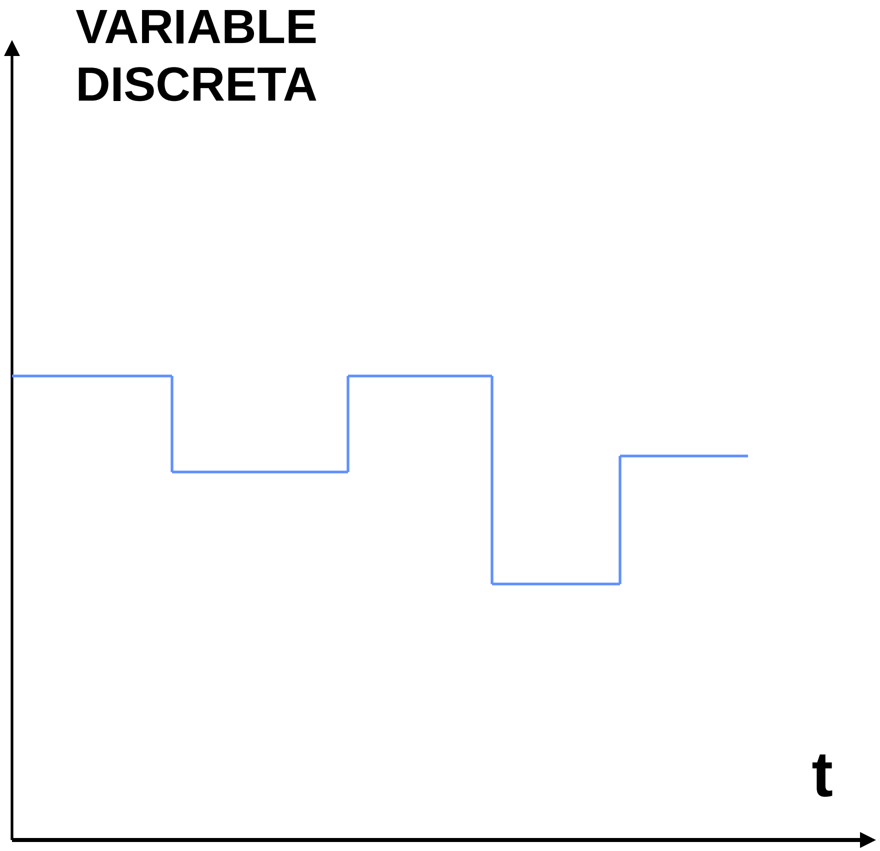
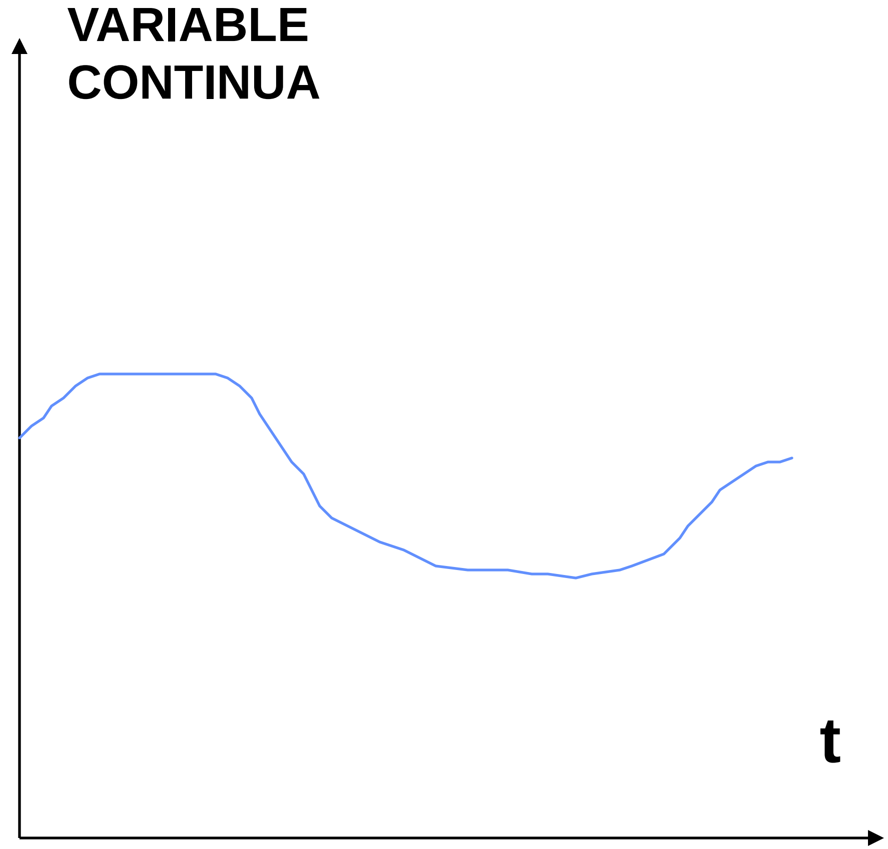
CADENAS DE MARKOV

PROCESOS ESTOCASTICOS

- FENOMENOS DINAMICOS DE COMPORTAMIENTO ALEATORIO
- PARAMETRO t
- VARIABLES DE ESTADO
  - DISCRETA
  - CONTINUA


VARIABLE
DISCRETA
t


VARIABLE
CONTINUA
t

CADENAS DE MARKOV

- CUANDO EL ESTADO DEL SISTEMA QUEDA DEFINIDO POR VARIABLES DISCRETAS

- CUANDO EL ESTADO DEL SISTEMA EN EL INSTANTE t DEPENDE DEL ESTADO DEL MISMO EN UN INSTANTE ANTERIOR
  - MEMORIA DE PRIMER ORDEN (t-1)
  - MEMORIA DE ORDEN SUPERIOR

OBSERVACIONES

- PARAMETRO CONTINUO
- PARAMETRO DISCRETO
  - IGUALMENTE ESPACIADAS
  - IRREGULARMENTE ESPACIADAS

EJEMPLOS DE CADENAS DE MARKOV FINITAS, DE PRIMER ORDEN Y DE PARAMETRO DISCRETO

- BRAND SWITCHING
- REEMPLAZO DE EQUIPOS
- PLANEAMIENTO DE NECESIDADES DE PERSONAL
- ANALISIS DE INVENTARIOS
- ANALISIS DE CREDITOS
- ESTUDIO DE SISTEMAS DE COLAS

PASO O TRANSACCIÓN

- ES EL AVANCE DEL PROCESO CUANDO EL SISTEMA PASA DE UN ESTADO A OTRO.

- LA TRANSICIÓN DE UN ESTADO A OTRO
  - PUEDE HACERSE EN UNO O VARIOS PASOS
  - TIENE ASOCIADA UNA PROBABILIDAD

PROBABILIDADES DE TRANSICION

$$\mathbf{p}_{ij}$$

$$\mathbf{p}_{ij}^{(n)}$$

LAS SUPONDREMOS ESTACIONARIAS

VECTOR PROBABILIDAD
O VECTOR DISTRIBUCION

$$\mathbf{v}_{ij} = \begin{bmatrix} p_{i1} & p_{i2} \; \ldots . p_{ij} \; \ldots . p_{in} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{ij}^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{i1}^{(n)} & p_{i2}^{(n)} \; \ldots . p_{ij}^{(n)} \; \ldots . p_{in}^{(n)} \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE TRANSICION DE UN PASO

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ . \quad . & . & . & . & . & \\ . \quad . & . & . & . & . & \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ . \quad . & . & . & . & . & \\ . \quad . & . & . & . & . & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_i \\ \\ v_n \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE TRANSICION DE UN PASO

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} s_1 & s_2 & & s_j & & s_n \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \\ \\ s_i \\ \\ \\ s_n \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ .\ \ . & . & . & . & . & \\ .\ \ . & . & . & . & . & \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ .\ \ . & . & . & . & . & \\ .\ \ . & . & . & . & . & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{array} \right] \end{array} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ \\ v_i \\ \\ \\ v_n \end{bmatrix}$$

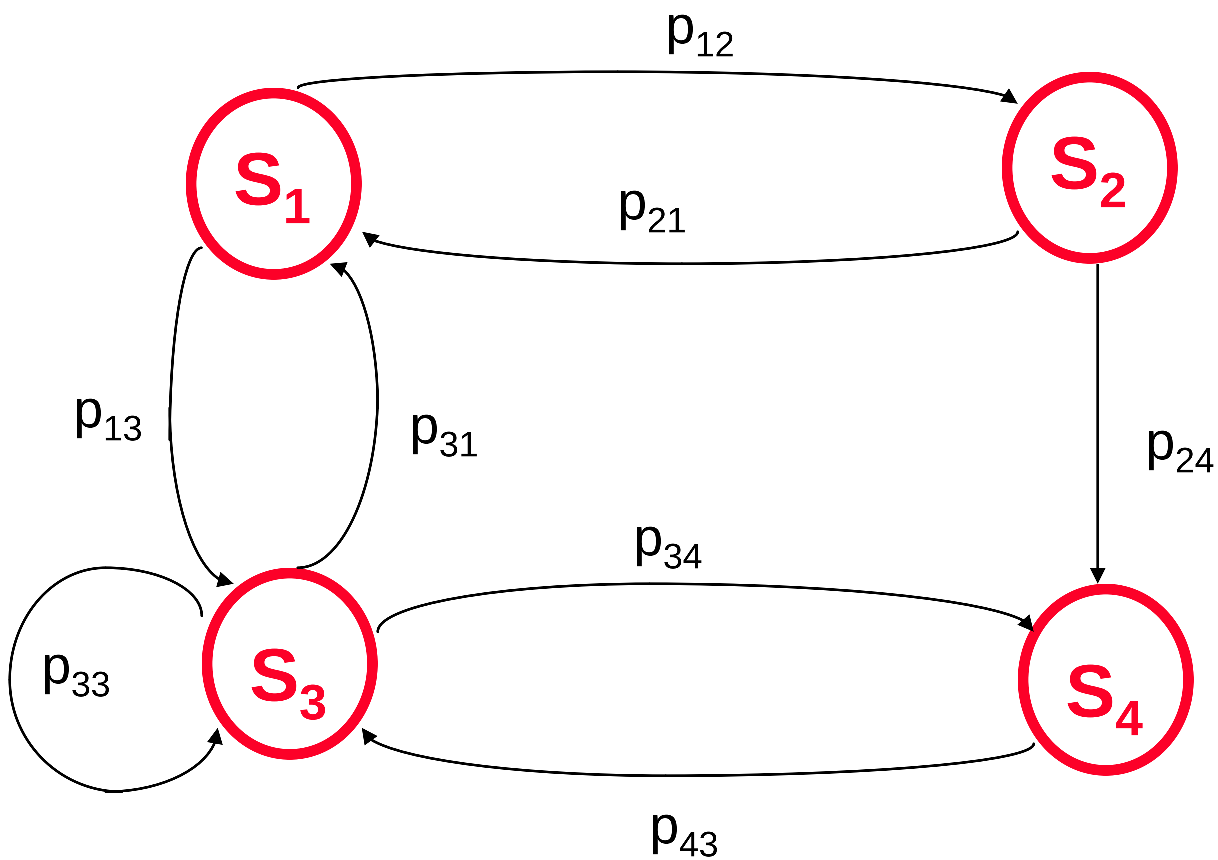
MATRIZ DE TRANSICION DE n PASOS

$$P = \begin{bmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{1j}^{(n)} & \cdots & p_{1n}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots & p_{2j}^{(n)} & \cdots & p_{2n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{i1}^{(n)} & p_{i2}^{(n)} & \cdots & p_{ij}^{(n)} & \cdots & p_{in}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{n1}^{(n)} & p_{n2}^{(n)} & \cdots & p_{nj}^{(n)} & \cdots & p_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ \\ v_i^{(n)} \\ \\ v_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

UNA CADENA QUEDA DEFINIDA CUANDO SE CONOCEN:

- **LAS PROBABILIDADES DE TRANSICION**
- **EL NUMERO DE ESTADOS**
- **EL ESTADO ACTUAL DEL SISTEMA**

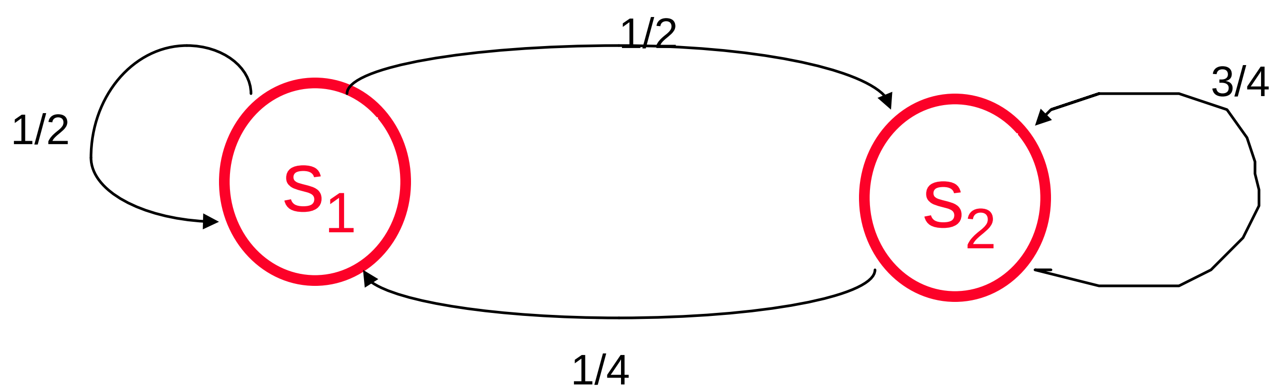
REPRESENTACION GRAFICA



$$
P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & p_{12} & p_{13} & 0 \\
p_{21} & p_{22} & 0 & 0 \\
p_{31} & 0 & p_{33} & p_{34} \\
0 & 0 & p_{43} & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

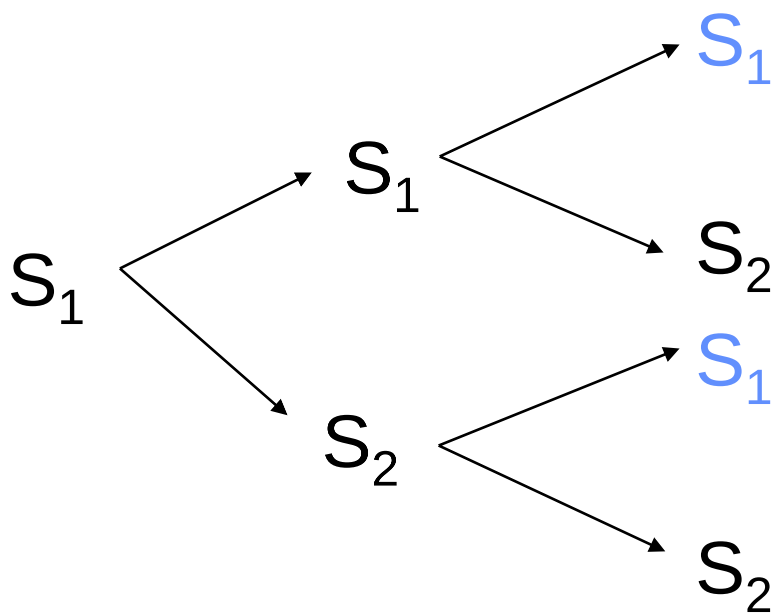
ANALISIS DE REGIMEN TRANSIENTE

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{array}$$



ESTADO ACTUAL : S1

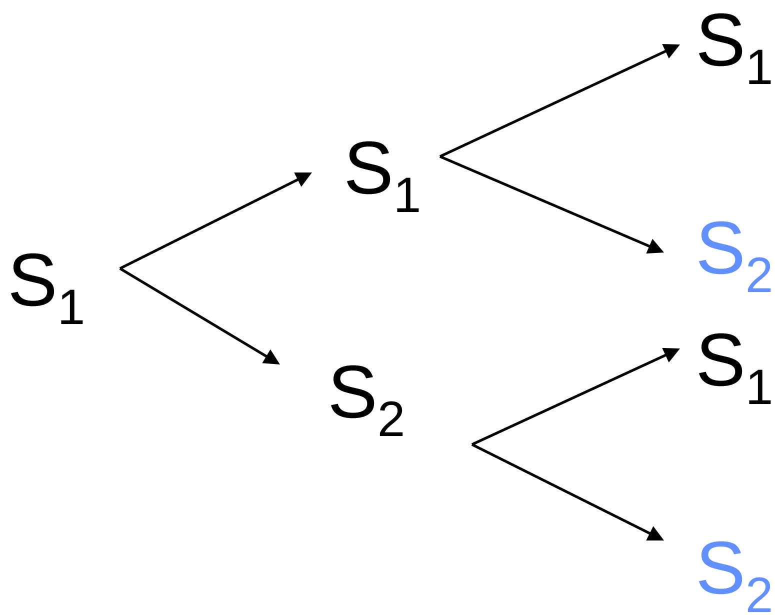
$p_{11}^{(2)}$?



$$P_{11}^{(2)} = P_{11} \,.\, P_{11} + P_{12} \,.\, P_{21} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

ESTADO ACTUAL : S1

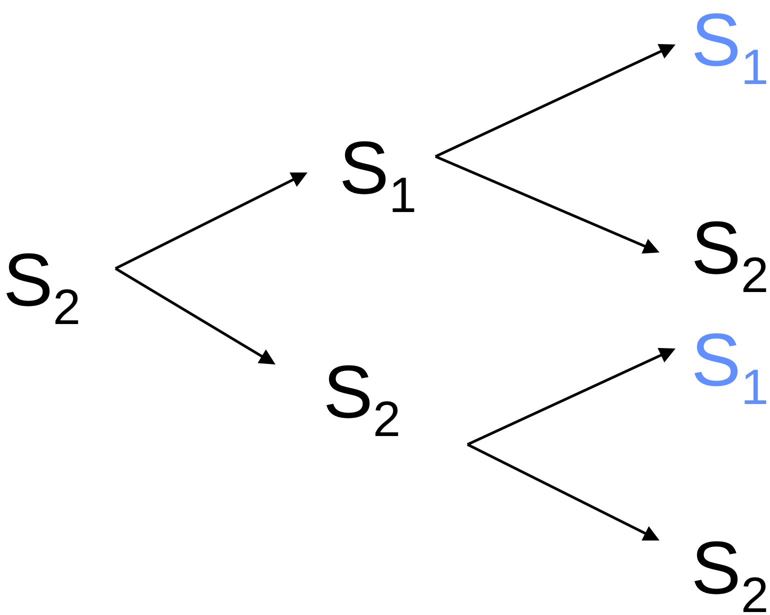
$p_{12}^{(2)}$?



$$P_{12}^{(2)} = P_{11} \,.\, P_{12} + P_{12} \,.\, P_{22} = \frac{1}{2}\;\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\;\frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$

ESTADO ACTUAL : S2

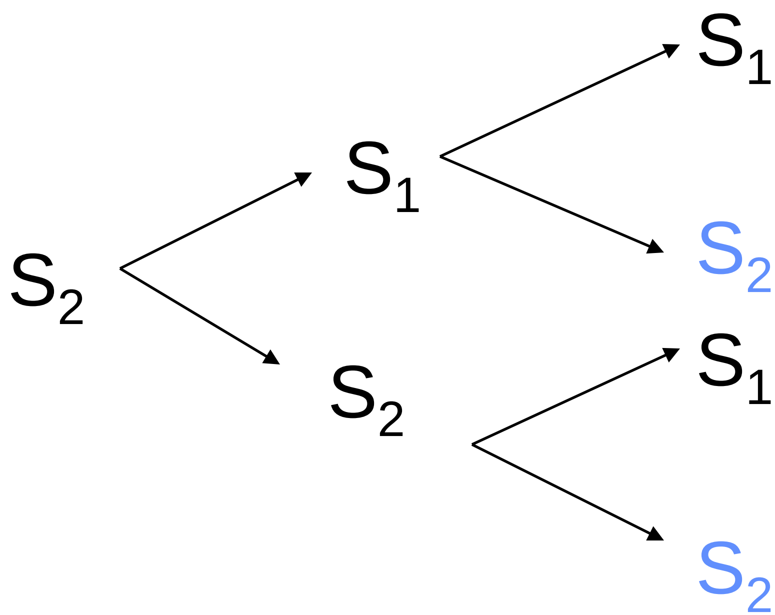
$p_{21}^{(2)}$?



$$P_{21}^{(2)} = P_{21} \, . \, P_{11} + P_{22} \, . \, P_{21} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{4} = \frac{5}{6}$$

ESTADO ACTUAL : S2

$$p_{22}^{(2)} \ ?$$



$$P_{22}^{(2)} = P_{21} \,.\, P_{12} + P_{22} \,.\, P_{22} = \frac{1}{4}\;\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\;\frac{3}{4} = \frac{11}{16}$$

MATRIZ DE TRANSICION DE DOS PASOS

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} \\ p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}.p_{11}+p_{12}.\ p_{21} & p_{11}.p_{12}+p_{12}.\ p_{22} \\ p_{21}.p_{11}+p_{22}.\ p_{21} & p_{21}.p_{12}+p_{22}.\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

VECTOR PROBABILIDAD DE TRANSICION DE DOS PASOS CUANDO EL ESTADO ACTUAL ES S_1

$$V_1^{(1)} \cdot P = V_1^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}.p_{11}+p_{12}.\,p_{21} & p_{11}.p_{12}+p_{12}.\,p_{22} \end{bmatrix}$$

EN NUESTRO EJEMPLO:

$$V_1^{(1)} \; . \; P \; = \; V_1^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}$$

VECTOR PROBABILIDAD DE TRANSICION DE DOS PASOS CUANDO EL ESTADO ACTUAL ES S_2

$$V_2^{(1)} \cdot P = V_2^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{21}.p_{11}+p_{22}.\ p_{21} & p_{21}.p_{12}+p_{22}.\ p_{22} \end{bmatrix}$$

EN NUESTRO EJEMPLO:

$$V_2^{(1)} \,.\, P = V_2^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/16 & 11/16 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = P^2$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}.p_{11}+p_{12}.\,p_{21} & p_{11}.p_{12}+p_{12}.\,p_{22} \\ p_{21}.p_{11}+p_{22}.\,p_{21} & p_{21}.p_{12}+p_{22}.\,p_{22} \end{bmatrix}$$

PROBABILIDADES ASOCIADAS A CADA ESTADO LUEGO DE TRES PASOS

- **CUANDO EL ESTADO ACTUAL ES S_1**

$$V_1^{(2)} \,.\, P = V_1^{(3)}$$

o bien:

$$V_1 \,.\, P^{(2)} = V_1^{(3)}$$

PROBABILIDADES ASOCIADAS A CADA ESTADO LUEGO DE TRES PASOS

- **CUANDO EL ESTADO ACTUAL ES S_2**

$$V_2^{(2)} \cdot P = V_2^{(3)}$$

o bien:

$$V_2 \cdot P^{(2)} = V_2^{(3)}$$

ECUACIONES DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

$$V_i^{(n)} = V_{i-1}^{(n-1)} \cdot P$$

o bien:

$$V_i^{(n)} = V_i \cdot P^{(n-1)}$$

EN DEFINITIVA:

- **PARA CONOCER LA PROBABILIDAD DE QUE EL PROCESO SE ENCUENTRA EN UN ESTADO j DESPUES DE n PERIODOS CUANDO SE HALLA EN EL ESTADO i, DEBE CALCULARSE SIMPLEMENTE LA MATRIZ $P^{(n)}$**

EN NUESTRO EJEMPLO:

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0,344 & 0,656 \\ 0,328 & 0,672 \end{bmatrix}$$

EN NUESTRO EJEMPLO:

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0{,}336 & 0{,}664 \\ 0{,}332 & 0{,}668 \end{bmatrix}$$

CLASIFICACION DE LOS ESTADOS DE UNA CADENA

- ESTADOS ACCESIBLES
- ESTADOS COMUNICANTES
- ESTADOS RECURRENTES
- ESTADOS TRANSITORIOS
  - SIN RETORNO

ESTADO ACCESIBLE

S_j es accesible desde S_i si, para algún paso, $p_{ij}^{(n)} \geq 0$

$S_i \rightarrow S_j$

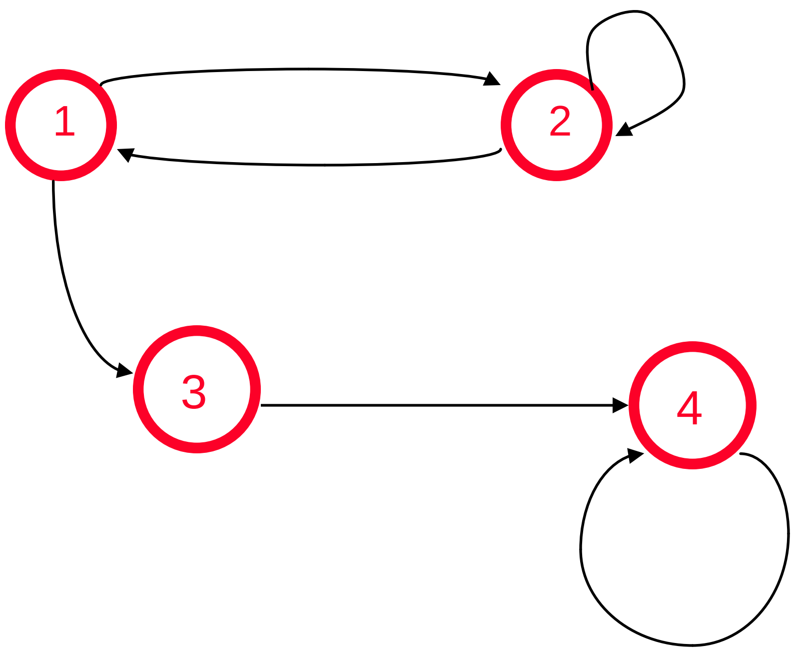
Si $S_i \rightarrow S_j$ y $S_j \rightarrow S_k$ $S_i \rightarrow S_k$

ESTADO ACCESIBLE

S_j es accesible desde S_i si, para algún paso, $p_{ij}^{(n)} > 0$

$$S_i \rightarrow S_j$$

Si $\quad S_i \rightarrow S_j \quad$ **y** $\quad S_j \rightarrow S_k \quad \Rightarrow \quad S_i \rightarrow S_k$



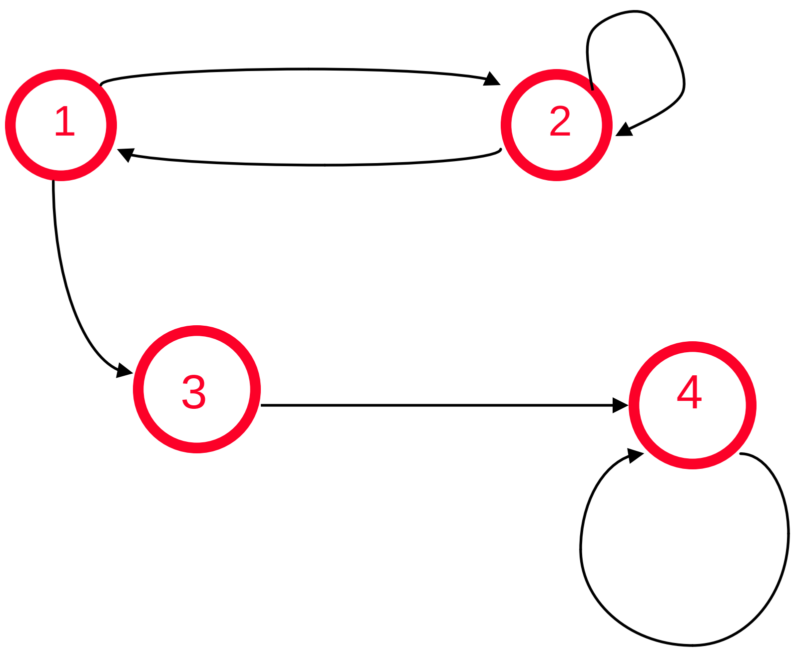
$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} & x & x & \\ x & x & & \\ & & & x \\ & & & x \end{array} \right| \end{array}$$

ESTADO ACCESIBLE

S_j es accesible desde S_i si, para algún paso, $p_{ij}^{(n)} \geq 0$

$S_i \rightarrow S_j$

Si $S_i \rightarrow S_j$ y $S_j \rightarrow S_k$ $\Rightarrow$ $S_i \rightarrow S_k$



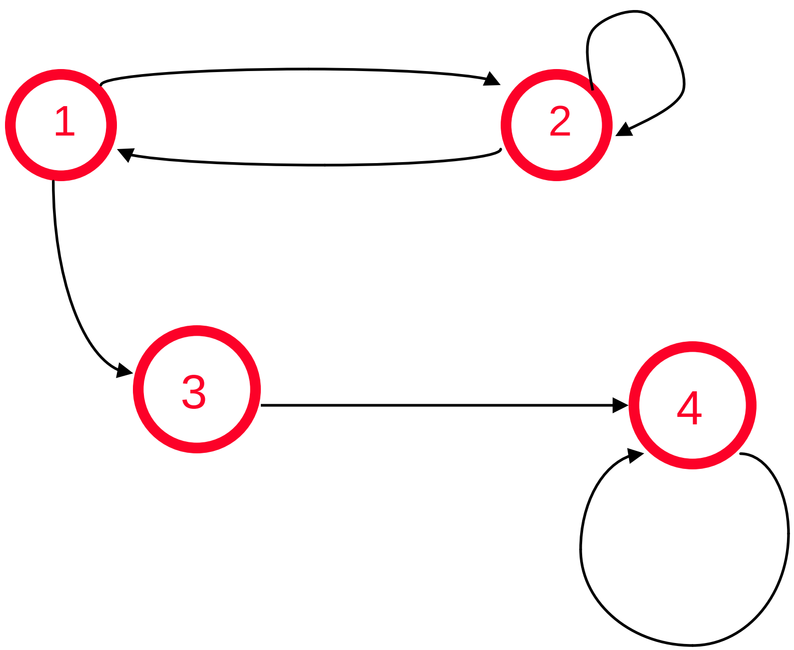
$$P^{(2)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} x & x & & x \\ x & x & x & \\ & & & x \\ & & & x \end{array} \right| \end{array}$$

ESTADOS COMUNICANTES

S_i y S_j se comunican si cada estado es accesible desde el otro.

$$S_i \leftrightarrow S_j$$

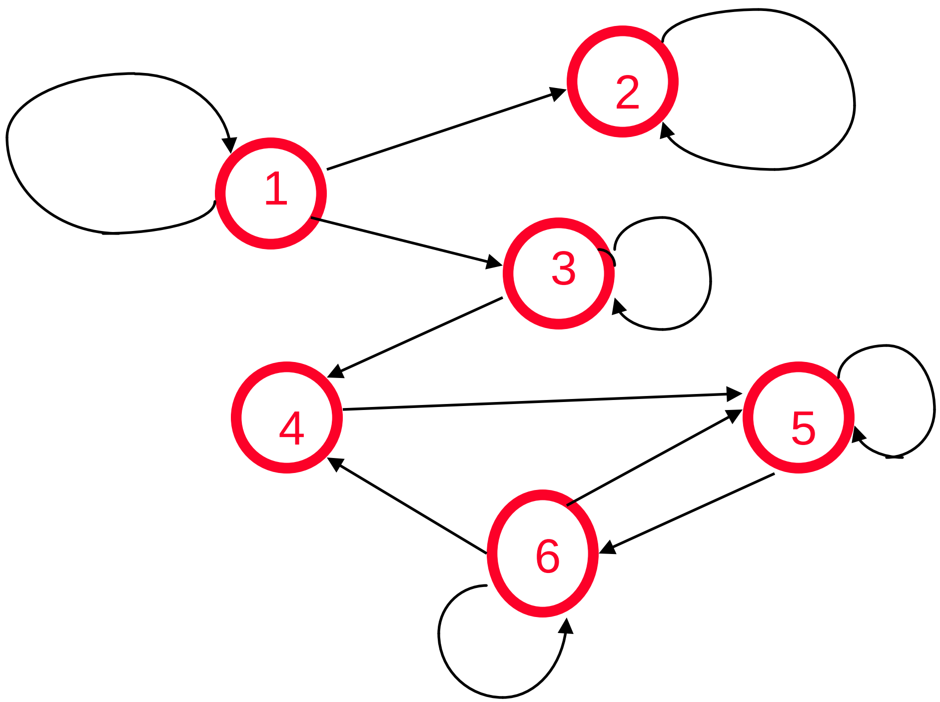
Si $\quad S_i \leftrightarrow S_j \quad$ **y** $\quad S_j \leftrightarrow S_k \quad \Rightarrow \quad S_i \leftrightarrow S_k$



$$P^{(2)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} x & x & & x \\ x & x & x & \\ & & & x \\ & & & x \end{array} \right| \end{array}$$

ESTADO RECURRENTE

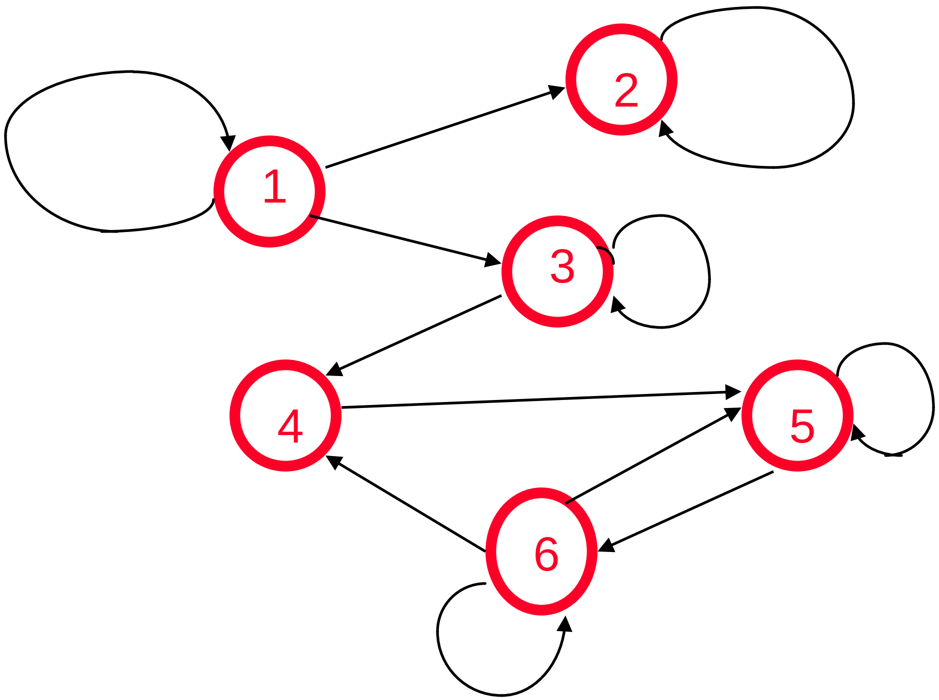
- **UN ESTADO S_i ES RECURRENTE SI UNA VEZ QUE EL PROCESO LO ALCANZA, REGRESA A ÉL (S_4 , S_5 y S_6)**



	1	2	3	4	5	6
1	X	X	X			
2		X				
3			X	X		
4					X	
5					X	X
6				X	X	X

ESTADO TRANSITORIO

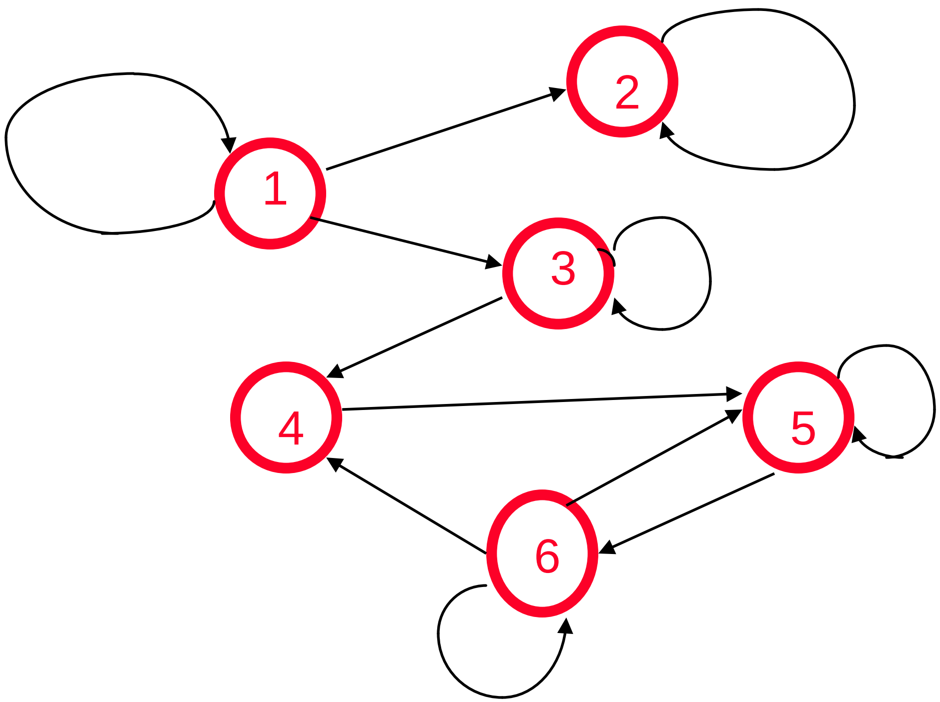
- **UN ESTADO S_i ES TRANSITORIO SI EXISTE UNA PROBABILIDAD DE QUE NO REGRESE A EL (S_3)**



	1	2	3	4	5	6
1	X	X	X			
2		X				
3			X	X		
4					X	
5					X	X
6				X	X	X

ESTADO ABSORBENTE

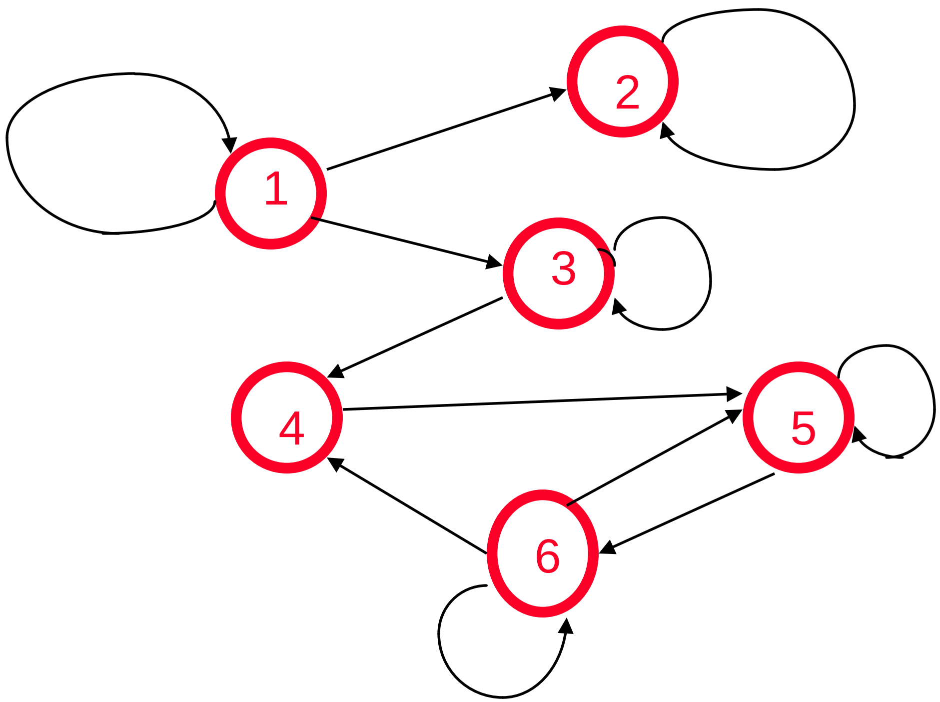
- **UN ESTADO S_i ES ABSORBENTE SI UNA VEZ QUE EL PROCESO LO ALCANZA, NO LO ABANDONA (S_2).**



	1	2	3	4	5	6
1	X	X	X			
2		X				
3			X	X		
4					X	
5					X	X
6				X	X	X

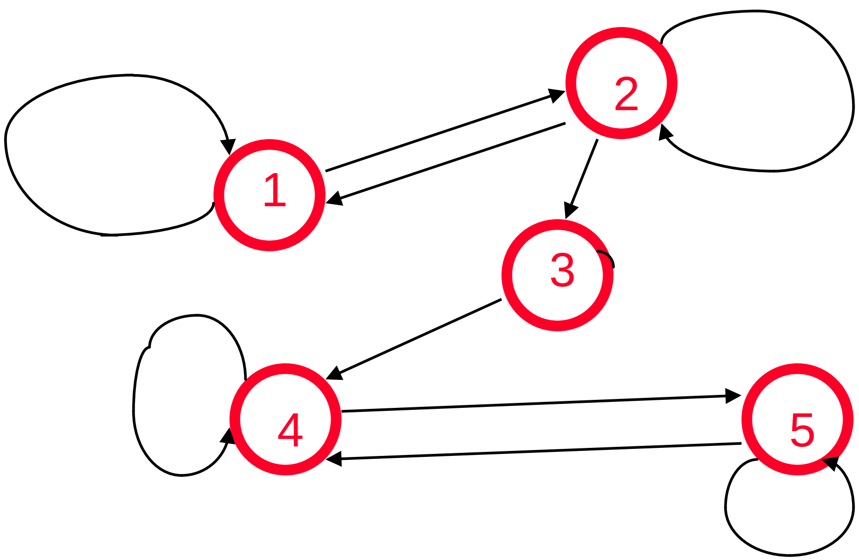
CLASE

- DOS ESTADOS QUE SE COMUNICAN PERTENECEN A LA MISMA CLASE: S_4, S_5 Y S_6 FORMAN UNA MISMA CLASE.
- UNA CLASE PUEDE CONSISTIR EN UN SOLO ESTADO (S_1)



ESTADO SIN RETORNO

- **ES UN ESTADO QUE NO SE COMUNICA CON NINGUN OTRO, NI SIQUIERA CONSIGO MISMO (S_3)**



	1	2	3	4	5
1	X	X			
2	X	X	X		
3				1	
4				X	X
5				X	X

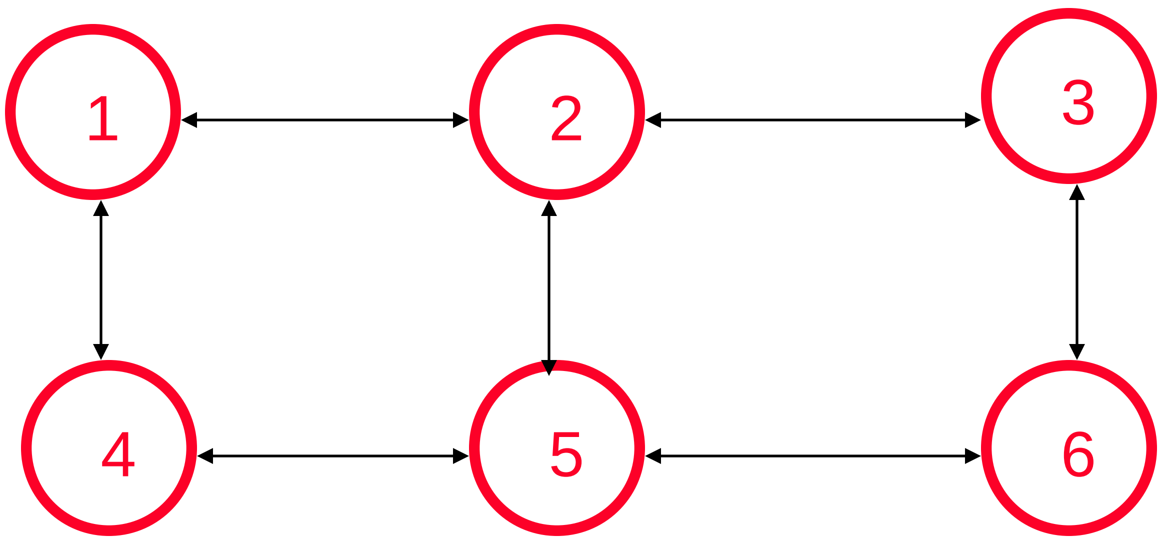
CLASIFICACION DE CADENAS DE MARKOV

- IRREDUCTIBLES (O ERGODICAS)
  - APERIODICAS (O REGULARES)
  - PERIODICAS

- REDUCIBLES (O SEPARABLES)

CADENAS IRREDUCTIBLES (O ERGODICAS)

- TODOS SUS ESTADOS SE COMUNICAN

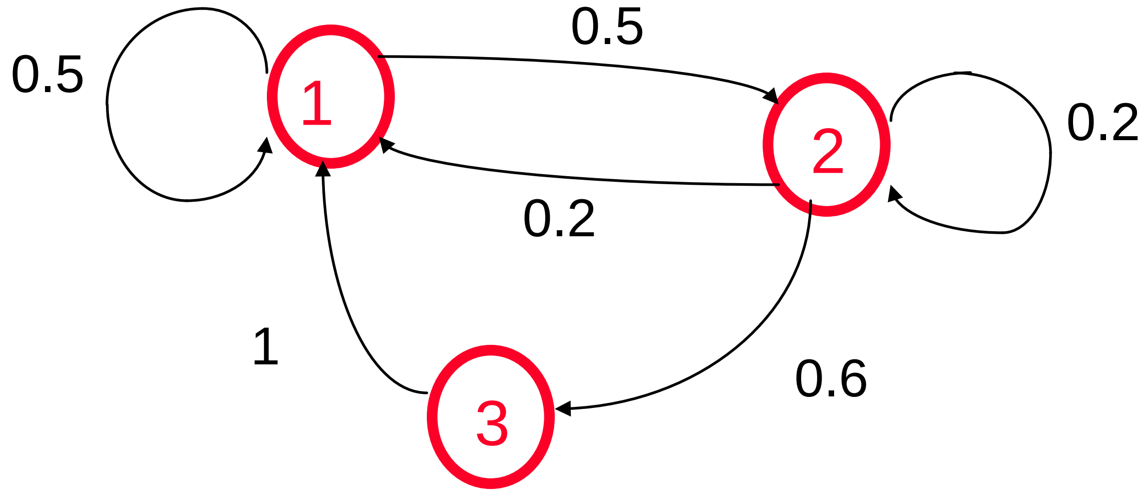


$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{array} & \begin{bmatrix} & X & & X & & \\ X & & X & & X & \\ & X & & & & X \\ X & & & & X & \\ & X & & X & & \\ & & X & & X & \end{bmatrix} \end{array}$$

- **LOS ESTADOS DE UNA CADENA IRREDUCTIBLE SON TODOS RECURRENTES**

- **LAS CADENAS ERGODICAS FORMAN UNA SOLA CLASE COMUNICANTE**

- **LUEGO DE INFINITAS TRANSACCIONES, LAS PROBABILIDADES SE ESTABILIZAN EN VALORES LIMITES**



$$P = \begin{vmatrix} .5 & .5 & \\ .2 & .2 & .6 \\ 1 & & \end{vmatrix}$$

$$P^2 = \begin{vmatrix} .3500 & .3500 & .3000 \\ .7400 & .1400 & .1200 \\ .5000 & .5000 & .0000 \end{vmatrix}$$

$$P^4 = \begin{vmatrix} .5315 & .3215 & .1470 \\ .4226 & .3386 & .2388 \\ .5450 & .2450 & .2100 \end{vmatrix}$$

$$P^8 = \begin{vmatrix} .4985 & .3158 & .1858 \\ .4979 & .3090 & .1931 \\ .5077 & .3096 & .1827 \end{vmatrix}$$

$$P^{16} = \begin{vmatrix} .5000 & .3125 & .1875 \\ .5000 & .3125 & .1875 \\ .5000 & .3125 & .1875 \end{vmatrix}$$

$$P^{17} = \begin{vmatrix} .5000 & .3125 & .1875 \\ .5000 & .3125 & .1875 \\ .5000 & .3125 & .1875 \end{vmatrix}$$

$$P^{18} = \begin{vmatrix} .5000 & .3125 & .1875 \\ .5000 & .3125 & .1875 \\ .5000 & .3125 & .1875 \end{vmatrix}$$

$$P^n = \begin{vmatrix} .5000 & .3125 & .1875 \\ .5000 & .3125 & .1875 \\ .5000 & .3125 & .1875 \end{vmatrix}$$

para un n suficientemente grande:

$$V_i^n = V_i^{n+1} = V^n = V^{n+1} = V^*$$

CADENAS REGULARES (O APERIODICAS)

$$P = \begin{vmatrix} X & X & 0 & X & X \\ 0 & X & X & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & X & X \\ X & 0 & X & 0 & X \\ X & X & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Si alguna potencia tiene sólo elementos positivos

$$P^2 = \begin{vmatrix} X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X \\ X & X & X & 0 & X \\ X & X & 0 & X & X \\ X & X & X & X & X \end{vmatrix}$$

$$P^4 = \begin{vmatrix} X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X \end{vmatrix}$$

CADENAS PERIODICAS

$$P = \begin{vmatrix} 0 & X & X & 0 \\ X & 0 & 0 & X \\ X & 0 & 0 & X \\ 0 & X & X & 0 \end{vmatrix}$$

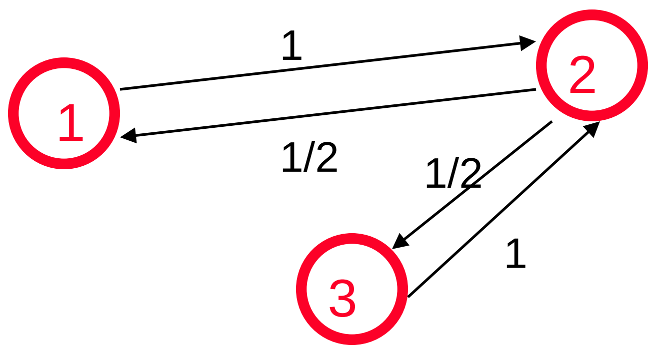
Cuando no puede hallarse una potencia de P para la cual todos los elementos sean positivos

$$P^2 = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & X \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ X & 0 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$P^3 = \begin{vmatrix} 0 & X & X & 0 \\ X & 0 & 0 & X \\ X & 0 & 0 & X \\ 0 & X & X & 0 \end{vmatrix}$$

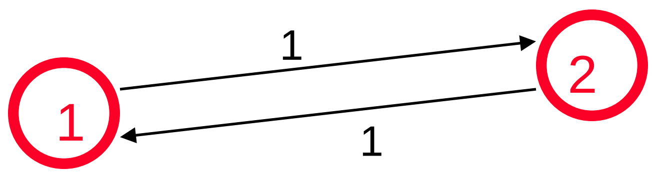
$$P^4 = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & X \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ X & 0 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



SE ESTABILIZA EN (1/4 1/2 1/4)

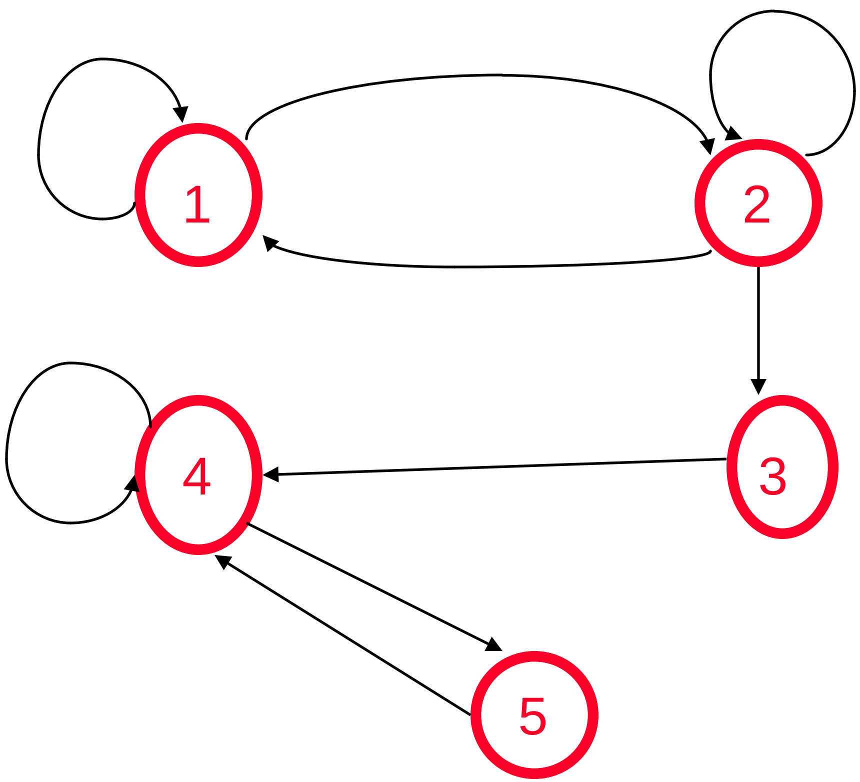
$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$



SE ESTABILIZA EN (1/2 1/2)

CADENAS REDUCIBLES (O SEPARABLES)

- **CUANDO NO TODOS LOS ESTADOS SON COMUNICANTES**



	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	X	X			
S_2	X	X	X		
S_3				X	
S_4				X	X
S_5				X	

ANALISIS DEL REGIMEN PERMANENTE

$$P = \left| \begin{array}{ccc} .5 & .5 & \\ .2 & .2 & .6 \\ 1. & & \end{array} \right|$$

$$P^n = \begin{vmatrix} .5000 & .3125 & .1875 \\ .5000 & .3125 & .1875 \\ .5000 & .3125 & .1875 \end{vmatrix}$$

$$V_i^{\,n} = V_i^{\,n+1}$$

$$V_i^n \cdot P = V^{\,n+1}$$

$$V^* = V^* \cdot P$$

$$V^* = V^* . P$$

$$\sum_{j=1}^{N} p(j) = 1$$

$$\left[p(1) \;\; p(2) \;\ldots.p(j) \;\ldots\; p(N) \right] .P = \left[p(1) \;\; p(2) \;\ldots.p(j) \;\ldots\; p(N) \right]$$

$$p(1) + p(2) + \ldots. + p(j) + \ldots + p(N) = 1$$

Por ejemplo:

$$P = \begin{bmatrix} .5 & .5 & \\ .2 & .2 & .6 \\ 1. & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p(1) & p(2) & p(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 1.0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(1) & p(2) & p(3) \end{bmatrix}$$

$$p(1) + p(2) + p(3) = 1$$

$$p(1)\cdot 0.5 + p(2)\cdot 0.2 + p(3) = p(1)$$

$$p(1)\cdot 0.5 + p(2)\cdot 0.2 = p(2)$$

$$p(1) + p(2) + p(3) = 1$$

$$
\begin{bmatrix} p(1) & p(2) & p(3) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} p(1) & p(2) & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
p(1) + p(2) + p(3) = 1
$$

$p(1) = 0.5$
$p(2) = 0.3125$
$p(3) = 0.1875$

Es decir:

$$V^* = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3125 & 0.1875 \end{bmatrix}$$

Para cadenas periódicas:

$$\begin{bmatrix} p(1) & p(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(1) & p(2) \end{bmatrix}$$

$$p(1).0 + p(2).1 = p(1)$$

$$p(1) + p(2) = 1$$

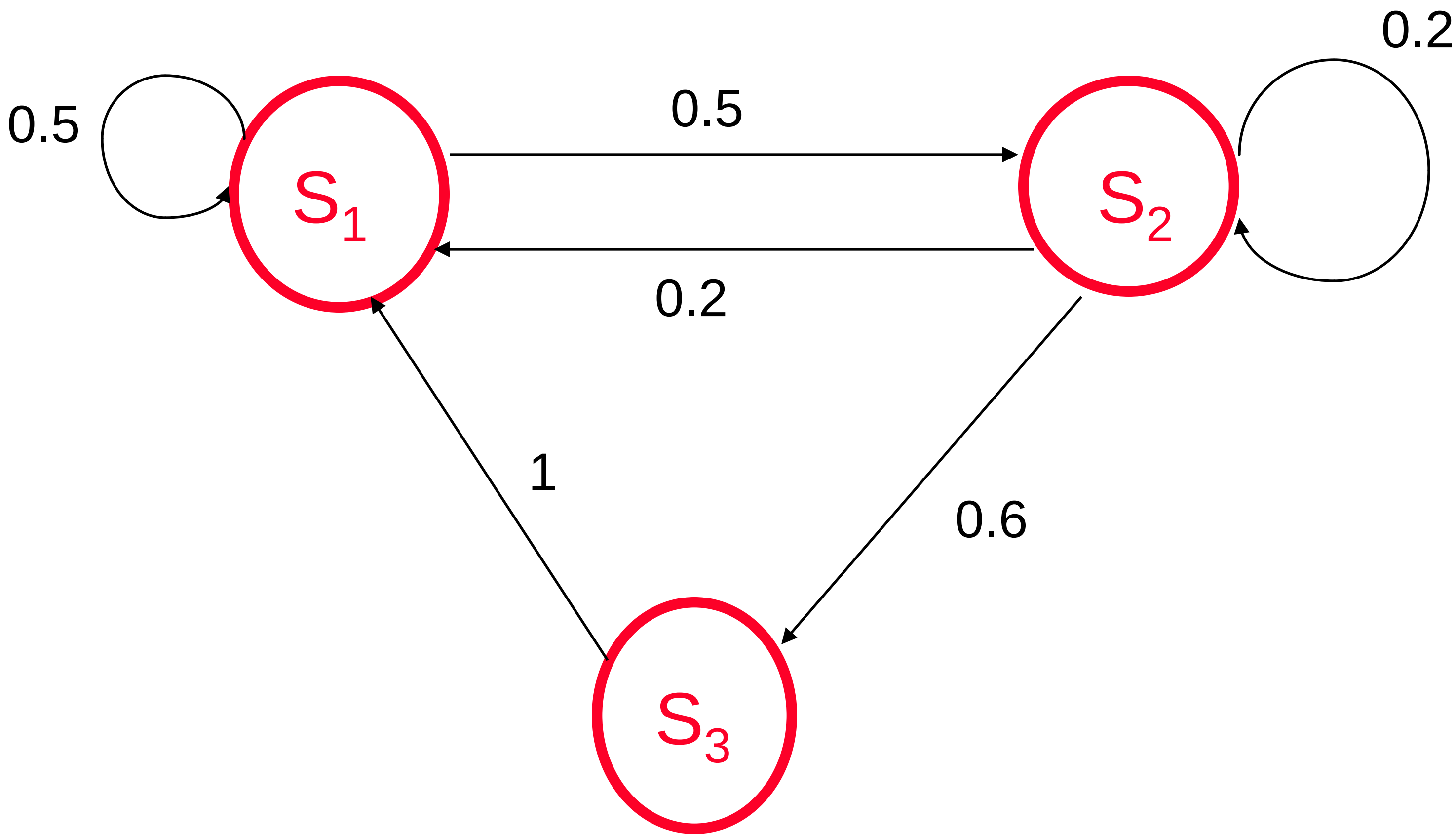
$\Rightarrow$

$$p(1) = 1/2$$

$$p(2) = 1/2$$

SUMA DE FLUJOS

$$\sum_{j} p(i).p_{ij} = \sum_{k} p(k).p_{ki}$$


0.5
0.5
0.2
0.2
S_1
S_2
S_3
1
0.6

- **BALANCE NODO S_1:**

$$p(1)\cdot 0.5 \;=\; p(2)\cdot 0.2 + p(3) \,.\, 1$$

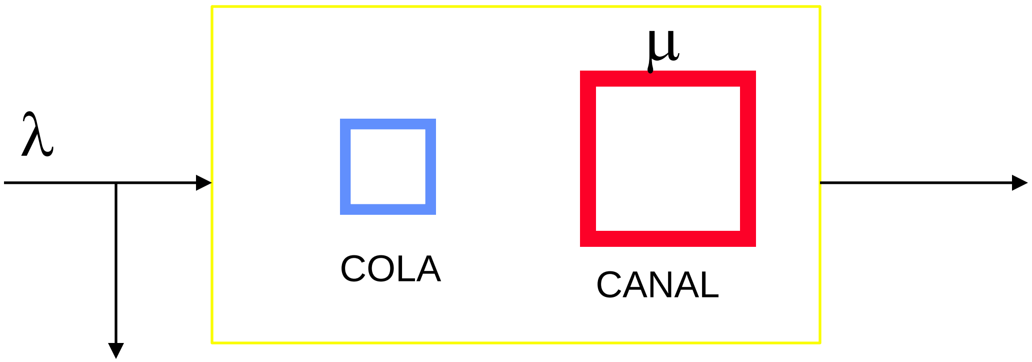
- **BALANCE NODO S_2:**

$$p(2)\cdot(0.2 + 0.6) = p(1)\cdot 0.5$$

- **CONDICION DE SUMA:**

$$p(1) + p(2) + p(3) = 1$$

Ejemplo de aplicación:



$$p(\text{ingreso}) = \lambda_n \cdot \Delta t$$

$$p(\text{egreso}) = \mu_n \cdot \Delta t$$

$$p(\text{ingreso}) = \lambda_n \cdot \Delta t$$

$\lambda_n = \lambda$ Para $n = 0, 1$

$\lambda_n = 0$ Para $n = 2$

$$p(\text{egreso}) = \mu_n \cdot \Delta t$$

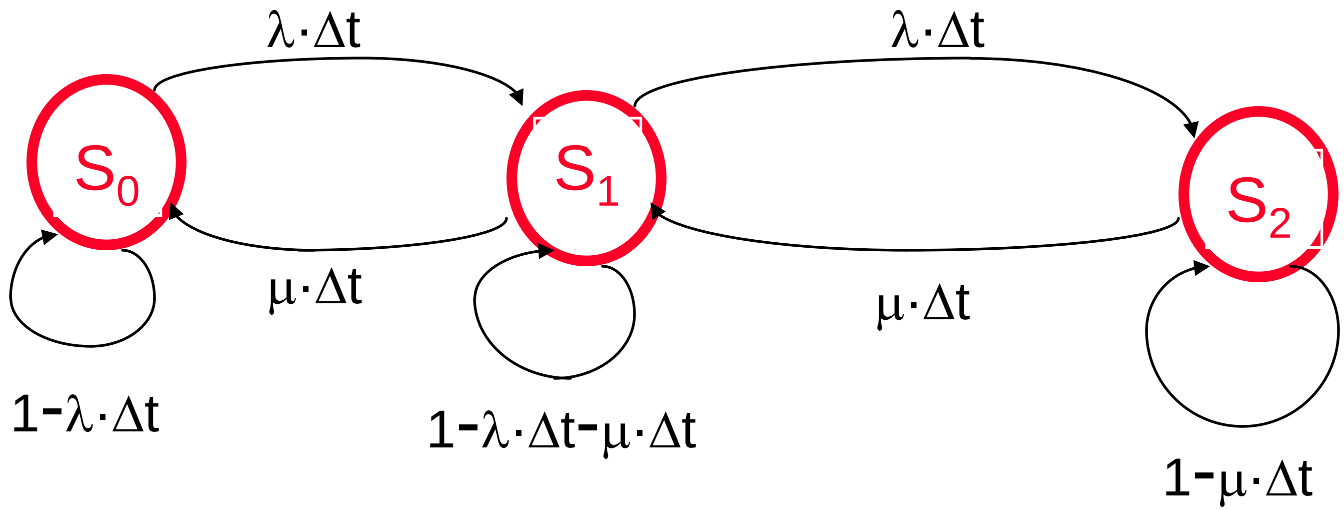
$\mu_n = 0$ Para $n = 0$

$\mu_n = \mu$ Para $n = 1, 2$

Matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_0 & S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-\lambda\cdot\Delta t & \lambda\cdot\Delta\tau & \\ \mu\cdot\Delta t & 1-\lambda\cdot\Delta t-\mu\cdot\Delta t & \lambda\cdot\Delta t \\ & \mu\cdot\Delta t & 1-\mu\cdot\Delta t \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\lambda\cdot\Delta t & \lambda\cdot\Delta t & \\ \mu\cdot\Delta t & 1-\lambda\cdot\Delta t-\mu\cdot\Delta t & \lambda\cdot\Delta t \\ & \mu\cdot\Delta t & 1-\mu\cdot\Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix}$$

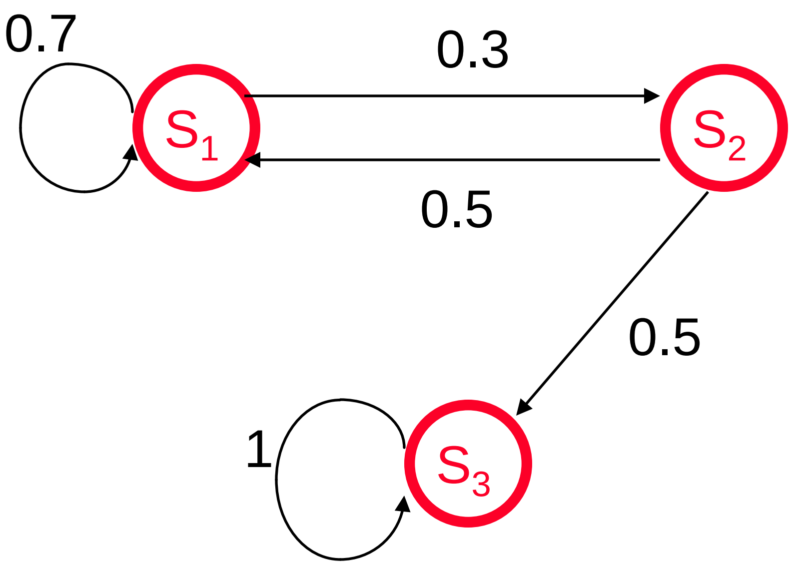

λ·Δt
λ·Δt
S0
S1
S2
μ·Δt
μ·Δt
1-λ·Δt
1-λ·Δt-μ·Δt
1-μ·Δt

CADENAS ABSORBENTES

- TIENE POR LO MENOS UN ESTADO ABSORBENTE

- ES POSIBLE ACCEDER DESDE CADA ESTADO NO ABSORBENTE HASTA POR LO MENOS UN ESTADO ABSORBENTE

- **Un estado “j” absorbente se identifica porque tiene una probabilidad unitaria p_{ij} en la matriz de transición**



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & \\ 0.5 & & 0.5 \\ & & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ejemplos de estados absorbentes:

- **Pago de una factura**
- **Realización de un contrato**
- **Venta de un activo fijo**
- **Despido de un empleado**
- **Falla de un dispositivo**

En este tipo de procesos interesa conocer:

- Número promedio de pasos que tarda en absorberse
- Número promedio de veces que el proceso pasa por cada estado antes de absorberse
- Probabilidad de ser absorbido por un estado determinado (si hay varios estados absorbentes)

- **Una matriz absorbente puede reagruparse:**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{a estados} & \text{n estados} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{a estados} \\ \text{n estados} \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline A & N \end{array}\right] \end{array}$$

I (a x a) : **MATRIZ IDENTIDAD. Cada elemento representa la probabilidad de permanecer en un estado absorbente en un paso**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{a estados} & \text{n estados} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{a estados} \\ \\ \text{n estados} \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline A & N \end{array} \right] \end{array}$$

O (a x n) : **MATRIZ NULA. Cada elemento representa la probabilidad de pasar de un estado absorbente a uno no absorbente en un paso**

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} \text{a estados} & \text{n estados} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{a estados} \\ \text{n estados} \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline A & N \end{array}\right] \end{array}$$

A (n x a) : **MATRIZ DE ESTADOS ABSORBENTES.**

Cada elemento representa la probabilidad de ser absorbido en una transacción

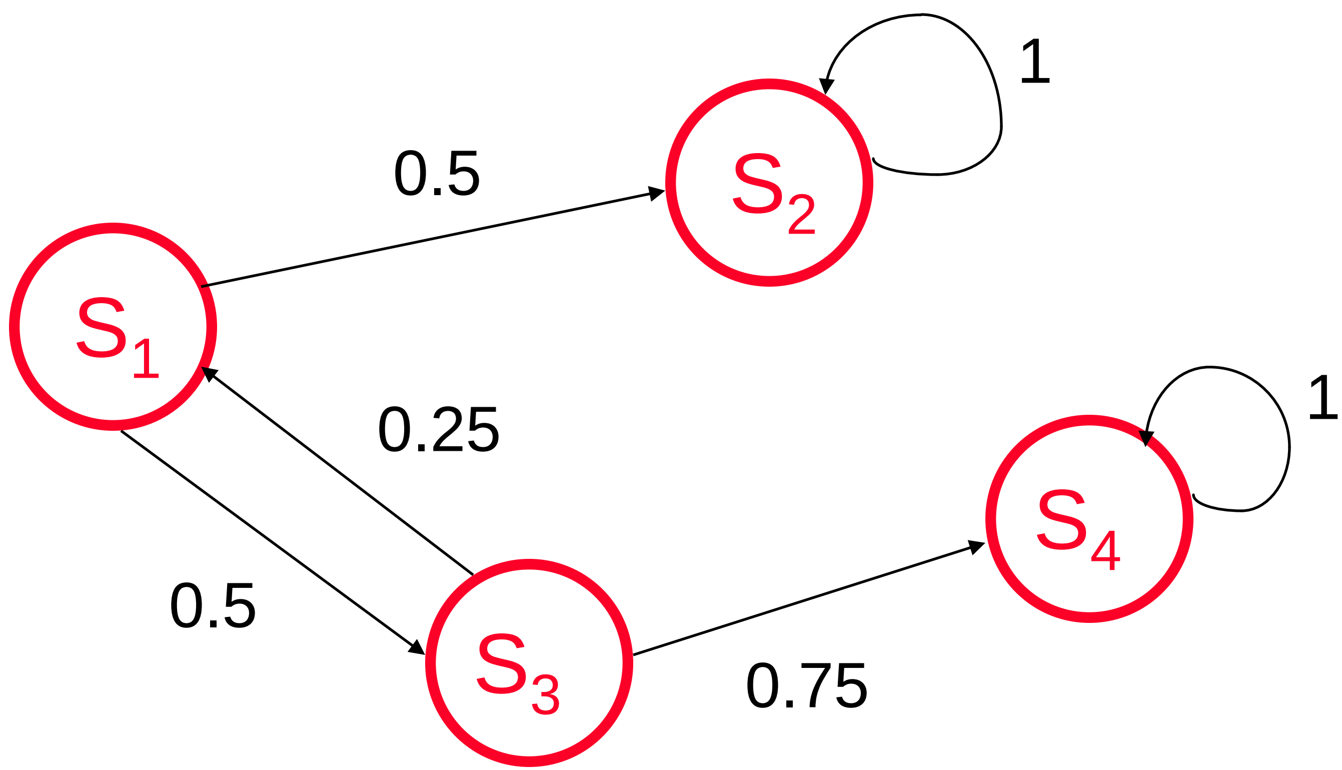
$$\begin{array}{r} \\ \text{a estados} \\ \text{n estados} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{a estados} & \text{n estados} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline A & N \end{array}\right] \end{array}$$

N (n x n) : MATRIZ DE ESTADOS NO ABSORBENTES.

Cada elemento representa la probabilidad de no ser absorbido en un paso.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{a estados} & \text{n estados} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{a estados} \\ \text{n estados} \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline A & N \end{array}\right] \end{array}$$

Ejemplo:



$$
P = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
 & 0.5 & 0.5 & \\
 & 1.0 & & \\
0.25 & & & 0.75 \\
 & & & 1.0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\
S_2 \\
S_4 \\
S_1 \\
S_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
S_2 & S_4 & S_1 & S_3
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|cc}
1.0 & & & \\
 & 1.0 & & \\
\hline
0.5 & & & 0.5 \\
 & 0.75 & 0.25 &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ S_2 \\ \\ S_4 \\ S_1 \\ \\ S_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} S_2 & S_4 & S_1 & S_3 \end{array} \\
\left[
\begin{array}{cc|cc}
1.0 & & & \\
 & \color{red}{I} & \color{red}{0} & \\
 & 1.0 & & \\
\hline
0.5 & & & 0.5 \\
 & \color{red}{A} & \color{red}{N} & \\
 & 0.75 & 0.25 &
\end{array}
\right]
\end{array}
$$

Determinación del número de pasos promedio que transcurren antes que el proceso se absorba:

$$n = (I - N)^{-1} \cdot \bar{1}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I - N = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I - N)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.14 & 0.57 \\ 0.29 & 1.14 \end{bmatrix}$$

$$(I - N)^{-1} . \bar{1} = \begin{bmatrix} 1.14 & 0.57 \\ 0.29 & 1.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.71 \\ 1.43 \end{bmatrix}$$

- **Si el proceso comienza en S_1 hará 1.71 transacciones (en promedio) antes de absorberse**
- **Si el proceso comienza en S_3 hará 1.43 pasos (en promedio) antes de absorberse**
- **Si comienza en S_1 el número promedio de veces que pasa por S_1 es 1.14 y por S_3 0.57.**
- **Si comienza en S_3 el número promedio de veces que pasa por S_1 es 0.29 y por S_3 1.14**

Determinación de la probabilidad de terminar en un estado j absorbente comenzando en un estado i no absorbente:

$$n = (I - N)^{-1} \cdot A$$

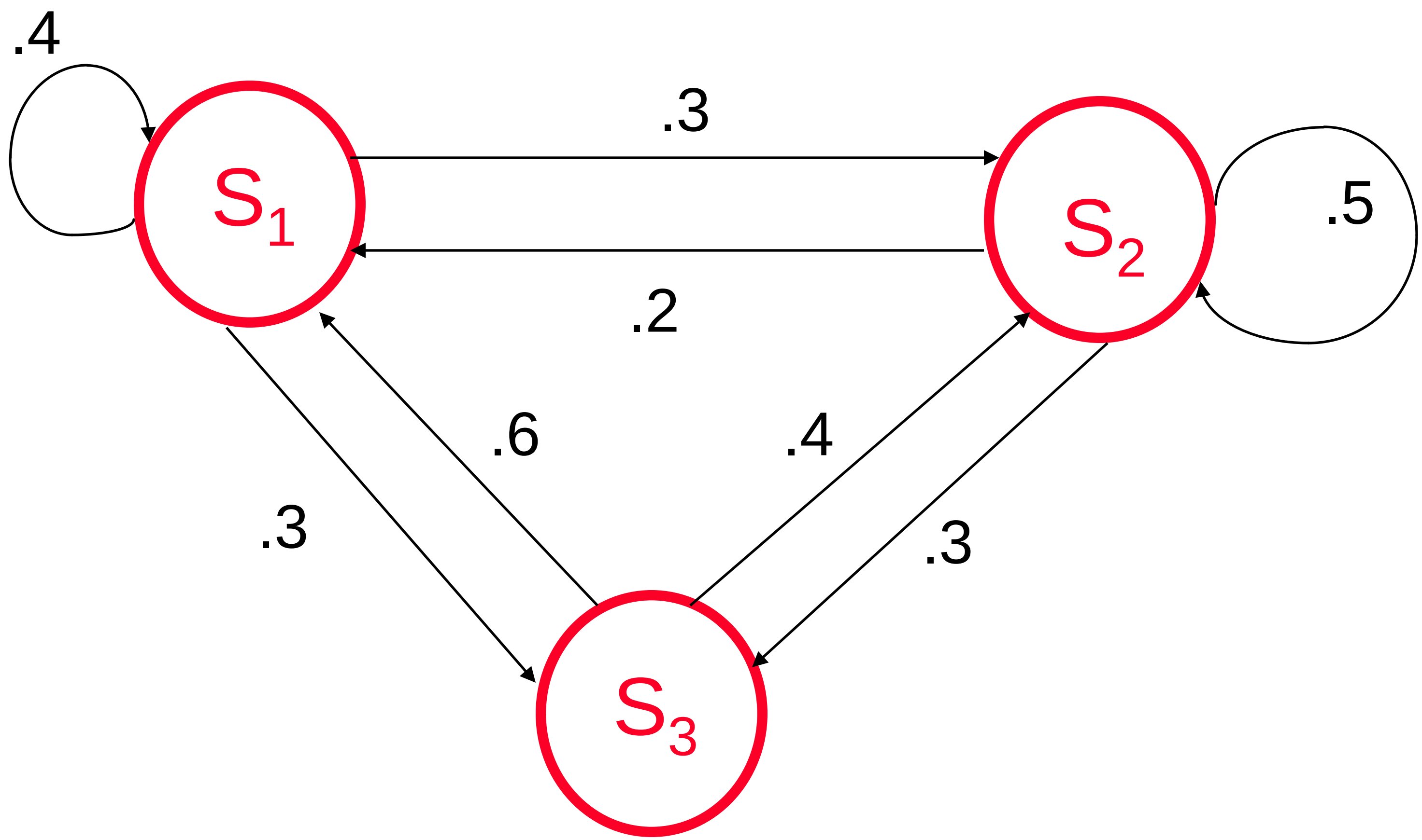
$$(I - N)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.14 & 0.57 \\ 0.29 & 1.14 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$(I - N)^{-1} . A = \begin{bmatrix} 0.57 & 0.43 \\ 0.14 & 0.86 \end{bmatrix}$$

- **Comenzando en S_1:**
  - probabilidad de terminar en S_1 es 0.57
  - probabilidad de terminar en S_3 es 0.43
- **Comenzando en S_3:**
  - probabilidad de terminar en S_1 es 0.14
  - probabilidad de terminar en S_3 es 0.86

EXTENSION PARA CADENAS NO ABSORBENTES

- **Para determinar el número de pasos promedio requeridos para alcanzar un estado no absorbente “ j “ se procede como si fuera absorbente**


.4
S1
.3
S2
.5
.2
.6
.4
.3
.3
S3

$$P = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .4 & .3 & .3 \\ .2 & .5 & .3 \\ 0 & .4 & .6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para averiguar el número promedio de transacciones que se realizan hasta alcanzar por primera vez el estado 3, se supone S_3 absorbente.

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} & \begin{bmatrix} .4 & .3 & .3 \\ .2 & .5 & .3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Luego se pasa al formato estándar

$$\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline A & N \end{array}$$

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S_3 & S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_3 \\ S_1 \\ S_2 \end{array} & \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline .3 & .4 & .3 \\ .3 & .2 & .5 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline A & N \end{array}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$I - N = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.3 \\ -0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(I - N)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.08 & 1.25 \\ 0.82 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$(I - N)^{-1} . \bar{1} = \begin{bmatrix} 2.08 & 1.25 \\ 0.82 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 3.32 \end{bmatrix}$$

- **Si el proceso comienza en S_1 hará 3.33 transacciones (en promedio) antes de llegar por primera vez a S_3**

- **Si el proceso comienza en S_2 hará 3.32 pasos (en promedio) antes de lograr por primera vez el estado S_3**

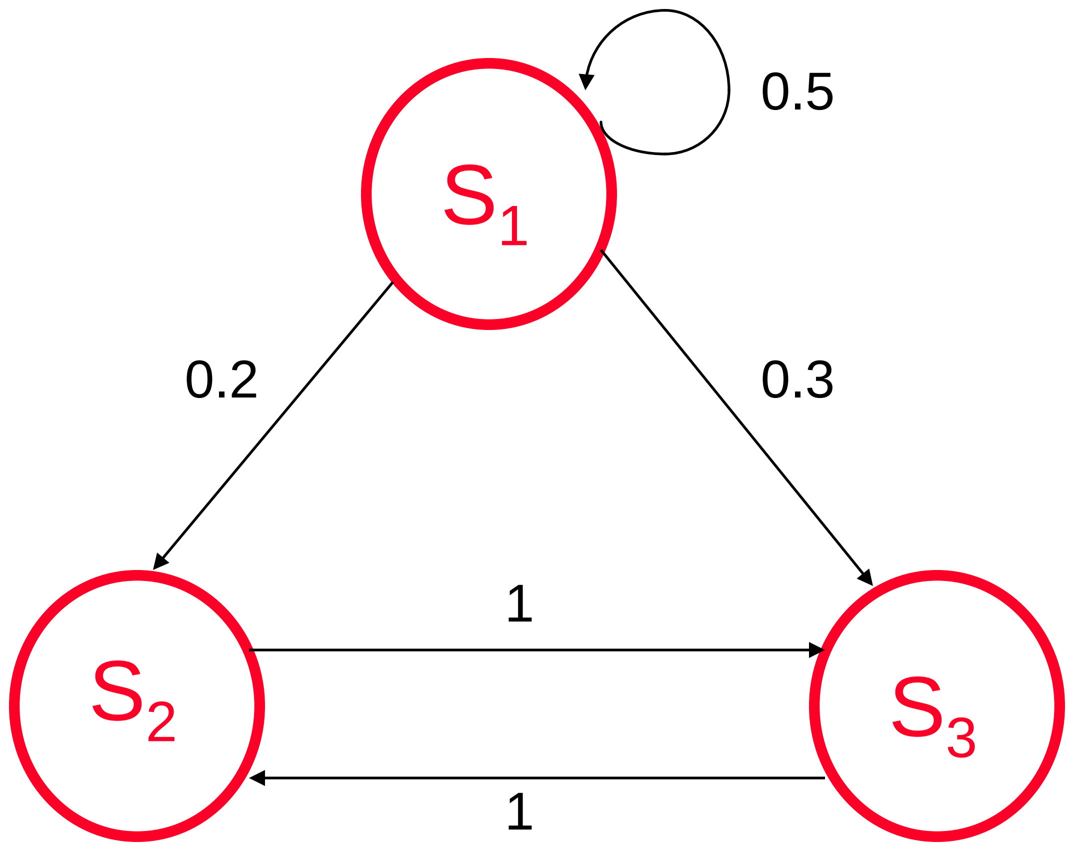
CADENAS CICLICAS

- UN CICLO ES UN CAMINO CERRADO ENTRE ESTADOS RECURRENTES

- PARA QUE UNA CADENA SEA CICLICA DEBE CUMPLIRSE QUE

  – TENGA POR LO MENOS UN CICLO

  – SEA POSIBLE ENTRAR EN EL CICLO



S1
0.5
0.2
0.3
S2
1
S3
1

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & S_1 & S_2 & S_3 \\
\hline
S_1 & .5 & .2 & .3 \\
S_2 & 0 & 0 & 1 \\
S_3 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

NO ES ERGODICA: ES REDUCIBLE EN (S_2, S_3) Y EN (S_1)

Número de intentos promedio que se realizan para alcanzar el ciclo:

- **Se supone al ciclo como un estado absorbente:**

$$
\begin{array}{c} \\ S_2\text{-}S_3 \\ S_1 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} S_2\text{-}S_3 & S_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .5 & .5 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$I - N = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} .5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 \end{bmatrix}$$

$$(I - N)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$(I - N)^{-1} \cdot \bar{1} = 2$$

A largo plazo (régimen permanente):

- EL SISTEMA ES CICLICO

- EL PORCENTAJE DEL TIEMPO QUE PASA EN CADA ESTADO SE CALCULA CON EL PROCEDIMIENTO VISTO PARA REGIMEN PERMANENTE.

$$\begin{bmatrix} p(1) & p(2) & p(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(1) & p(2) & p(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p(1)\,.\,0.5 = p(1) \\ 2.\,p(2) + p(3) = p(3) \\ p(1) + p(2) + p(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} p(1) &= 0 \\ p(2) &= 0.5 \\ p(3) &= 0.5 \end{aligned}$$