Per node ---------------------------------

The use of node 1 is: 0.968916949975716
The throughput of node 1 is: 9.68916949975716
The mean number of clients in node 1 is: 4.43516270033997
The mean time spend in node 1 is: 0.457744360902256


The use of node 2 is: 0.645944633317144
The throughput of node 2 is: 9.68916949975716
The mean number of clients in node 2 is: 1.56483729966003
The mean time spend in node 2 is: 0.161503759398496
```

Tutorial Teoría de Colas

Propiedad PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

Los agentes que arriban a un sistema de acuerdo con un proceso Poisson, observan el sistema como si lo hicieran en forma aleatoria.

Observan, por tanto, los parámetros de largo plazo del sistema.



La probabilidad de que un arribo (Poisson) en el intervalo t ocurra en el sub-intervalo b es:

$$\frac{P\{0\ arribos\ en\ a1\ \ y\ \ 1\ arribo\ en\ b\ \ y\ \ 0\ arribos\ en\ a2\}}{P\{1\ arribo\ en\ t\}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda.a1}.\lambda.b.e^{-\lambda.b}.e^{-\lambda a2}}{\lambda.t.e^{-\lambda.t}} = \frac{\lambda.b.e^{-\lambda(a1+b+a2)}}{\lambda.t.e^{-\lambda.t}} =$$

$$= \frac{\lambda.b.e^{-\lambda.t}}{\lambda.t.e^{-\lambda.t}} = \frac{b}{t}$$

que coincide con la probabilidad de que un punto elegido al azar en el intervalo 0-t caiga en el intervalo b.

Tutorial Teoría de Colas

Propiedad PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

Los agentes que arriban siguiendo un proceso Poisson a un sistema, observan el sistema como si lo hicieran en forma aleatoria.

Observan, por tanto, los parámetros de largo plazo del sistema.

Aplicación: Tiempo de espera en sistema P/P/1

Al llegar al sistema el cliente observa (en promedio) una cantidad L de clientes.

Deberá esperar en cola un tiempo $L.T_s$

$$W_c = L.T_s$$

El tiempo total en el sistema será el tiempo en cola más su propio tiempo de servicio:

$$W = L.T_s + T_s$$

Tutorial Teoría de Colas