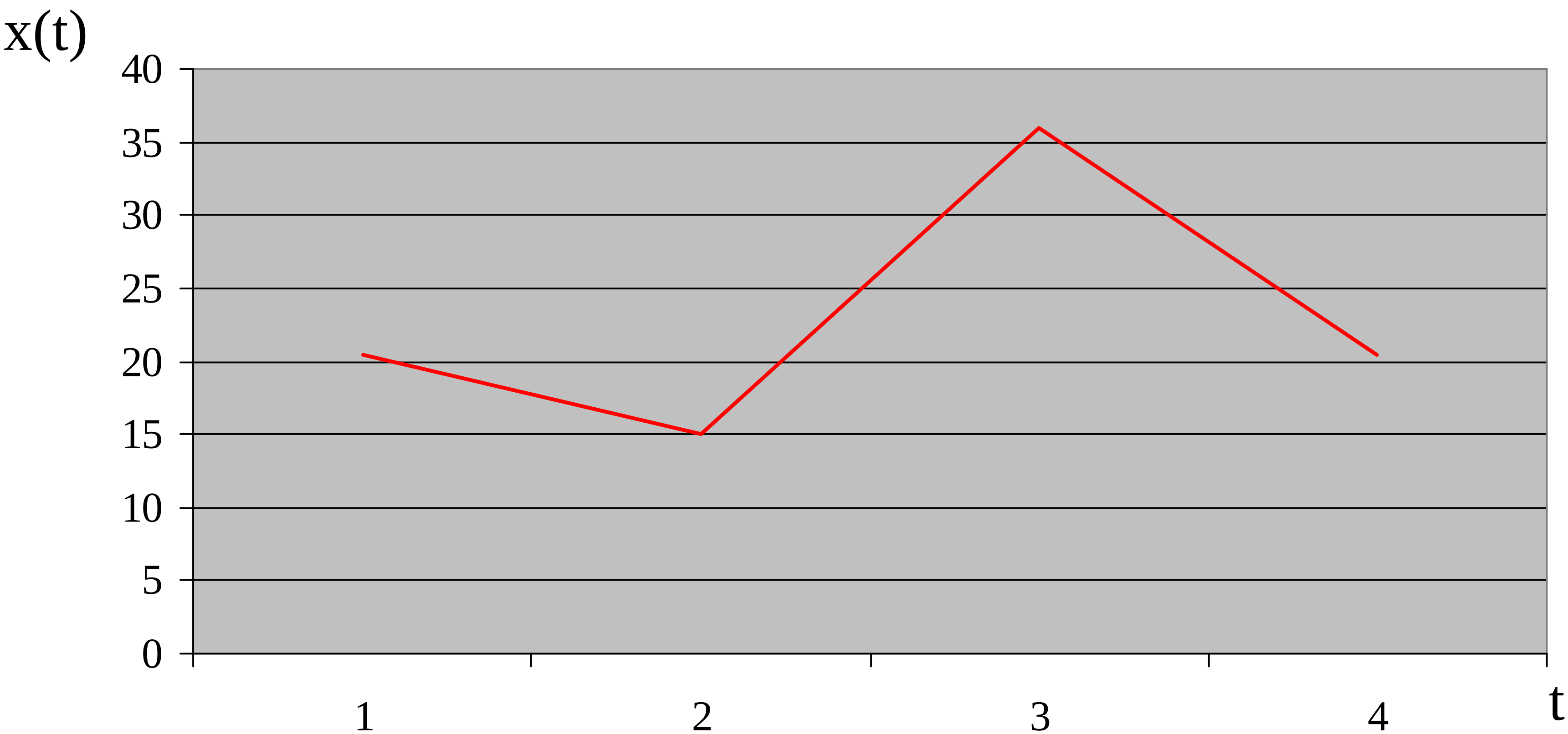
- Las cadenas de Markov estudian procesos estocásticos
- Los procesos estocásticos son modelos matemáticos que describen sistemas dinámicos sometidos a procesos aleatorios
- Parámetros: t: tiempo

  x (t): variable aleatoria

  $p_x(t)$: probabilidad de estado asociado

Ejemplo: pronóstico de la potencia eléctrica requerida en un día



Clasificación de los procesos estocásticos

- Según la memoria de la historia de estados
  - Procesos aleatorios puros
  - Procesos sin memoria, tipo Markov
  - Procesos con memoria
- Según la naturaleza de las variables

		Espacio de estados	
		Discreto	Continuo
Parámetro	D	Cadenas de Markov de parámetro discreto	Procesos de Markov de parámetro discreto
Parámetro	C	Cadenas de Markov de parámetro continuo	Procesos de Markov de parámetro continuo

Definición

- Probabilidad condicional de transición

$$P\{x(t+\triangle t) = j \,/\, x(t) = i\} = P_{ij}(t+\triangle t)$$

con $t = 0, 1, ...$

$\triangle t = 1, 2, ...$

$i = j = 0, 1, ..., m$

Clasificación de las Cadenas de Markov

- Según homogeneidad en el tiempo
  - Una cadena es homogénea cuando la probabilidad condicional de transición del estado i al j en cualquier instante t solo depende de $\triangle t$

$$p_{ij}(t, t+\triangle t) = p_{ij}(\triangle t) \qquad \forall\, t \geqslant 0$$

- Matriz de probabilidad de transición

$$P(\triangle t) = \begin{array}{c|cccc} i/j & 0 & 1 & \cdots\cdots & m \\ \hline 0 & p_{00}(\triangle t) & p_{01}(\triangle t) & \cdots\cdots & p_{0m}(\triangle t) \\ 1 & p_{10}(\triangle t) & p_{11}(\triangle t) & \cdots\cdots & p_{1m}(\triangle t) \\ & & & & \vdots \\ m & p_{m0}(\triangle t) & p_{m1}(\triangle t) & \cdots\cdots & p_{mm}(\triangle t) \end{array}$$

donde se cumplen las sig. condiciones:

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1$$

$$\sum p_{ij}(\triangle t) = 1$$

- Estudiaremos cadenas de Markov de parámetro <u>continuo</u> y estados <u>discretos</u>
- El sistema está en régimen permanente
- El *objetivo* es hallar el vector $\vec{p}$ de probabilidades de estado en régimen permanente

$$\vec{p}(t) = \{ p_I(t); p_{II}(t); p_{III}(t); \ldots\ldots; p_m(t) \}$$

vector de probabilidades de estado en el instante t

$$\vec{p}(t+\triangle t) = \{ p_I(t+\triangle t); p_{II}(t+\triangle t); p_{III}(t+\triangle t); \ldots; p_m(t+\triangle t) \}$$

vector de probabilidades de estado en el instante t $+\triangle t$

- Matriz de probabilidades condicionales de transición

$$P(\triangle t) = \begin{vmatrix} P_{I\text{-}I}(\triangle t) & P_{I\text{-}II}(\triangle t) \ldots\ldots\ldots\ldots & P_{I\text{-}m}(\triangle t) \\ P_{II\text{-}I}(\triangle t) & & P_{II\text{-}m}(\triangle t) \\ & & \\ P_{m\text{-}I}(\triangle t) & & P_{m\text{-}m}(\triangle t) \end{vmatrix}$$

- Los vectores de probabilidades de estado en t y t +△t pueden vincularse con la matriz, según:

$$\vec{p}(t) \,.\, P(\triangle t) = \vec{p}(t+\triangle t)$$

- Como estudiamos sistemas en régimen permanente, los vectores $\vec{p}(t)$ y $\vec{p}(t+\triangle t)$ son iguales, independientes del estado inicial y del lapso transcurrido

$$\vec{p}(t) \,.\, P(\triangle t) = \vec{p}(t+\triangle t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p} \,.\, \{P(\triangle t)\} = \vec{p}}$$ Ec. de estado

donde $\vec{p}$ vector de probabilidades de estado en cualquier instante

- Trabajaremos con las derivadas de las probabilidades de transición respecto del tiempo en t = 0

$$\left.\frac{d\,(\vec{p}.P(\triangle t))}{d\triangle t}\right|_{\triangle t=0} = \left.\frac{d\vec{p}}{\triangle t}\right|_{\triangle t=0}$$

$$\left.\frac{\vec{p}\ .\ d\,(P(\triangle t))}{d\triangle t}\right|_{\triangle t=0} = \vec{0}$$

$$\vec{p}\ \ x\ \ \{D\} = \vec{0}$$

donde $\vec{p} = \{p_I; p_{II}; p_{III}........; p_m\}$

$\vec{0} = \{0; 0; 0........;0\}$

$\{D\} = \{d_{ij}\}$ $\qquad d_{ij} = \left.\frac{dP_{ij}\,(\triangle t)}{d\triangle t}\right|_{\triangle t=0}$

tasas de transición

- En el estudio de los modelos de Teoría de Colas se supone que los arribos al sistema y los servicios en los canales de atención son procesos tipo Poisson

$$P_x(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{x}}{x!}$$

- La esperanza de esta variable aleatoria discreta es λt donde λ resulta igual a la cantidad de clientes promedio que llegan al sistema por unidad de tiempo

- Los eventos aleatorios "finalización de un servicio" también tienen distribución Poisson. La distribución de los tiempos de servicio es exponencial, dada por:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad \text{para } t \geq 0$$

- La esperanza es $1/\mu$, tiempo medio de servicios. μ se interpreta como el caudal de servicios

- ¿Por qué trabajar con las derivadas de las probabilidades de transición?

Para regímenes de arribos y servicios a la Poisson las derivadas de las probabilidades de transición con respecto a $\triangle t$*, para* $\triangle t=0$ *son parámetros de las respectivas distribuciones de probabilidad.*

Régimen de arribos

- $P_x(t) = P_{PO}\,(x/t, \lambda) = \dfrac{e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^x}{x!}$ para x = 1

- $P_1(t) = e^{-\lambda t}\,\lambda t$ sólo depende del tiempo y no de la historia

Las tasas de arribos serán:

- $d_x(t) = \dfrac{d}{dt} P_x\,(t)\Big|_{t=0} = \dfrac{-\,\lambda\, e^{-\lambda 0}\,(\lambda 0)^x + e^{\lambda 0}\,\lambda^x\, x\,(0)^{\,x-1}}{x!} = 0$

- $d_1(t) = \dfrac{d}{dt} P_1\,(t)\Big|_{t=0} = -\,\lambda\, e^{-\lambda 0}\,(\lambda 0)^1 + e^{\lambda 0}\,\lambda = \lambda$

Teoría de Colas:

- Cadenas de Markov de parámetro continuo y estados discretos.
- El sistema es homogéneo y está en régimen permanente.
- Para regímenes de arribos y servicios a la Poisson, las tasas de transición serán:
  - λ, media de arribos, para toda transición que implique el arribo de un cliente en un lapso $\triangle$t y 0 para toda transición que implique más de un arribo en $\triangle$t
  - μ, para toda transición que implique la finalización de un servicio en un lapso $\triangle$t y 0 para toda transición que requiera la finalización de más de un servicio en $\triangle$t
- Para toda transición que implique la ocurrencia de más de un evento aleatorio, la tasa de transición es nula.