Tutorial Teoría de Colas
Parte 2

El tema debe estudiarse junto con:

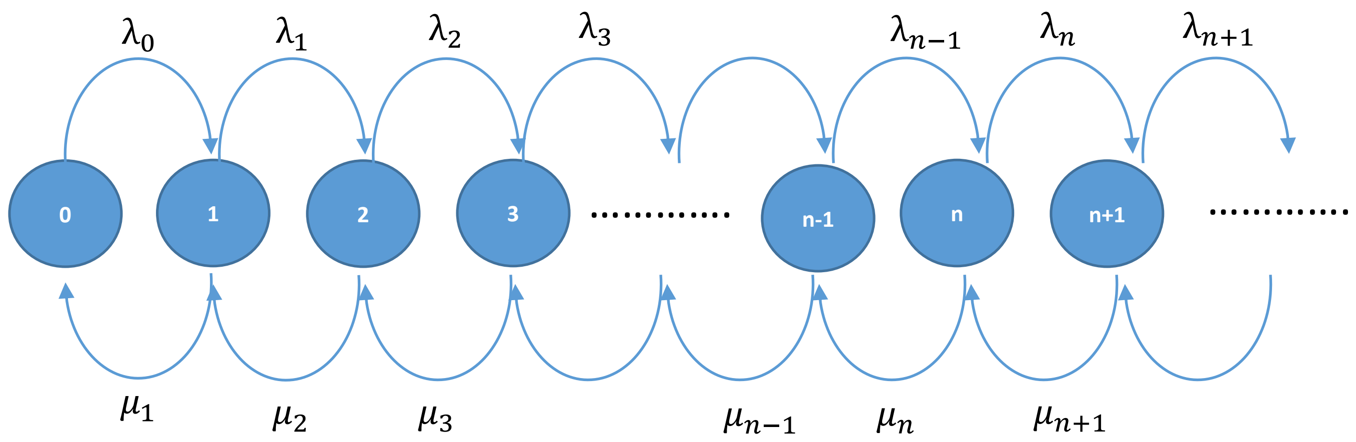
- Miguel Miranda; Teoría de Colas (Educa)
- Guía de Trabajos Prácticos (tema 10)
- Tutoriales guía TP
- Material de apoyo del Campus

“R”- Paquete *queueing*

El paquete resuelve una cantidad importante de modelos de colas. En el CAMPUS encontrarán un script que contiene la mayoría de los ejemplos del libro *Teoría de Colas* de Miguel Miranda. El script es útil para trabajar los ejemplos del libro, realizar sensibilidades y expandir el alcance de los ejemplos.

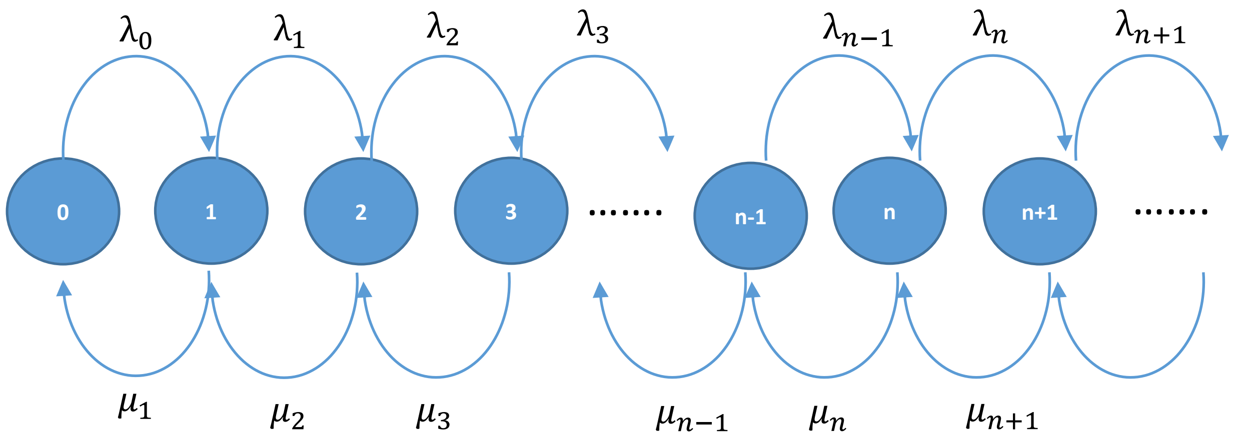
Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos



Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos



$|A| =$

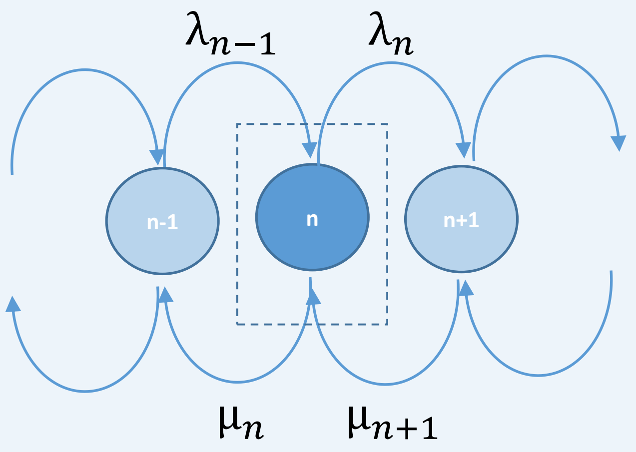
	0	1	2	.....	n-1	n	n+1	.....	
0	$-\lambda_0$	λ_0	0	.....	0	0	0	.....	1
1	μ_1	$-(\mu_1+\lambda_1)$	λ_1	.....	0	0	0	.....	1
2	0	μ_2	$-(\mu_2+\lambda_2)$		0	0	0	.....	1
	.....	.....	......	.....	......	......	.....	....	
n-1	0	0	0	.....	$-(\mu_{n-1}+\lambda_{n-1})$	λ_{n-1}	0	.....	1
n	0	0	0	.....	μ_n	$-(\mu_n+\lambda_n)$	λ_n	.....	1
	0	0	0	.....	.....	μ_{n+1}	$-(\mu_{n+1}+\lambda_{n+1})$	.....	1
	.....	.....	......	.....	......	......	.....	....	1

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos

Balance de flujos probabilísticos

$$p_{n-1}.\lambda_{n-1} - p_n.\lambda_n - p_n.\mu_n + p_{n+1}.\mu_{n+1} = 0$$

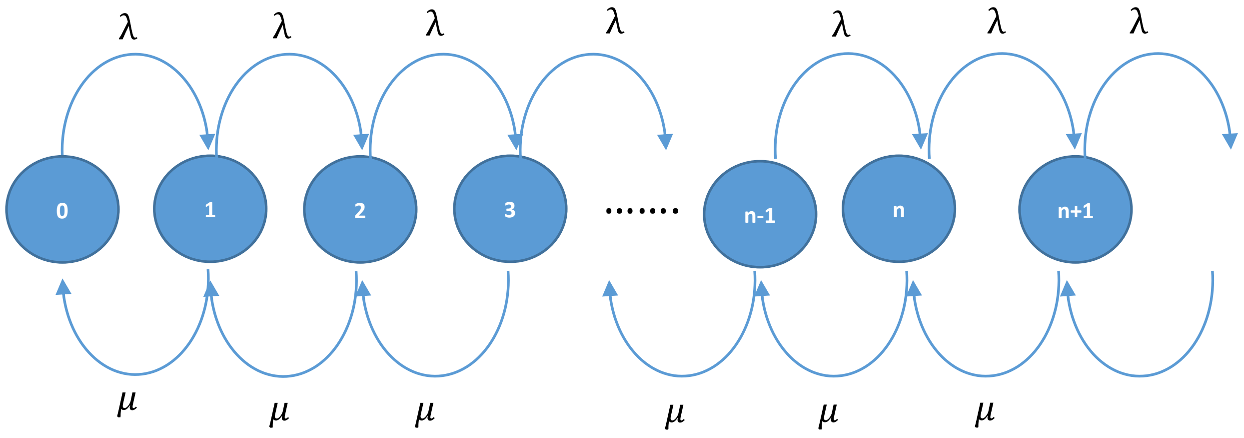


$$p_n = \frac{\prod_{i=0}^{i=n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{i=n} \mu_i}.p_0 \qquad p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}.p_{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} p_n = 1$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/1



$$p_n = \frac{\prod_{i=0}^{i=n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{i=n} \mu_i} . p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n . p_0 = \rho^n . p_o$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} p_n = 1$$

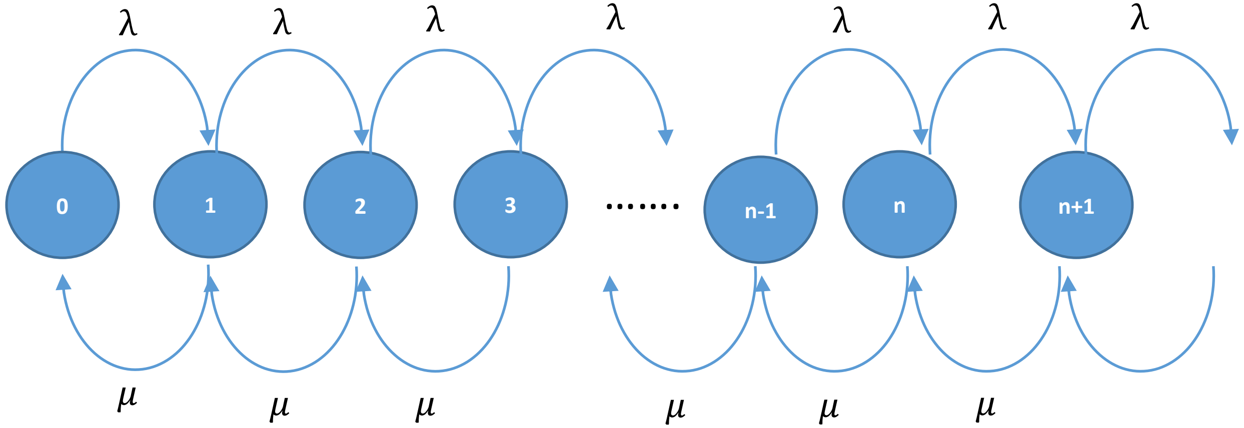
$$\lambda_n = \lambda \qquad n = 0,1,2,3, \dots .$$
$$\mu_n = 0 \qquad n = 0$$
$$\mu_n = \mu \qquad n = 1,2,3, \dots .$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \rho^n p_0 = p_0 . \sum_{n=0}^{n=\infty} \rho^n = p_0 . \frac{1}{1-\rho} = 1$$

Condición de convergencia:
$\rho < 1$
$\lambda < \mu$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/1



$$\lambda_n = \lambda \qquad n = 0,1,2,3, \dots .$$
$$\mu_n = 0 \qquad n = 0$$
$$\mu_n = \mu \qquad n = 1,2,3, \dots .$$

$$p_n = \frac{\prod_{i=0}^{i=n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{i=n} \mu_i} . p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n . p_0 = \rho^n . p_o$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} p_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \rho^n p_0 \;=\; p_0 . \sum_{n=0}^{n=\infty} \rho^n = p_0 . \frac{1}{1-\rho} = 1$$

$$p_0 = (1-\rho) \qquad\qquad p_n = \rho^n . (1-\rho)$$

con $\rho < 1$ $\qquad \rho = \lambda/\mu$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/1. Indicadores de desempeño.

<u>Longitud promedio del sistema</u> (L)

$$L = E(n) = \sum_{n=0}^{n=\infty} n.p_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} n\,.\,\rho^n.(1-\rho) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{n=\infty} n\,.\,\rho^n = \cancel{(1-\rho)}\frac{\rho}{(1-\rho)^{\cancel{2}}} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$\sum_0^\infty \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$$

derivando

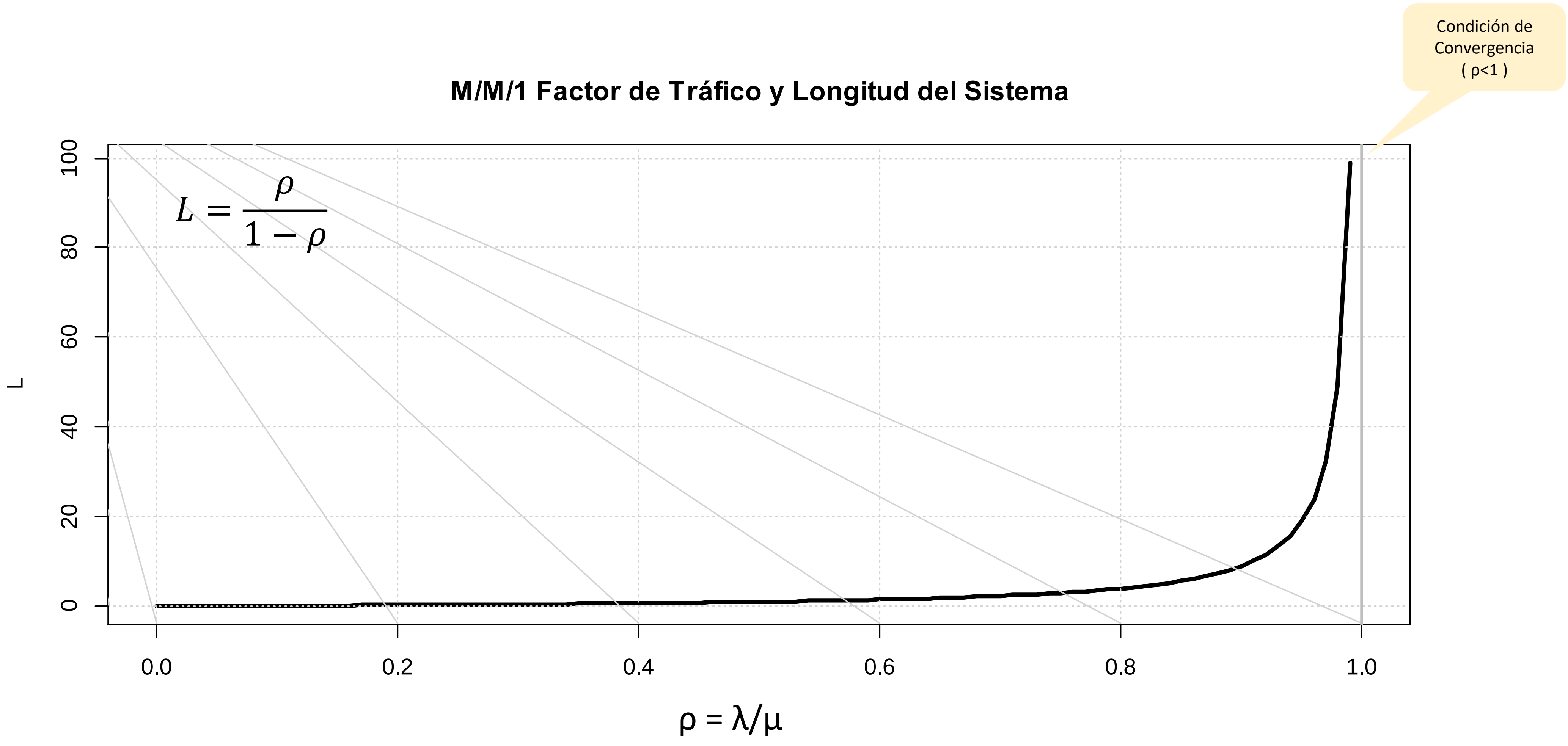
$$\sum_0^\infty n.\rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

multiplicando ambos términos por ρ

$$\sum_0^\infty n.\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/1. Indicadores de desempeño



Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/1. Indicadores de desempeño

Longitud promedio de la cola (L_c)

$$L_c = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1).\, p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n.\, p_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

$$L_c = L - (1 - p_0) = L - \rho$$

$$L_c = L - \rho = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{(\mu - \lambda).\, \mu}$$

Número promedio de canales activos (H)

Para el estado n=0 no hay canales ocupados; para cualquier otro estado hay un canal ocupado

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} 1.\, p_n = 1 - p_0 = \rho$$

$$L = L_c + H$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/1. Indicadores de desempeño

Tiempo promedio en el sistema (W)

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Deducción intuitiva de la Fórmula de Little:

Durante el "tiempo promedio" (W) que un cliente permanece en el sistema , llegan nuevos clientes a una tasa λ.
De modo que al final del tiempo W, se esperan λ.W nuevos clientes en el sistema.
Como en régimen permanente los indicadores de desempeño del sistema son independientes del tiempo; en régimen permanente será L=λ.W siempre.

Tiempo promedio en la cola (W_c)

$$W_c = \frac{L_c}{\lambda} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda).\,\mu} \qquad W = W_c + T_S = W_c + \frac{1}{\mu}$$

Tiempo promedio en la cola cuando hay que esperar ($W_c \,|(n > 0)$)

¿cuánto esperan en promedio los clientes que esperan?

$$W_c|(n > 0) = W$$

Demostrar que el <tiempo promedio en cola, cuando hay que esperar> coincide (en el modelo P/P/1) con el tiempo promedio en el sistema

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/1. Indicadores de desempeño

Probabilidad de que haya una cantidad de clientes mayor a k

$$p(n > k) = \rho^{k+1}$$

$$p(n \geq k) = \rho^{k}$$

Probabilidad de que un cliente permanezca en el sistema un tiempo superior a "t"

$$w(t) = p(W > t) = e^{-(\mu-\lambda).t} = e^{-t/W}$$

Probabilidad de que un cliente permanezca en la cola un tiempo superior a "t"

$$w_c(t) = p(W_c > t) = \rho. e^{-(\mu-\lambda).t} = \rho. e^{-t/W}$$

Tutorial Teoría de Colas

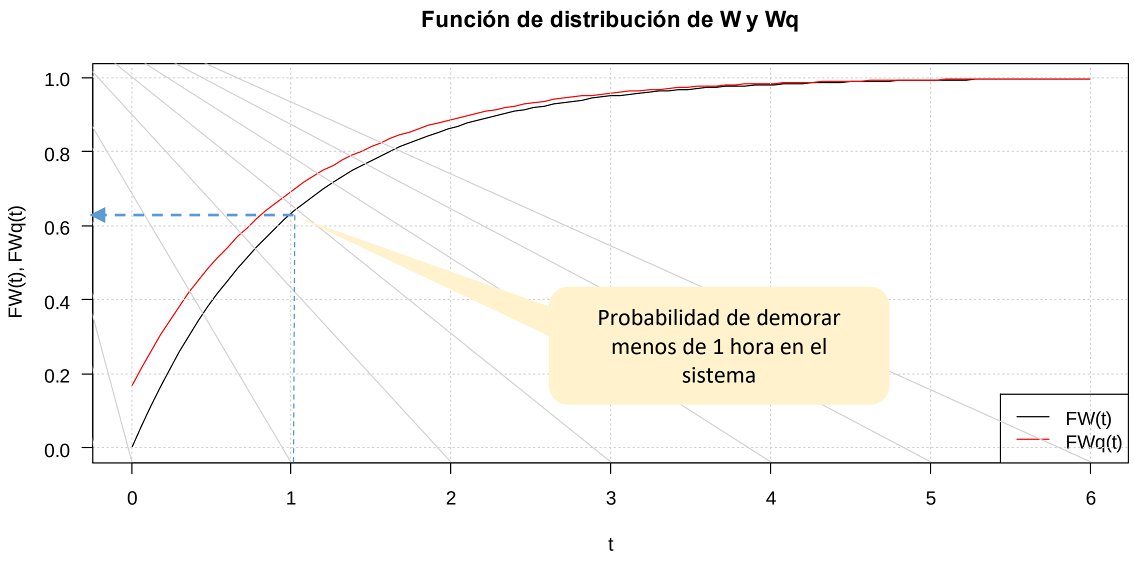
Sistemas Infinitos. Modelo P/P/1

Ejemplo 2.1

Tipo de modelo: P/P/1

λ=5 clientes/hora

μ=6 clientes/hora



Tipo de modelo

Número de estados a calcular (0-n)

```
## Ejemplo 2.1  M/M/1
library(queueing)

lambda<-5   # (clientes/hora)
mu<-6       # (clientes/hora)

Ejemplo_2_1 <- NewInput.MM1(lambda, mu, n=10)
CheckInput(Ejemplo_2_1)

model <- QueueingModel(Ejemplo_2_1)

Report(model)
The inputs of the M/M/1 model are:
lambda: 5, mu: 6, n: 10

The outputs of the M/M/1 model are:

The probability (p0, p1, ..., pn) of the n = 10
clients in the system are:
0.1666667 0.1388889 0.1157407 0.09645062 0.08037551
0.0669796 0.05581633 0.04651361 0.03876134 0.03230112 0.0269176
The traffic intensity is: 0.833333333333333
The server use is: 0.833333333333333
The mean number of clients in the system is: 5
The mean number of clients in the queue is: 4.16666666666667
The mean number of clients in the server is: 0.833333333333333
The mean time spend in the system is: 1
The mean time spend in the queue is: 0.833333333333333
The mean time spend in the server is: 0.166666666666667
The mean time spend in the queue when there is queue is: 1
The throughput is: 5
```

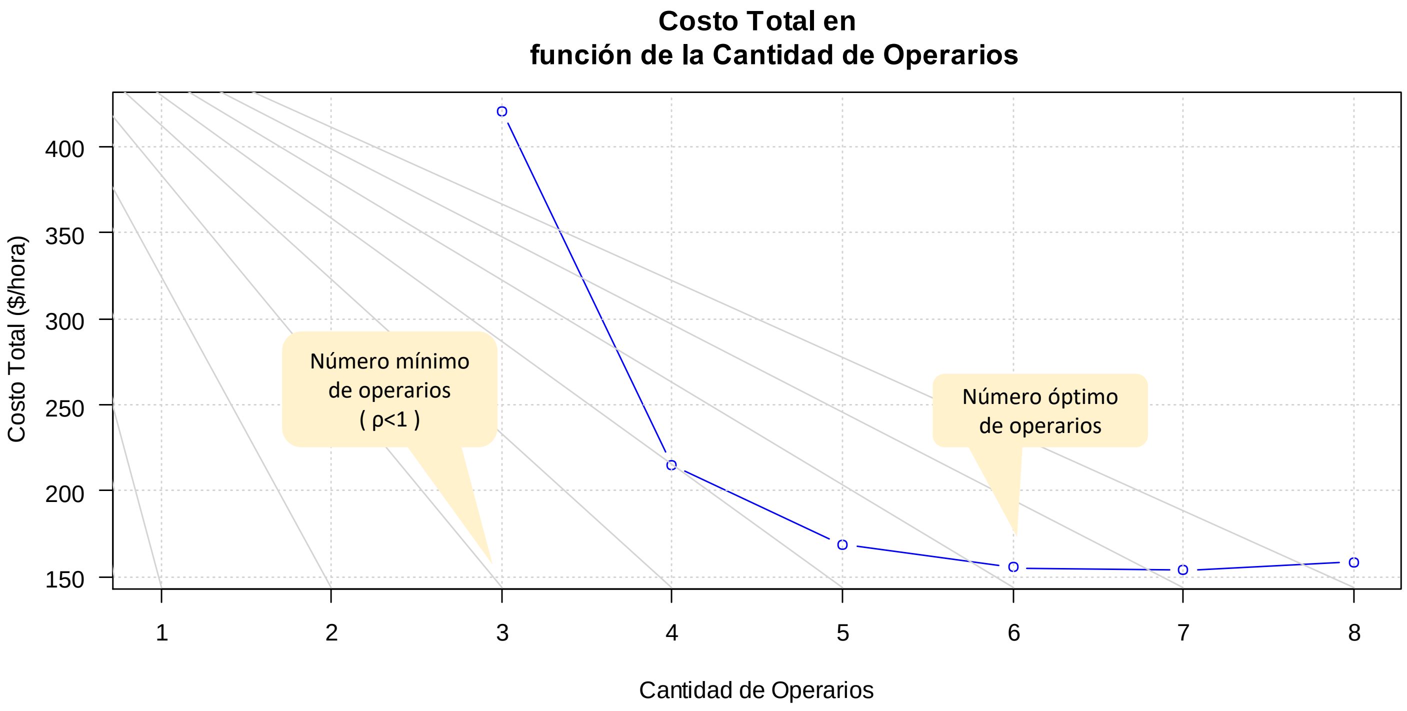
En este ejemplo, los resultados se incorporan al objeto “model”

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/1

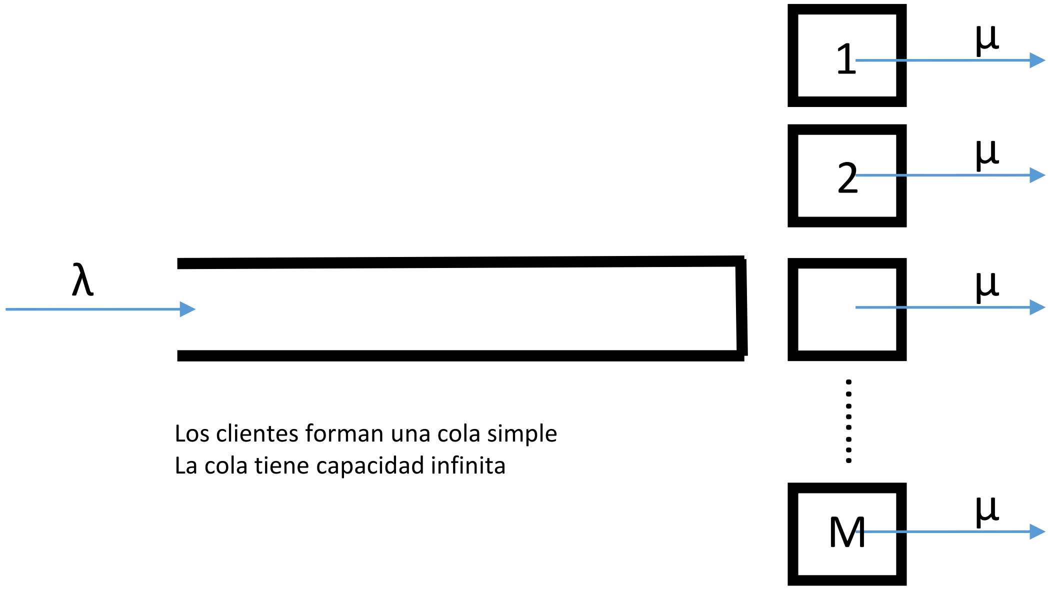
Ejemplo 2.2

Una empresa de transportes tiene su propio centro de lavado de ómnibus. El centro puede lavar a razón de un solo vehículo por vez, pero puede disponer de hasta ocho operarios para esta tarea. El tiempo promedio de lavado de un ómnibus depende de la cantidad de operarios asignados a la operación de lavado, y responde a la siguiente expresión (en horas) $T_S = 0.5\ e^{-0.1\ n}$ *(para n≥1) en donde n es la cantidad de operarios asignados. La tasa promedio de arribos de ómnibus al sistema es 2.5 por hora. Se sabe que el costo del ómnibus no operativo es de $30 por hora, mientras que el salario de cada operario es de $15 por hora. Determinar la cantidad mínima requerida y la cantidad óptima de operarios a asignar a la operación de lavado.*



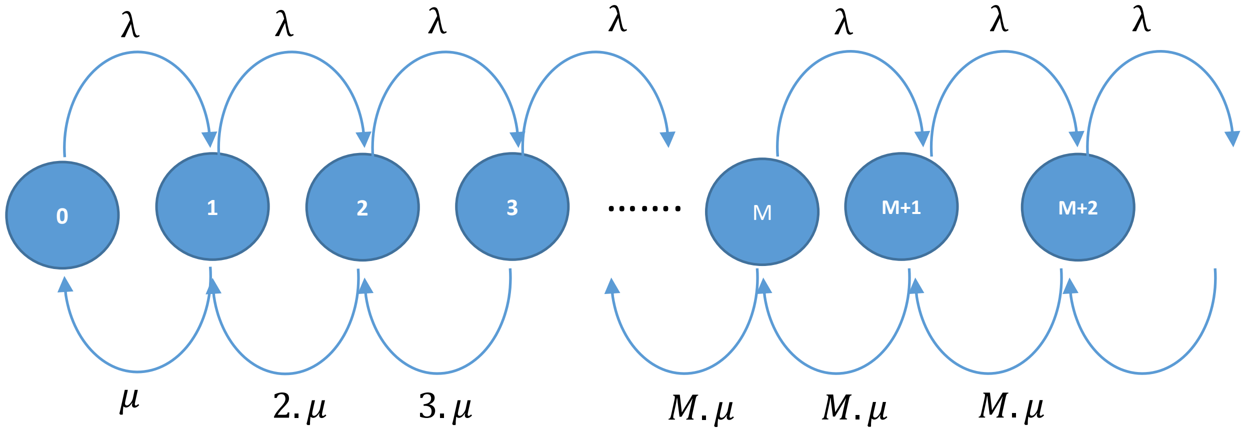
Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/M



Los clientes forman una cola simple
La cola tiene capacidad infinita

Todos los canales trabajan a la misma velocidad
El primer canal que se desocupa comienza a atender al primer cliente en cola



$$\lambda_n = \lambda \qquad n = 0,1,2,3,\ldots.$$

$$\mu_n = 0 \qquad n = 0$$

$$\mu_n = n.\mu \qquad 1 \le n < M$$

$$\mu_n = M.\mu \qquad n \ge M$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/M

$$p_n = \frac{\prod_{i=0}^{i=n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{i=n} \mu_i} . p_0 \quad \Rightarrow \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} . p_{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p_n = \dfrac{\rho^n}{n!} p_0 & para \;\; n < M \\[2ex] p_n = \left[\dfrac{\rho}{M}\right]^n \dfrac{M^M}{M!} p_0 & para \;\; n \geq M \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} p_n = 1 \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{1}{\sum_0^{M-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left[\frac{\rho^M}{(M-1)!\,(M-\rho)}\right]}$$

con

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Condición de convergencia

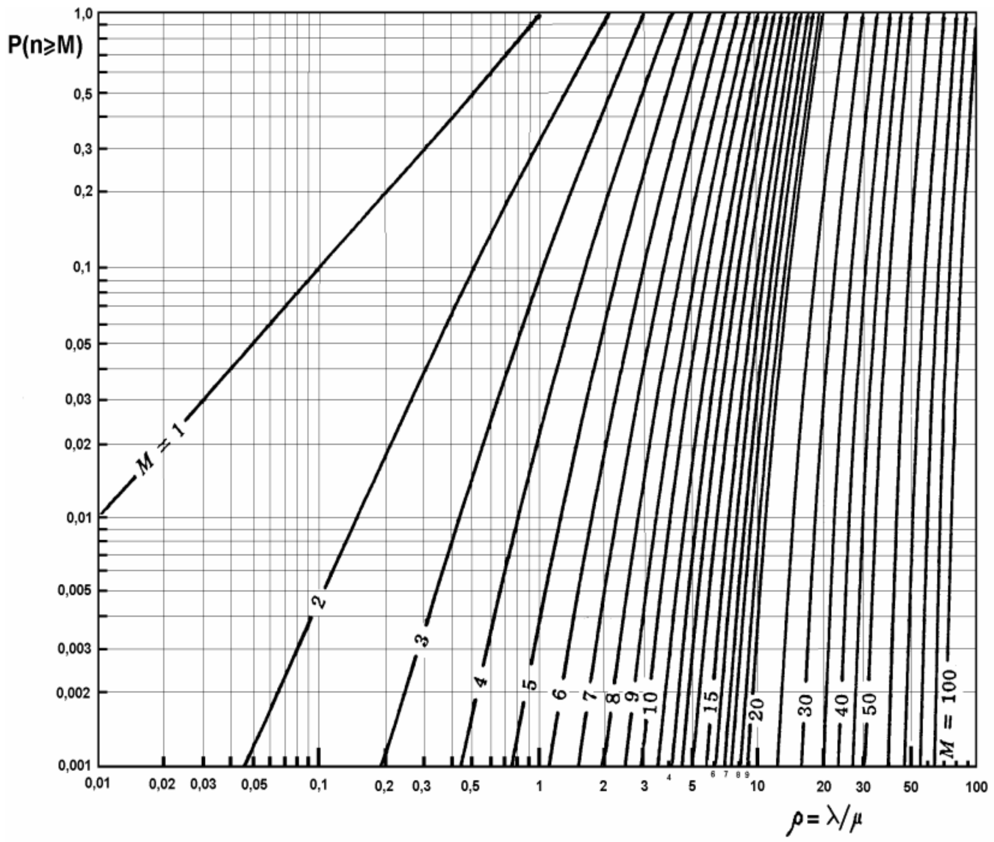
$$\frac{\lambda}{M.\mu} < 1 \qquad \Psi = \frac{\rho}{M} < 1$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/M. Indicadores de desempeño

SISTEMAS P/P/M

Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema tenga que esperar



Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema tenga que esperar.

$$p_{n \geq M} = \sum_{M}^{\infty} p_n = \frac{\rho^M}{(M-1)!\,(M-\rho)} \cdot p_0$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/M. Indicadores de desempeño

$$L = \frac{\lambda.\mu.\rho^{M}}{(M-1)!\ (M.\mu-\lambda)^{2}}\ p_0 + \rho$$

$$L_c = \frac{\lambda.\mu.\rho^{M}}{(M-1)!\ (M.\mu-\lambda)^{2}}\ p_0$$

$$H = \rho$$

Número promedio de canales activos

$$W_c = \frac{L_c}{\lambda}$$

$$PA = \frac{H}{M} = \frac{\rho}{M}$$

Porcentaje de actividad de cada canal

$$W = \frac{L}{\lambda} = W_c + T_s$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/M. Indicadores de desempeño

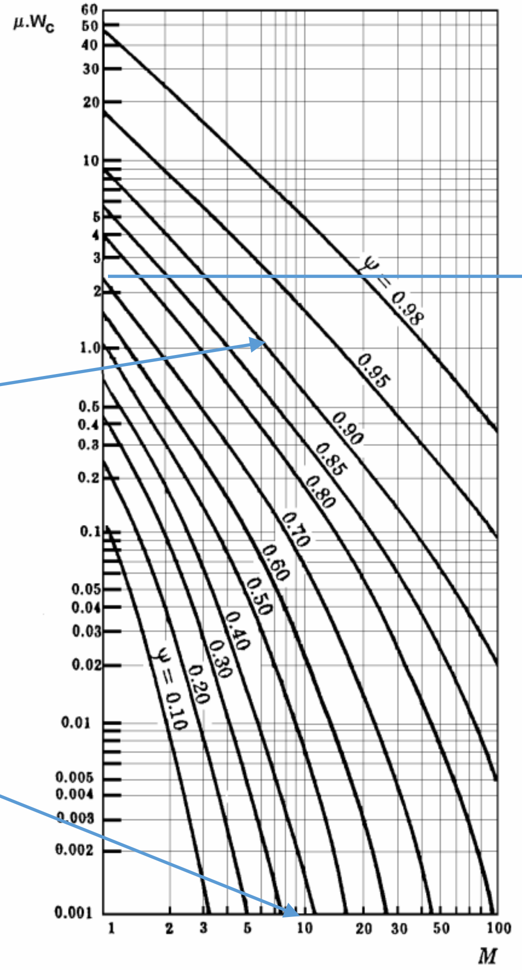
M, λ, μ

$\rho = \lambda/\mu$

$\Psi = \rho/M$

M

$\mu . W_c$ en función de M para distintas relaciones $\Psi = \frac{\rho}{M}$



$\mu . W_c$

W_c

$$W = W_c + \frac{1}{\mu}$$

$$L_c = W_c . \lambda$$

$$L = L_c + H = L_c + \rho$$

Tutorial Teoría de Colas

Sistemas Infinitos. Modelo P/P/M.

Ejemplo 3.1

Tipo de modelo: P/P/4

λ=12 clientes/hora

μ=6 clientes/hora

```
# Ejemplo 3.1   M/M/4/
library(queueing)

lambda<-12        # (clientes/hora)
mu<-6             # (clientes/hora)
c<-4              # Cantidad de canales de servicio
IServ<-50         # Ingreso por cada servicio ($/servicio)

Ejemplo_3_1 <- NewInput.MMC(lambda, mu, c, n=10)
CheckInput.i_MMC(Ejemplo_3_1)
model <- QueueingModel(Ejemplo_3_1)

Report(model)
The inputs of the model M/M/c are:
lambda: 12, mu: 6, c: 4, n: 10, method: Exact

The outputs of the model M/M/c are:

The probability (p0, p1, ..., pn) of the n = 10 clients in the system are:
0.1304348 0.2608696 0.2608696 0.173913 0.08695652 0.04347826 0.02173913
0.01086957 0.005434783 0.002717391 0.001358696
The traffic intensity is: 2
The server use is: 0.5
The mean number of clients in the system is: 2.17391304347826
The mean number of clients in the queue is: 0.173913043478261
The mean number of clients in the server is: 2
The mean time spend in the system is: 0.181159420289855
The mean time spend in the queue is: 0.0144927536231884
The mean time spend in the server is: 0.166666666666667
The mean time spend in the queue when there is queue is: 0.0833333333333333
```

Tipo de modelo

Número de canales

Número de estados a calcular (0-n)

En este ejemplo, los resultados se incorporan al objeto “model”

Tutorial Teoría de Colas