

CADENAS DE MARKOV

GUÍA COMPLEMENTARIA DE PROBLEMAS

Mayo 2021

PROBLEMA #1

Un centro de salud clasifica sus pacientes como internados o externos. Los datos históricos indican que durante el período de una semana, 30% de todos los pacientes externos son dados de alta, 40% continúan siendo externos y 30% son internados. Durante el mismo período de una semana, 50% de todos los pacientes internados pasan a externos, 20% permanecen internados y 30% fallecen. En este momento el centro registra 100 pacientes; 30 internados y 70 externos.

1. Determine cuántos de los pacientes que el centro registra en este momento, habrán sido dados de alta dentro de 2 semanas.
2. Determine cuántos de los pacientes que el centro registra en este momento, habrán fallecido dentro de 2 semanas.
3. Determine cuántos de los pacientes que el centro registra en este momento, habrán sido dados de alta en el largo plazo.
4. Determine cuántos de los pacientes que el centro registra en este momento, habrán fallecido en el largo plazo.
5. Determine cuántas semanas demora en promedio un paciente actualmente internado en obtener el alta.
6. Determine cuántas semanas demora en promedio un paciente actualmente externo en obtener el alta.

PROBLEMA #2

La empresa AAA tiene actualmente el 90% de participación en el mercado de uno de sus productos de consumo masivo. El resto del mercado está en manos de compañías que tradicionalmente han tenido productos de menor calidad que AAA. Durante mucho tiempo AAA ha sostenido una posición muy sólida en este producto y ha gozado de la preferencia de los consumidores. Recientemente han aparecido productos sustitutos que reemplazan al producto bajo análisis.

Un estudio de mercado reveló que: i) De los clientes que en algún trimestre consumen el producto de AAA, el 80% repite la compra en el trimestre siguiente, y el 20% restante compra el producto de otras empresas; ii) De los clientes que en algún trimestre consumen productos de otras marcas, el 40% compra el producto de AAA en el trimestre siguiente, y el 55% (decepcionado con la experiencia) abandona el mercado y se pasa definitivamente al producto sustituto; iii) No hay ingresos de nuevos clientes al mercado de este producto.

1. Determine cuántos trimestres pasarán en promedio para que un cliente actualmente consumidor de AAA abandone el mercado.
2. Determine cuántos trimestres pasarán en promedio para que un cliente actualmente consumidor de las otras marcas abandone el mercado.
3. Determine el porcentaje de los clientes actuales que se mantendrán en el mercado dentro de 1 año.
4. Determine el porcentaje de los clientes actuales de AAA que retendrá la empresa dentro de 1 año.
5. Determine la participación de mercado de AAA dentro de 1 año.

PROBLEMA #3

Una investigación de mercado realizada entre los suscriptores de una revista de viajes muestra que el 65% de ellos tiene actualmente una tarjeta de fidelidad de alguna línea aérea. Comparando los resultados con una investigación similar realizada hace 5 años, los datos muestran que el 40% de aquellos que no tenían una tarjeta obtuvieron una, mientras que 10% de aquellos que hace 5 años poseían una tarjeta hoy ya no la poseen. Considere que estas tendencias se mantienen en el futuro.

1. Desarrolle a partir de la Ecuación General de Estado un modelo que le permita determinar:
 - a. La porción de suscriptores de la revista que poseerán una tarjeta de fidelidad dentro de 10 años.
 - b. La porción de suscriptores de la revista que poseerán una tarjeta de fidelidad en el largo plazo.
2. Calcule el número esperado de años que pasan -en promedio- para que un individuo que no posee una tarjeta decida tener una. Deduzca la expresión empleada en el cálculo.

PROBLEMA #4

Los árboles de una plantación están agrupados (a los fines del modelo) en cuatro categorías de edades:

$b(k)$: son los árboles cuyas edades van de 0 a 15 años en el período de tiempo k .

$y(k)$: son los árboles cuyas edades van de 16 a 30 años en el período de tiempo k .

$m(k)$: son los árboles cuyas edades van de 31 a 45 años en el período de tiempo k .

$o(k)$: son los árboles cuyas edades son mayores de 45 años en el período de tiempo k .

Un cierto porcentaje (dx) de los árboles de cada grupo muere en cada período de 15 años: $db=10\%$; $dy=20\%$; $dm=30\%$; $do=40\%$. Los árboles sobrevivientes pasan al siguiente grupo. Los del grupo "o" se mantienen en ese grupo. Los árboles perdidos se remplazan por árboles nuevos en el grupo "b"; de este modo la población total de árboles no cambia en el tiempo. Calcule el número de años que en promedio vivirá un árbol nuevo. (Para el análisis utilizar períodos de longitud de 15 años de tiempo).

PROBLEMA #5

Se desea estudiar la evolución de una epidemia en una determinada población. Para ello se divide la población en tres categorías:

- Susceptibles: personas sanas que pueden contraer la infección.
- Infectados.
- Recuperados: personas que estuvieron infectadas y se recuperaron.

La población total no cambia y se supone de 100 personas. La probabilidad de que una persona susceptible se infecte en el intervalo de un día es del 10%. La probabilidad de que una persona infectada se recupere en el intervalo de un día es del 20%. No es posible que una persona pase del estado susceptible al estado recuperado sin infectarse previamente. Las personas recuperadas adquieren inmunidad y por tanto permanecen en ese estado indefinidamente.

Inicialmente existen 99 personas susceptibles y 1 persona infectada. Determinar:

1. La evolución de cada categoría en los primeros 100 días.
2. La cantidad de días promedio que una persona infectada demora en recuperarse.
3. La cantidad de días promedio que una persona susceptible demora en infectarse.
4. La cantidad de días promedio que una persona susceptible demora en recuperarse.
5. La probabilidad de que una persona susceptible se recupere.
6. La probabilidad de que una persona infectada se recupere.

PROBLEMA #6

Una Compañía considera utilizar la teoría de Markov para analizar los cambios entre tres marcas distintas de memorias de computadora. Un estudio de mercado ha permitido estimar la siguiente matriz de probabilidades para los movimientos mensuales entre marcas:

	A la marca		
	1	2	3
Desde la marca	1 0.80	0.10	0.10
	2 0.03	0.95	0.02
	3 0.20	0.05	0.75

Las participaciones de mercado actuales (mes de junio) son: 45%, 25% y 30% para las marcas 1, 2 y 3 respectivamente.

1. ¿Cuáles serán las participaciones de mercado esperadas en agosto?
2. Desarrolle a partir de la ecuación general de estado un modelo que le permita hallar las participaciones de mercado a largo plazo.
3. Calcule la cantidad de meses que pasan en promedio hasta que un comprador de la marca 1 adquiere la marca 3.

PROBLEMA #7

El programa de entrenamiento para los supervisores de producción de una compañía tiene dos fases: La fase 1, que incluye 3 semanas de trabajo en aula, y la fase 2, consistente en un programa de aprendizaje de tres semanas ya trabajando bajo la dirección de supervisores experimentados.

De la experiencia pasada la compañía espera que el 60% de aquellos que inician el entrenamiento en el aula logren pasar a la fase de aprendizaje, y que el restante 40% abandone completamente el programa de entrenamiento.

De aquellos que pasan a la fase de aprendizaje, 70% se gradúan como supervisores, 10% deben repetir la segunda fase y 20% quedan completamente fuera del programa.

Actualmente hay 45 personas en la fase de aula y 21 personas en la fase de aprendizaje.

¿Cuántos supervisores la compañía puede esperar, de su programa actual de entrenamiento?

PROBLEMA #8

En una región puede haber 3 climas: B (buen tiempo); L (lluvia) y N (niebla). Se sabe que:

- La probabilidad de que un día se presente buen tiempo o niebla, y al día siguiente llueva es 0.2.
 - La probabilidad de permanencia del clima de un día al siguiente es 0.2.
 - La probabilidad de que a un día de lluvia le siga un día de niebla es 0.5.
1. Desarrolle a partir de la ecuación general de estado un modelo que le permita hallar la cantidad promedio de días de lluvia al año y la precipitación media anual.
 2. Si la situación presente es B (buen tiempo), calcule la cantidad de días que pasan en promedio hasta que se presenta un día de lluvia.