Tutorial Cadenas de Markov

El tema debe estudiarse junto con:

- El apunte "Cadenas de Markov " (Rojo-Miranda) disponible en el Campus en el Tema 4 (Material de Estudio)
- Guía de Trabajos Prácticos (tema 9)

Tutorial Cadenas de Markov

Procesos Estocásticos

- Parámetro t
- Variable Aleatoria $X(t)$
- Probabilidad de Estado $p_X(t)$

Tutorial Cadenas de Markov

Clasificación de los procesos estocásticos según la memoria de los estados

- Procesos aleatorios puros
- Procesos sin memoria tipo Markov
- Procesos con memoria

Andréi Markov
1856-1922

Tutorial Cadenas de Markov

Clasificación de los procesos estocásticos según la naturaleza continua o discreta de las variables

		Naturaleza del espacio de estados $X(t)$	
		discreto	continuo
Naturaleza del parámetro t	discreto	Cadenas de Markov de parámetro discreto	Procesos de Markov de parámetro discreto
	continuo	Cadenas de Markov de parámetro continuo	Procesos de Markov de parámetro continuo

Tutorial Cadenas de Markov

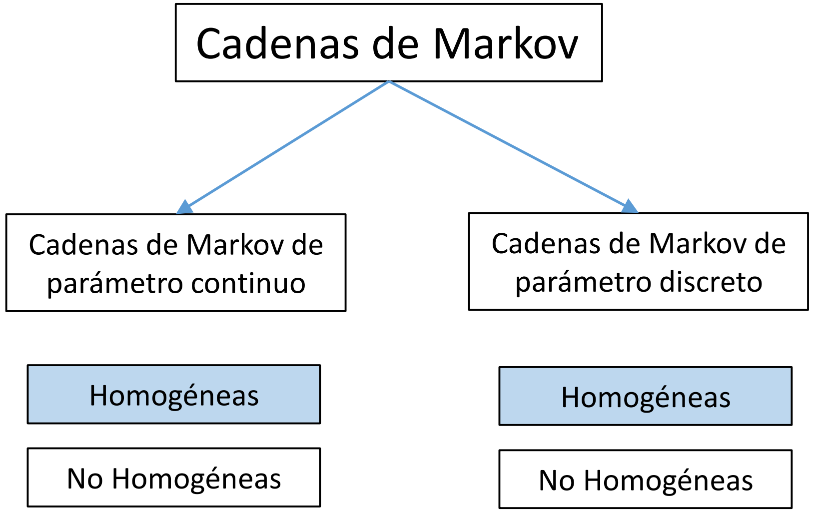
Clasificación de las Cadenas de Markov según su homogeneidad en el tiempo

Probabilidad condicional de transición

$$p_{ij}(t, t + \Delta t) = P\{X(t + \Delta t) = j \mid X(t) = i\}$$

Condición de homogeneidad

$$p_{ij}(t, t + \Delta t) = p_{ij}(\Delta t) \qquad \forall t \geq 0$$



Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Probabilidad condicional de transición

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{X(t+\Delta t) = j \mid X(t) = i\}$$

$$0 \leq p_{ij}(\Delta t) \leq 1$$

Matriz de las probabilidades de transición

$$|P(\Delta t)| = \begin{bmatrix} p_{00}(\Delta t) & \cdots & p_{0m}(\Delta t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m0}(\Delta t) & \cdots & p_{mm}(\Delta t) \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=0}^{j=m} p_{ij}(\Delta t) = 1$$

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Probabilidad condicional de transición de un paso

$$p_{ij} = p_{ij}(1) = P\{X(t + \Delta t) = j \mid X(t) = i\}$$

$$0 \leq p_{ij} \leq 1$$

Matriz de las probabilidades de transición de un paso

$$|P| = \begin{bmatrix} p_{00} & \cdots & p_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m0} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=0}^{j=m} p_{ij} = 1$$

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Matriz de las probabilidades de transición de un paso

$$|P(\Delta t)| = \begin{bmatrix} p_{00} & \cdots & p_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m0} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=0}^{j=m} p_{ij} = 1$$

Ejemplo: El problema del jardinero (TAHA)

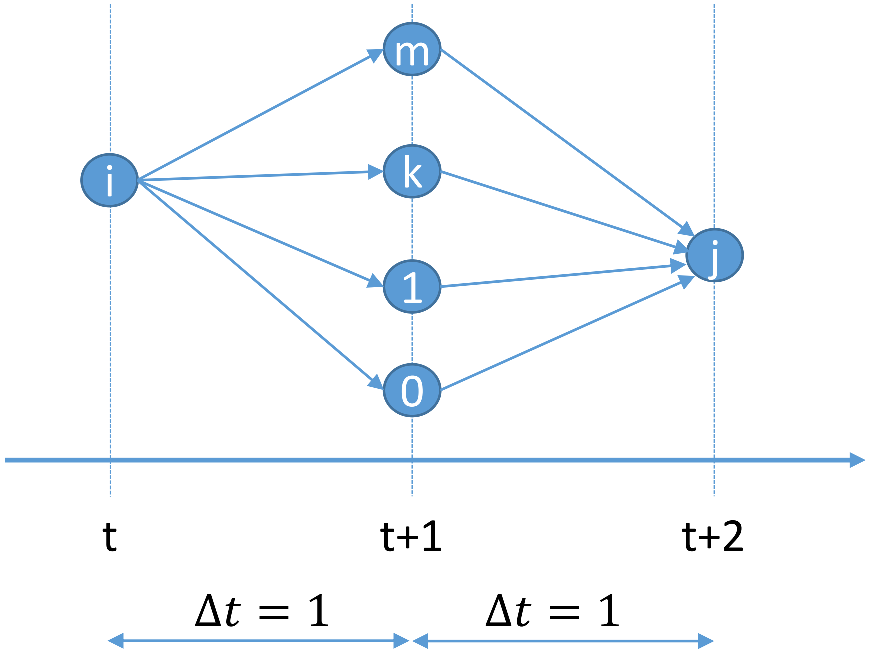
Un jardinero atiende una porción de tierra. Todos los años al inicio de la estación de cultivo realiza pruebas químicas para revisar la condición de la parcela. Dependiendo de los resultados de las pruebas puede clasificar la productividad del jardín como "buena", "regular" o "mala". La experiencia anterior indica que la productividad del año en curso puede suponerse dependiente solo de la condición del terreno del año anterior. Por tanto, el jardinero, puede representar las probabilidades de transición en un período de un año de un estado de productividad a otro en términos de siguiente cadena de Markov:

$$\begin{array}{rcccl} & \text{Buena} & \text{Regular} & \text{Mala} & \\ & 0{,}30 & 0{,}60 & 0{,}10 & \text{Buena} \\ |P| = & 0{,}10 & 0{,}60 & 0{,}30 & \text{Regular} \\ & 0{,}05 & 0{,}40 & 0{,}55 & \text{Mala} \end{array}$$

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Matriz de las probabilidades de transición de dos pasos



$$p_{ij} = p_{ij}(2) = P\{X(t+2) = j \mid X(t) = i\}$$

$$p_{ij}(2) = \sum_{k=0}^{k=m} p_{ik} \cdot p_{kj}$$

Ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$|P(\Delta t = 2)| = |P(\Delta t = 1)|^2$$

$$|P(\Delta t = n)| = |P(\Delta t = 1)|^n$$

$$|P(n)| = |P|^n$$

Expresión general de la ecuación de Chapman-Kolmogorov

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Matriz de las probabilidades de transición de n pasos

$$
\begin{array}{rcccl}
 & \text{Buena} & \text{Regular} & \text{Mala} & \\
 & 0{,}30 & 0{,}60 & 0{,}10 & \text{Buena} \\
|P| = & 0{,}10 & 0{,}60 & 0{,}30 & \text{Regular} \\
 & 0{,}05 & 0{,}40 & 0{,}55 & \text{Mala}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
 & \text{Buena} & \text{Regular} & \text{Mala} & \\
 & 0{,}1068 & 0{,}5330 & 0{,}3603 & \text{Buena} \\
|P(4)| = & 0{,}1023 & 0{,}5265 & 0{,}3713 & \text{Regular} \\
 & 0{,}0995 & 0{,}5219 & 0{,}3786 & \text{Mala}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
 & \text{Buena} & \text{Regular} & \text{Mala} & \\
 & 0{,}0155 & 0{,}5800 & 0{,}2650 & \text{Buena} \\
|P(2)| = & 0{,}1050 & 0{,}5400 & 0{,}3550 & \text{Regular} \\
 & 0{,}0825 & 0{,}4900 & 0{,}4275 & \text{Mala}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
 & \text{Buena} & \text{Regular} & \text{Mala} & \\
 & 0{,}1017 & 0{,}5254 & 0{,}3729 & \text{Buena} \\
|P(10)| = & 0{,}1017 & 0{,}5254 & 0{,}3729 & \text{Regular} \\
 & 0{,}1017 & 0{,}5254 & 0{,}3729 & \text{Mala}
\end{array}
$$

Tutorial Cadenas de Markov

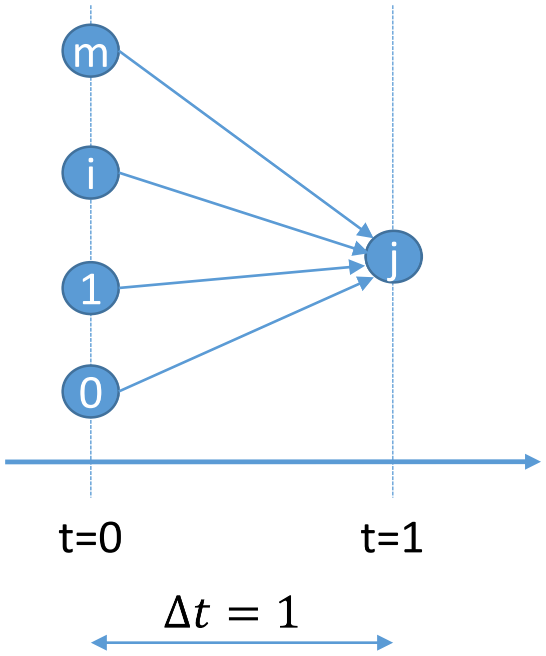
Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Probabilidad incondicional de estado

$p_i(t) \longrightarrow$ Es la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado i en el instante t

$\vec{p}(t) \longrightarrow$ El conjunto de probabilidades incondicionales de estado $p_i(t)$ $\forall i$ definen el vector de probabilidades de estado $\vec{p}(t)$

Probabilidad incondicional de estado luego de 1 paso



$$p_j(1) = \sum_{i=0}^{m} p_i(0).\,p_{ij}$$

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0).\,|P|$$

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Ecuación General de Estado

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t).|P(\Delta t)|$$

Problema del Jardinero: Vector de probabilidades de estado para el año t

	Bueno	Regular	Malo
t = 0	1.0000	0.0000	0.0000
t = 1	0.3000	0.6000	0.1000
t = 2	0.1550	0.5800	0.2650
t = 3	0.1178	0.5470	0.3353
t = 4	0.1068	0.5330	0.3603
t = 5	0.1033	0.5279	0.3687
t = 6	0.1022	0.5263	0.3715
t = 7	0.1019	0.5257	0.3724
t = 8	0.1018	0.5255	0.3727
t = 9	0.1017	0.5255	0.3728
t = 10	0.1017	0.5254	0.3729

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Estados Accesibles: j es accesible desde i si en un número de pasos n, es posible pasar de i a j.

Estados Comunicantes: Si j es accesible desde i e i es accesible desde j, i y j son estados comunicantes.

Cadena Homogénea Ergódica: Todos los estados de la cadena son comunicantes.

> **Cadena Homogénea Ergódica Regular**: Todos los estados de la cadena pueden comunicarse luego de r pasos, entonces $|P|^r$ tiene todos sus elementos no nulos.
>
> **Cadena Homogénea Ergódica Periódica**: No se puede encontrar una potencia r de P para la cual todos los elementos de $|P|^r$ sean no nulos.

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Estudio de las Cadenas Ergódicas en Régimen Permanente

Ecuación General de Estado: $\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t).|P(\Delta t)|$

En régimen permanente se cumple que: $\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t) = \vec{p} \; \ldots constante$

Entonces, la Ecuación General de Estado en régimen permanente es: $\vec{p} = \vec{p}.|P| \longrightarrow \vec{0} = \vec{p}.\{|P| - |I|\}$
que es un sistema de m ecuaciones con m incógnitas pero que resulta ser Linealmente Dependiente. Para resolverlo, podemos remplazar cualquiera de las m ecuaciones por una que indique que las probabilidades de estado del vector p deben sumar 1.

$$\left.\begin{aligned} &\vec{0} = \vec{p}.\{|P| - |I|\} \\ &\sum_{i=o}^{m} p_i = 1 \end{aligned}\right\} \quad \vec{p}.|A| = \vec{B} \longrightarrow \vec{p} = \vec{B}.|A|^{-1}$$

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Problema del jardinero: Ejemplo de aplicación de la ecuación de estado en régimen permanente

	0.3000	0.6000	0.1000	[P] : Matriz de las probabilidades de transicion para un período de un año.
[P] =	0.1000	0.6000	0.3000	Se cumple que: [p] = [p].[P]
	0.0500	0.4000	0.5500	
	-0.7000	0.6000	0.1000	Se cumple que [p] { [P] - [I] } = 0
[P] - [I] =	0.1000	-0.4000	0.3000	
	0.0500	0.4000	-0.4500	
	-0.7000	0.6000	1.0000	La matríz [P]-[I] define un sistema de ecuaciones LD. Para poder calcular las
[A] =	0.1000	-0.4000	1.0000	probabilidades de estado en régimen permanente se excluye una de las
	0.0500	0.4000	1.0000	ecuaciones y se remplaza por una ecuación que indica que la sumatoria de
				probabilidades es 1.
	-1.3559	-0.3390	1.6949	
[A]^(-1) =	-0.0847	-1.2712	1.3559	
	0.1017	0.5254	0.3729	
[B] =	0.0000	0.0000	1.0000	
[p] =	0.1017	0.5254	0.3729	El vector [p] se obtiene resolviendo [p] =[B].[A]^(-1)

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Estudio de las Cadenas No Ergódicas. Cadenas Absorbentes
Un estado es absorbente cuando una vez alcanzado, el sistema queda permanentemente en ese estado. En las cadenas que tienen algún estado absorbente, interesa estudiar el comportamiento en el régimen transitorio.

La matriz $|P|$ puede reagruparse en la forma canónica o estándar:

$$|P| = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & N \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a \\ n \end{array} \\ \begin{array}{cc} a & n \end{array} & \end{array}$$

I - **Matriz Identidad**: Probabilidad de permanecer en un estado absorbente para cada estado absorbente. Es por definición =1 (axa).
A: **Matriz de los Estados Absorbentes**: Cada elemento indica la probabilidad de ser absorbido (pasar de un estado no absorbente a uno absorbente) en un paso (nxa).
N: **Matriz de Estados No Absorbentes**: Cada elemento representa la probabilidad de NO ser absorbido (pasar de un estado no absorbente a otro no absorbente) en un paso (nxn).

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Estudio de las Cadenas No Ergódicas. Cadenas Absorbentes

Número esperado de transiciones que el sistema tarda en ser absorbido

$$\bar{n} = \left[|A|.\vec{1} + 2.|N|.|A|.\vec{1} + 3.|N|^2.|A|.\vec{1} + 4.|N|^3.|A|.\vec{1} + \cdots\right]$$

$|A|.\vec{1} + |N|\vec{1} = |I|.\vec{1}$ podemos escribir esta ecuación ya que por filas la matriz $|P|$suma 1.

$|A|\vec{1} = \{|I| - |N|\}.\vec{1}$

$$\bar{n} = \left[\{|I| - |N|\}.\vec{1} + 2.|N|.\{|I| - |N|\}.\vec{1} + 3.|N|^2.\{|I| - |N|\}.\vec{1} + 4.|N|^3.\{|I| - |N|\}.\vec{1} + \cdots\right]$$

$$\bar{n} = [\{|I| - |N|\} + 2.|N|.\{|I| - |N|\} + 3.|N|^2.\{|I| - |N|\} + 4.|N|^3.\{|I| - |N|\} + \cdots].\vec{1}$$

$$\bar{n} = [I + N + N^2 + N^3 + N^4 + \cdots].\vec{1}$$

$$\bar{n} = \left[\frac{I}{(I - N)}\right].\vec{1} = (I - N)^{-1}.\vec{1}$$

Tutorial Cadenas de Markov

Cadenas de Markov Homogéneas de Parámetro Discreto

Estudio de las Cadenas No Ergódicas. Cadenas Absorbentes

Probabilidad de absorción por cada estado absorbente.

Para cada estado no absorbente i, interesa conocer la probabilidad de ser absorbido por cada estado absorbente j

$$p(i \to j) = p(i \to j\ en\ un\ paso) + p(i \to j\ en\ dos\ pasos) + p(i \to j\ en\ tres\ pasos) + \cdots$$
$$p(i \to j) = I.A + N.A + N^2.A + N^3.A + \cdots + N^n.A + \cdots$$
$$p(i \to j) = [I + N + N^2 + N^3 + \cdots + N^n + \cdots].A$$
$$p(i \to j) = \left[\frac{I}{(I - N)}\right].A = (I - N)^{-1}.A$$