

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Transformada discreta de Fourier

Dr. Ing. Pedro D. Arini

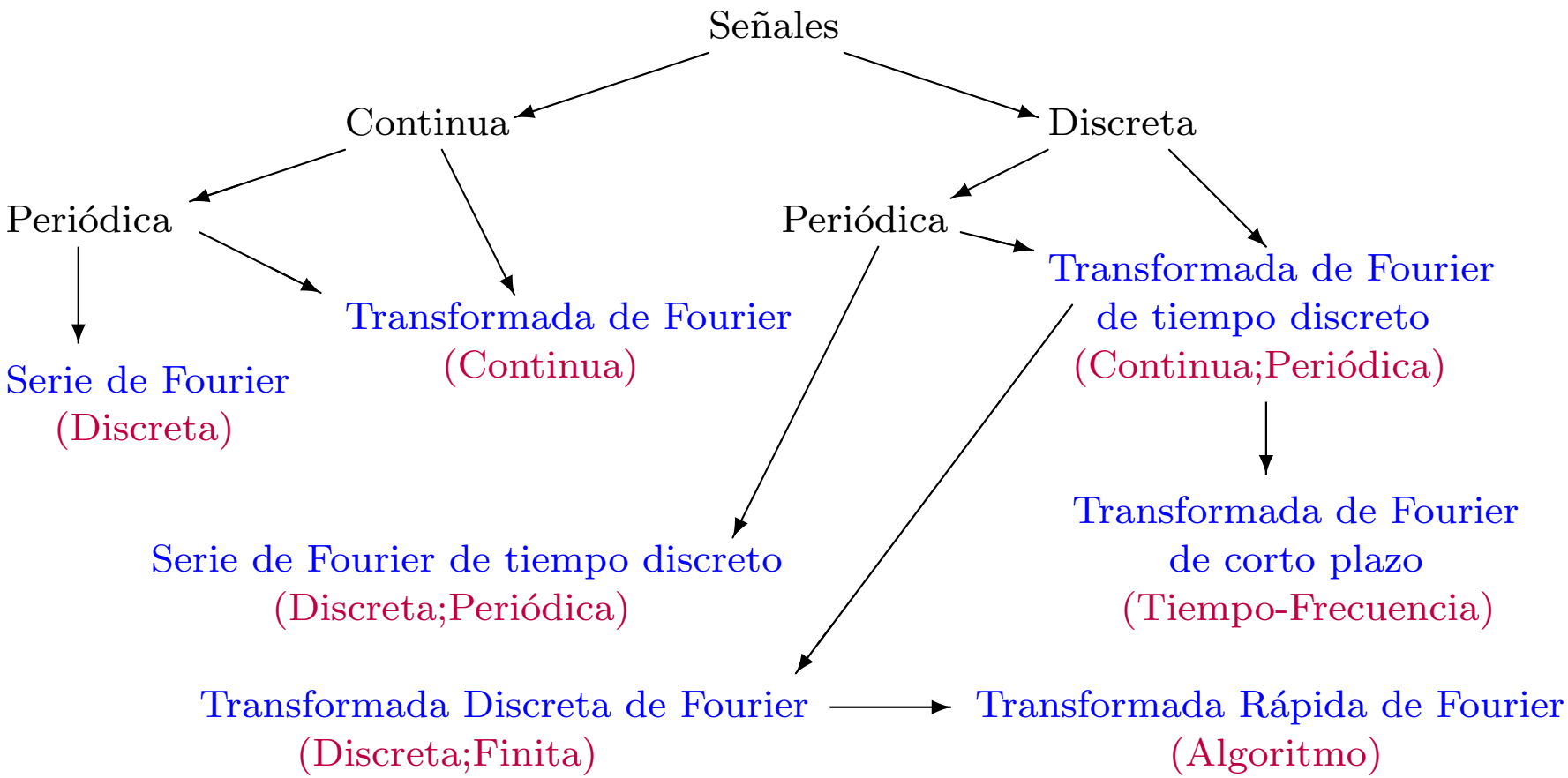
Señales y Sistemas
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

2do. cuatrimestre 2026

Resumen

1. Repaso de Fourier
2. Transformada discreta de Fourier (DFT)
3. Propiedades de la transformada discreta de Fourier
4. Cálculo eficiente de la DFT
5. Análisis de señales y sistemas mediante la DFT

Repaso: análisis de Fourier



Serie Fourier de tiempo continuo:
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$, síntesis
$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$, análisis

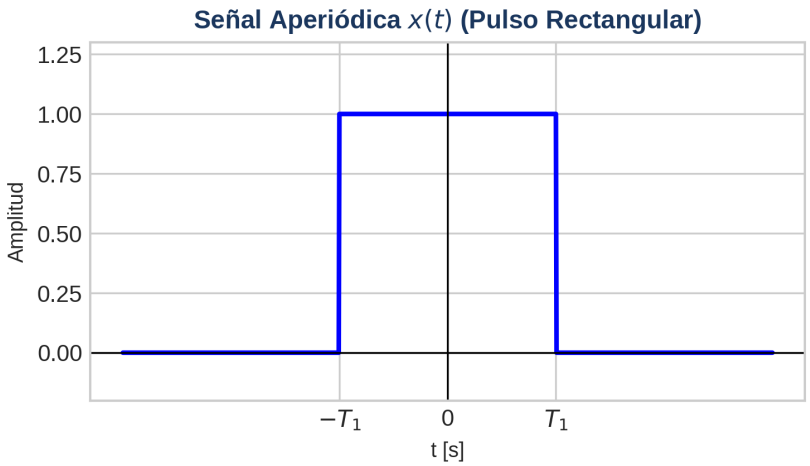
Transformada Fourier de tiempo continuo:
$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, síntesis
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$, análisis

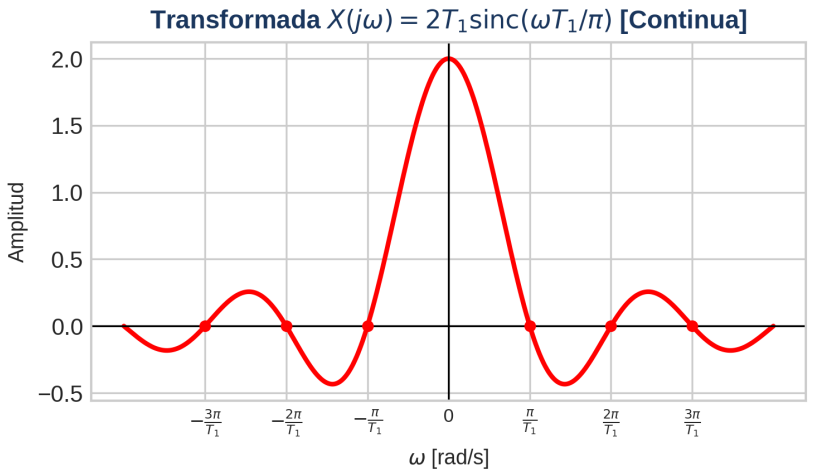
Tiempo Continuo

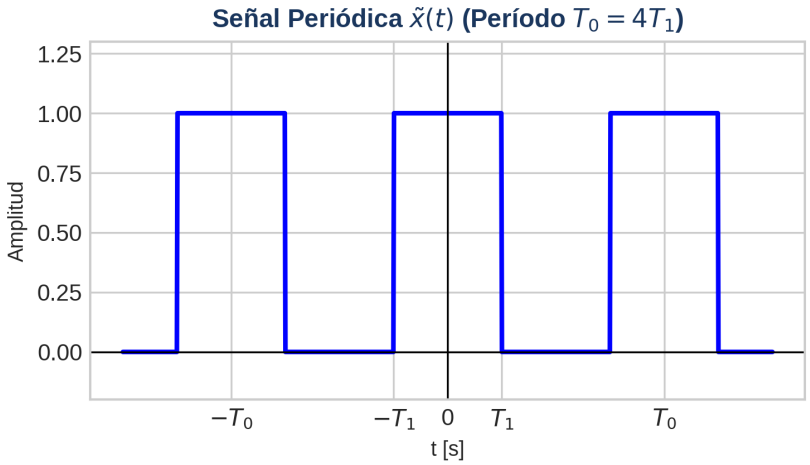
Pulso Rectangular de ancho $2T_1$ y período T_0:

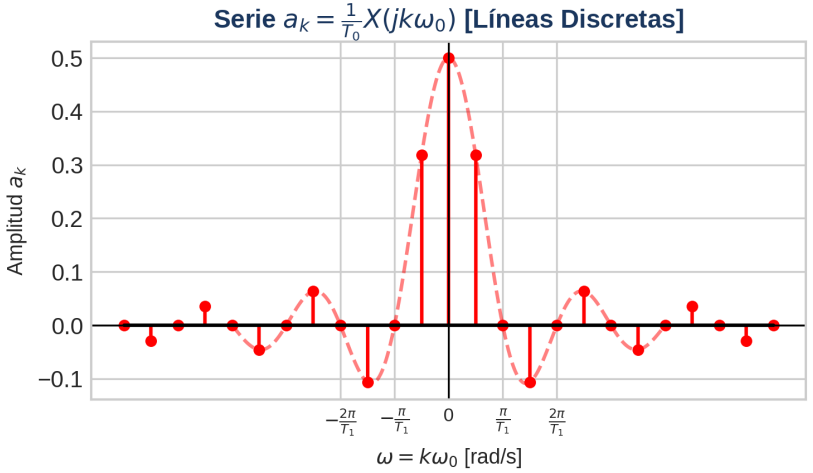
- **Transformada:** $X(j\omega) = 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$
  - máximo $(\omega = 0)$: $X(j0) = 2T_1$
  - cruces por cero: $\omega = \pm\frac{\pi}{T_1}, \pm\frac{2\pi}{T_1}, \pm\frac{3\pi}{T_1}, \ldots$
- **Serie:** $a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0})$
  - máximo $(k = 0)$: $a_0 = \frac{2T_1}{T_0}$
  - cruces por cero: $k\omega_0 = \pm\frac{\pi}{T_1}, \pm\frac{2\pi}{T_1}, \ldots$

Tiempo Continuo: Serie (CTFS) vs. Transformada (CTFT)









Serie Fourier de tiempo discreto:
$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}$, síntesis
$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$, análisis

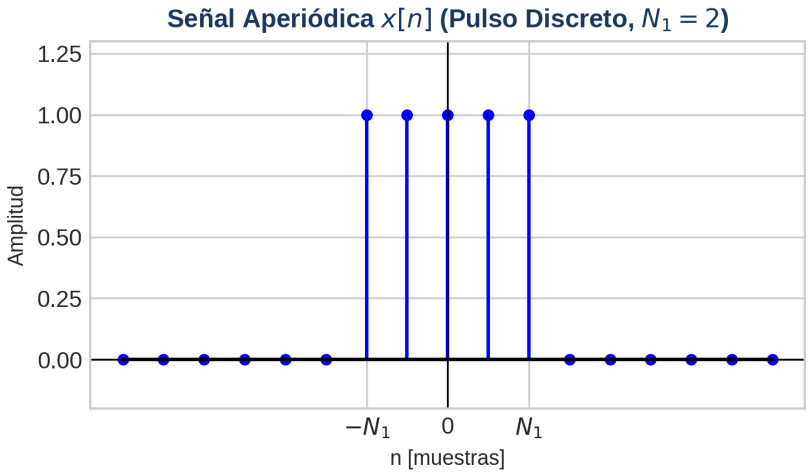
Transformada Fourier de tiempo discreto:
$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$, síntesis
$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$, análisis

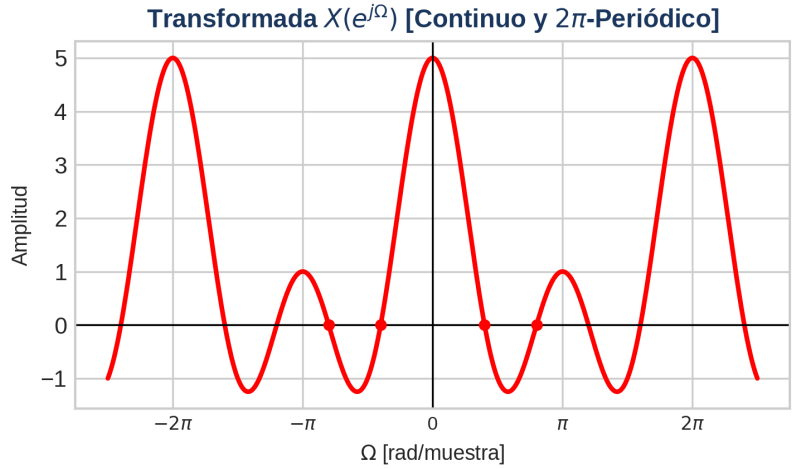
Tiempo Discreto

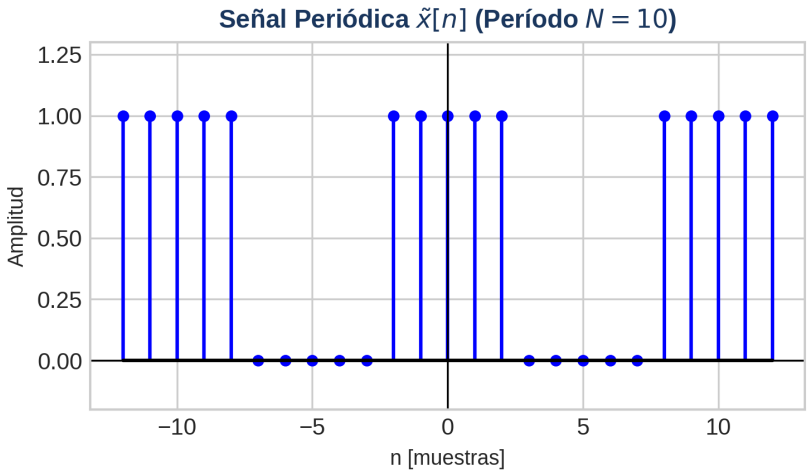
Pulso Discreto de ancho $2N_1 + 1$ y período N:

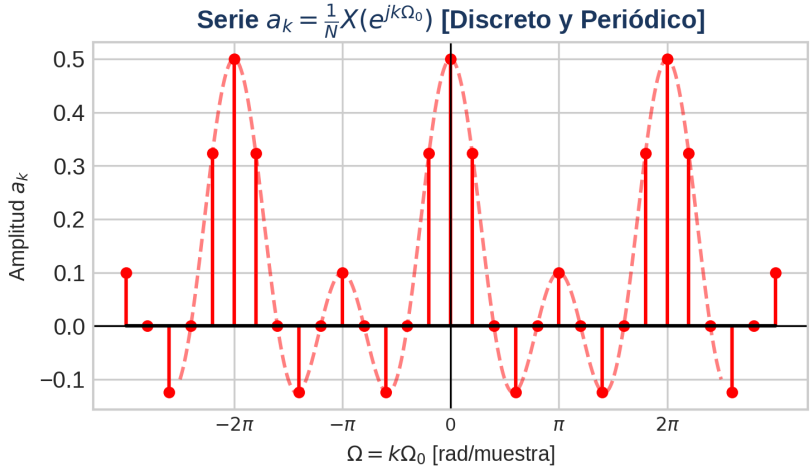
- Transformada (DTFT): $X(e^{j\Omega}) = \frac{\sin(\Omega(N_1+1/2))}{\sin(\Omega/2)}$
  - máximo($\Omega = 0$): $X(e^{j0}) = 2N_1 + 1$
  - cruces por cero en $[-\pi, \pi]$: $\Omega = \pm \frac{2\pi m}{2N_1+1} \quad (m \neq 0)$
- Serie (DTFS): $a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin(k\Omega_0(N_1+1/2))}{\sin(k\Omega_0/2)} \quad (\Omega_0 = \frac{2\pi}{N})$
  - máximo($k = 0$): $a_0 = \frac{2N_1+1}{N}$
  - cruces por cero: $k\Omega_0 = \pm \frac{2\pi m}{2N_1+1}$

Tiempo Discreto: Serie (DTFS) vs. Transformada (DTFT)









Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La transformada de Fourier es una importante herramienta de análisis para sistemas y señales en tiempo continuo y discreto.

Por eso es importante contar con un instrumento que permita calcular en forma eficiente la transformada de Fourier de una señal!!

Notar que a través del teorema del muestreo, podemos en principio pensar directamente en el cálculo de transformadas de Fourier de tiempo discreto.

Aquí aparece la Transformada Discreta de Fourier (DFT), que es básicamente un muestreo equispaciado en frecuencia de la transformada de Fourier de una secuencia de tiempo discreto!! El gran punto a favor de la DFT es que existen algoritmos computacionalmente muy eficientes para el cálculo de la misma que son conocidos colectivamente como algoritmos FFT (Fast Fourier Transform)!!

A continuación veremos que la DFT está intimamente relacionada con la serie de Fourier de una secuencia discreta!!

Sea $\tilde{x}[n]$ una secuencia periódica de periodo fundamental N, tal que para cualquier entero n y r:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$$

($\tilde{}$) para distinguir secuencias periódicas de secuencias aperiódicas.

Exponenciales Complejas Armónicamente Relacionadas

La señal $\tilde{x}[n]$ se representa como combinación lineal de exponenciales complejas cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$:

$$e_k[n] = e^{j(\frac{2\pi}{N})kn} = e_k[n + rN] \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Propiedad: Periodicidad en el Índice de Frecuencia k

A diferencia del tiempo continuo (que requiere infinitas exponenciales), en tiempo discreto:

$$e_{k+mN}[n] = e^{j(\frac{2\pi}{N})(k+mN)n} = e^{j(\frac{2\pi}{N})kn} \underbrace{e^{j2\pi mn}}_{=1} = e_k[n] \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

En consecuencia, sólo existen N exponenciales complejas periódicas distintas: $\{e_0[n], e_1[n], \ldots, e_{N-1}[n]\}$.

Síntesis

Dado que únicamente N exponenciales complejas armónicas son linealmente independientes, el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto es una **suma finita de N términos**:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, e^{j(\frac{2\pi}{N})kn}$$

- **Coeficientes $\tilde{X}[k]$:** Ponderan la amplitud y fase de cada componente armónica k.
- **Factor de escala $\frac{1}{N}$:** Se incluye por convención en la ecuación de síntesis (facilitando la dualidad con la DTFT y la DFT).
- **Intervalo de suma arbitrario:** Aunque comúnmente se elige $k \in [0, N-1]$, la sumatoria es válida sobre **cualquier intervalo de N valores consecutivos de k**:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{X}[k]\, e^{j(\frac{2\pi}{N})kn}$$

Procedimiento de Análisis: Multiplicamos ambos miembros de la ecuación de síntesis $e^{-j(\frac{2\pi}{N})rn}$ y sumamos sobre un periodo temporal $n \in [0, N-1]$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j(\frac{2\pi}{N})rn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, e^{j(\frac{2\pi}{N})kn} \right) e^{-j(\frac{2\pi}{N})rn}$$

Intercambiando el orden de las sumatorias:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j(\frac{2\pi}{N})rn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\frac{2\pi}{N})(k-r)n} \right]$$

Relación de Ortogonalidad en Tiempo Discreto

La sumatoria interna satisface la propiedad de ortogonalidad:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\frac{2\pi}{N})(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k - r = mN \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como k y r varían en el rango $[0, N-1]$, el término es no nulo **únicamente cuando** $k = r$.

Ecuación de Análisis: al colapsar la sumatoria en $k = r$, se obtiene la fórmula para los coeficientes:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

Periodicidad Intrínseca de $\tilde{X}[k]$: si la ecuación de análisis se evalúa para valores de k fuera de $[0, N-1]$:

$$\tilde{X}[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(k+N)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1} = \tilde{X}[k]$$

$\tilde{X}[k]$ es una secuencia **periódica en frecuencia con periodo fundamental** N.

Análisis-Síntesis de la DFS ($W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$)

$$\textbf{Análisis: } \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, W_N^{kn}; \textbf{Síntesis: } \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, W_N^{-kn}$$

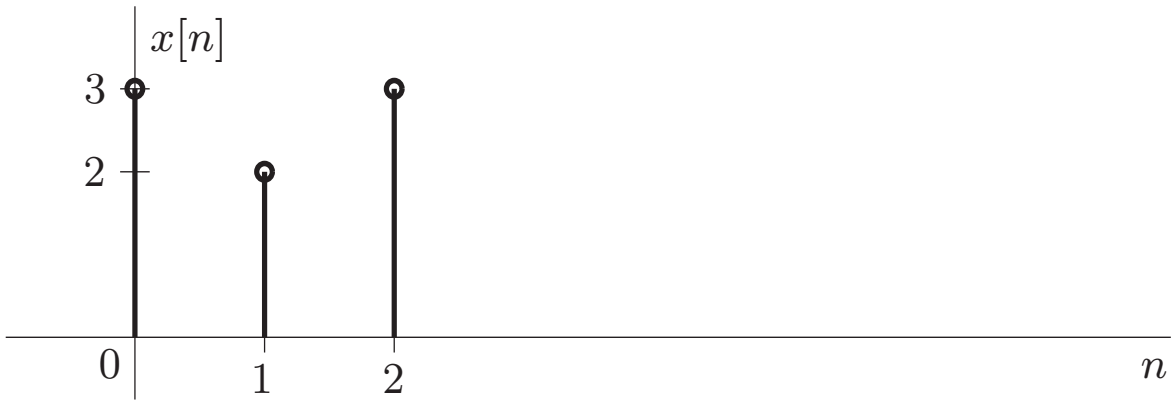
$\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]$ (Dualidad exacta tiempo-frecuencia entre secuencias periódicas)

Ejemplo 1: DFT de 3 puntos de una señal de longitud 3

Problema: Hallar la DFT de la señal de longitud $N = 3$:

$$x[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

y comparar el espectro de la DFT $X[k]$ con el espectro de la DTFT continua correspondiente $X(\Omega)$.



Planteo de la Ecuación de Análisis de la DFT:
Dado que la longitud es $N = 3$, el intervalo fundamental en frecuencia es $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{3}$ rad.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \sum_{n=0}^{2} x[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{3}\right)kn} = 3+2e^{-j\frac{2\pi}{3}k}+3e^{-j\frac{4\pi}{3}k}, \quad k = 0, 1, 2$$

Cálculo analítico para cada punto $k = 0, 1, 2$:

- **Para $k = 0$:**

$$X[0] = 3 + 2e^{0} + 3e^{0} = 3 + 2 + 3 = \mathbf{8} = 8e^{j0}$$

- **Para $k = 1$:**

$$X[1] = 3 + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 3e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 3 + 2\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{j}\frac{\pi}{3}}$$

- **Para $k = 2$:**

$$X[2] = 3 + 2e^{-j\frac{4\pi}{3}} + 3e^{-j\frac{8\pi}{3}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\frac{\pi}{3}}$$

Tabla de Magnitudes y Ángulos de $X[k]$

k	0	1	2
$\lvert X[k]\rvert$	8	1	1
$\angle X[k]$	0	$\pi/3$	$-\pi/3$

Propiedad de Simetría Conjugada:
Como $x[n]$ es real, $X[k] = X^*[N-k] = X^*[3-k]$. En consecuencia, $X[2] = X^*[1]$.

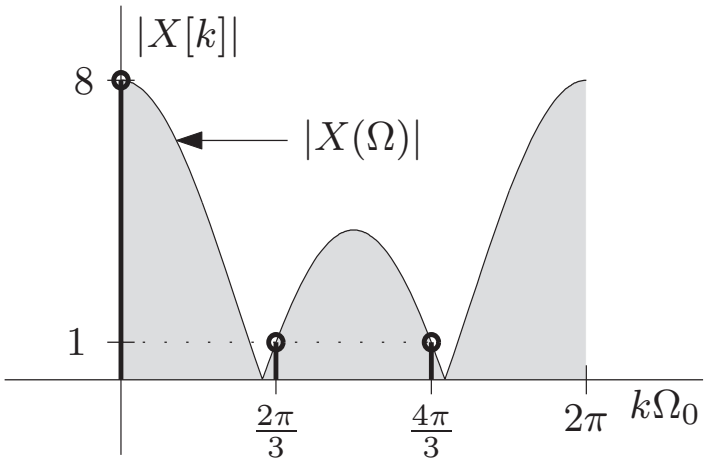
Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) de $x[n]$:

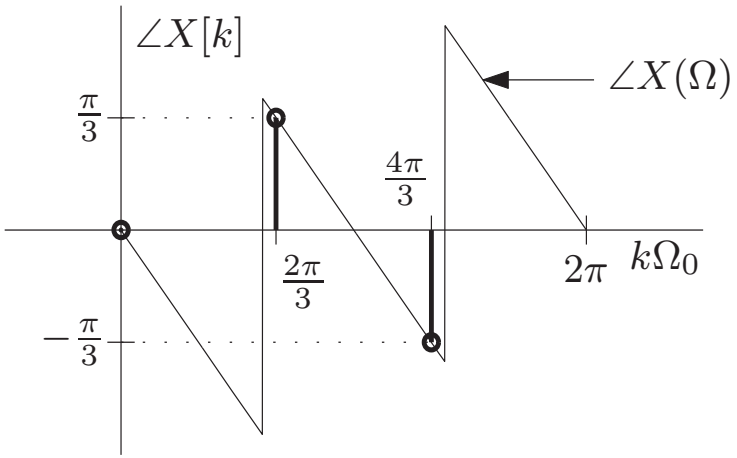
$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=0}^{2} x[n]\, e^{-j\Omega n} \\ &= 3 + 2e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} \\ &= e^{-j\Omega}\left[2 + 3e^{j\Omega} + 3e^{-j\Omega}\right] \\ &= \mathbf{e^{-j\Omega}}\,[\mathbf{2} + \mathbf{6}\cos(\mathbf{\Omega})] \end{aligned}$$

Muestreo en Frecuencia de la DTFT ($\Omega_k = k\frac{2\pi}{3}$):

- $k = 0$ ($\Omega = 0$): $X(0) = e^{0}[2 + 6\cos(0)] = 8 = X[0]$
- $k = 1$ ($\Omega = \frac{2\pi}{3}$): $X\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{-j\frac{2\pi}{3}}[2 + 6(-1/2)] = -e^{-j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{\pi}{3}} = X[1]$
- $k = 2$ ($\Omega = \frac{4\pi}{3}$): $X\left(\frac{4\pi}{3}\right) = e^{-j\frac{4\pi}{3}}[2 + 6(-1/2)] = -e^{-j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{\pi}{3}} = X[2]$

Ejemplo 1: sigue





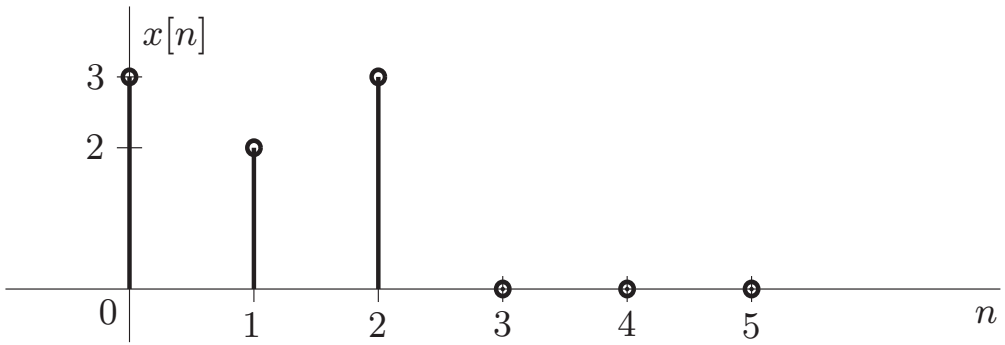
Comparación del módulo $|X[k]|$ vs $|X(\Omega)|$ y fase $\angle X[k]$ vs $\angle X(\Omega)$
La DFT de 3 puntos muestrea la DTFT continua exactamente en múltiplos de $\frac{2\pi}{3}$.

Ejemplo 2: DFT de 6 puntos de una señal de longitud 3

Problema: Utilizando relleno con ceros (*zero padding*), hallar la DFT de 6 puntos de la señal de longitud 3

$$x[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

y comparar el espectro de la DFT de 6 puntos $X[k]$ con el espectro de la DTFT continua correspondiente $X(\Omega)$.



Relleno con 3 ceros hasta una longitud 6:
$x[0] = 3$, $x[1] = 2$, $x[2] = 3$, $x[3] = x[4] = x[5] = 0$
Aplico DFT ($N = 6$), al agregar 3 ceros, la longitud es $N = 6$ y el intervalo frecuencial se reduce a $\Omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ rad.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = \sum_{n=0}^{5} x[n]\, e^{-j\left(\frac{\pi}{3}\right)kn} = 3 + 2e^{-j\frac{\pi}{3}k} + 3e^{-j\frac{2\pi}{3}k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 5$$

Ejemplo 2: Evaluación de Coeficientes y Tabla

Cálculo analítico para cada punto $k = 0, 1, \ldots, 5$:

- **Para $k = 0$:** $X[0] = 3 + 2e^{0} + 3e^{0} = 3 + 2 + 3 = \mathbf{8} = 8e^{j0}$
- **Para $k = 1$:** $X[1] = 3 + 2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 3e^{-j\frac{2\pi}{3}} =$
  $3 + 2\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} - j\frac{5\sqrt{3}}{2} = \mathbf{5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}}$
- **Para $k = 2$:** $X[2] = 3 + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 3e^{-j\frac{4\pi}{3}} =$
  $3 + 2\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}}$
- **Para $k = 3$:** $X[3] = 3 + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j2\pi} = 3 - 2 + 3 = \mathbf{4} = 4e^{j0}$
- **Para $k = 4$:** Por simetría conjugada ($X[k] = X^*[N - k]$):
  $X[4] = X^*[6 - 4] = X^*[2] = \mathbf{1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}}$
- **Para $k = 5$:** Por simetría conjugada: $X[5] = X^*[6 - 5] = X^*[1] = \mathbf{5 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}}$

Tabla de Magnitudes y Fases de $X[k]$

k	0	1	2	3	4	5
$\lvert X[k]\rvert$	8	5	1	4	1	5
$\angle X[k]$	0	$-\pi/3$	$\pi/3$	0	$-\pi/3$	$\pi/3$

Propiedad de Simetría Conjugada: Como $x[n]$ es real, $X[k] = X^*[6 - k]$, verificando $X[5] = X^*[1]$ y $X[4] = X^*[2]$.

Ejemplo 2: Comparación con la DTFT Continua

Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) de $x[n]$:

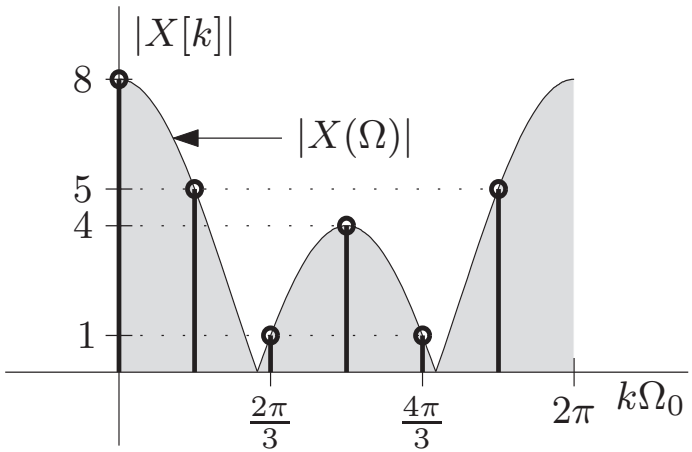
$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{2} x[n]\, e^{-j\Omega n} = 3 + 2e^{-j\Omega} + 3e^{-j2\Omega} = e^{-j\Omega}\,[2 + 6\cos(\Omega)]$$

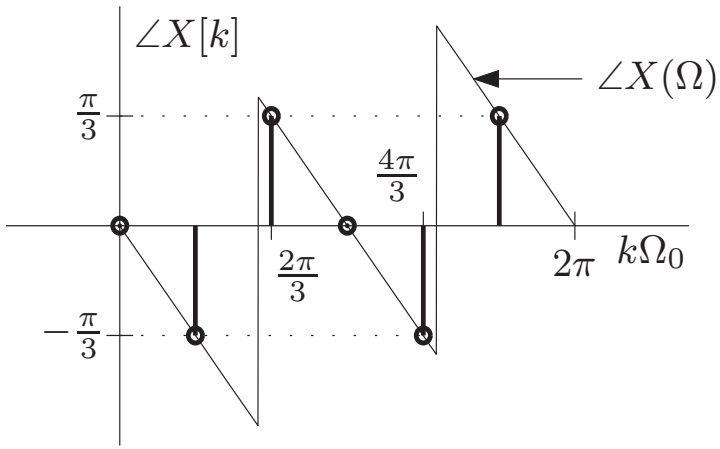
Muestreo en Frecuencia de la DTFT ($\Omega_k = k\Omega_0 = k\frac{\pi}{3}$):

- $k = 0, 2, 4$: Corresponden a $\Omega = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, idénticas a las muestras $k = 0, 1, 2$ de la DFT de 3 puntos del Ej. anterior .
- $k = 1, 3, 5$: Corresponden a $\Omega = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$, muestras adicionales intercaladas obtenidas por *zero padding*.

Ejemplo 2 sigue

Comparativa de módulo $|X[k]|$ vs $|X(\Omega)|$ y fase $\angle X[k]$ vs $\angle X(\Omega)$ para $N = 6$





El relleno con ceros interpola la DTFT densificando las muestras, permitiendo una mejor visualización del espectro continuo sin alterar la señal subyacente.

Exponenciales discretas

Consideremos las exponenciales discretas con frecuencias fundamentales $\frac{2\pi}{N}k$:

$$
\begin{aligned}
W_N &= e^{-j\frac{2\pi}{N}} \\
W_N^{kn} &= e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k,n \in \mathbb{Z} \\
&= W_N^{(pN+k)n} = W_N^{k(pN+n)}, \ \forall p \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Sólo existen N exponenciales discretas distintas con frecuencia fundamental $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$!! Esto es sustancialmente diferente al caso continuo!!

Serie discreta de Fourier I

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+N],\ \forall n \in \mathbb{Z},\ N \in \mathbb{Z}$$

$$\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k]$$

$$a[k] = a[k+rN],\ \forall r \in \mathbb{Z}$$

Podemos escribir, cambiando levemente la definición:

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \quad \text{Ecuación de análisis}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a[k] W_N^{-kn}, \quad \text{Ecuación de sintésis}$$

En forma matricial:

$$\mathbf{a} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^H\mathbf{a}$$

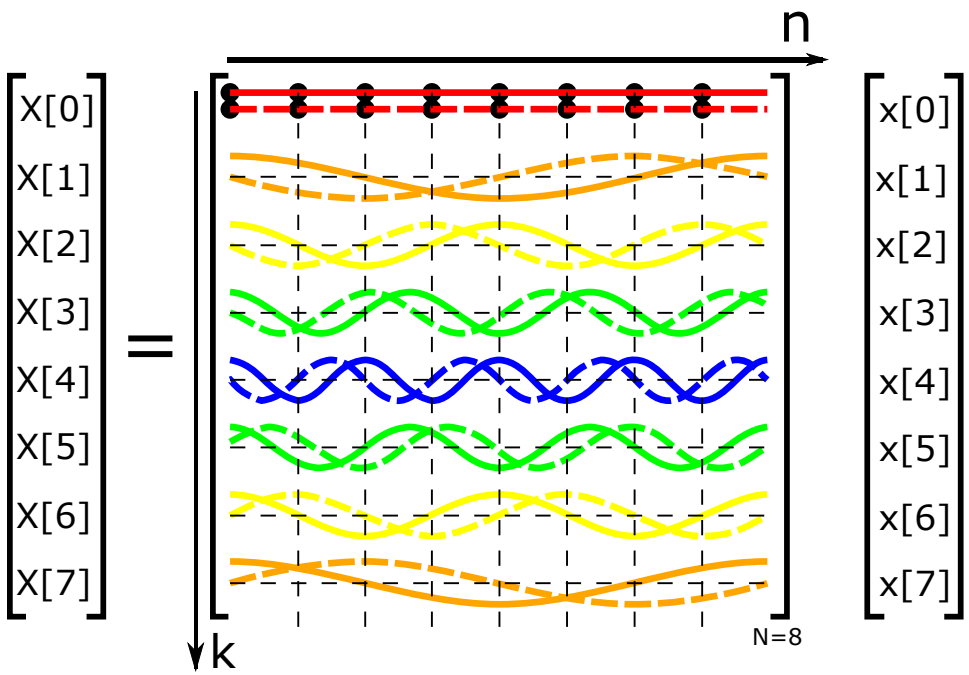
$$\mathbf{x} = [\tilde{x}[0]\ \tilde{x}[1] \dots\ \tilde{x}[N-1]]^T$$

$$\mathbf{a} = [a[0]\ a[1] \dots\ a[N-1]]^T$$

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^H$$

Serie discreta de Fourier II

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-2)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}3} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-2)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-2)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-2)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-2)(N-2)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-2)} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-2)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$



Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/DFT_matrix#/media/File:Fourierop_rows_only.svg

Serie discreta de Fourier III

Tenemos las siguientes propiedades que son relativamente fáciles de probar:

- Linealidad: si $\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k]$ y $\tilde{y}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b[k]$ con $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{y}[n]$ secuencias periódicas de periódo N tenemos:

$$\alpha\tilde{x}[n] + \beta\tilde{y}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \alpha a[k] + \beta b[k]$$

- Desplazamiento temporal: si $\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k]$ entonces la versión desplazada $\tilde{x}[n-m]$ de la secuencia temporal cumple con:

$$\tilde{x}[n-m] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} W_N^{km} a[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} a[k]$$

- Dualidad: si $\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k]$ entonces:

$$a[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} N\tilde{x}[-k]$$

- Simetría conjugada: $\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k]$ entonces:

$$\tilde{x}^*[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a^*[-k]$$

Serie discreta de Fourier IV

Tenemos también la siguiente propiedad que analizaremos con un poco más de detalle:

- Si $\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k]$ y $\tilde{y}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b[k]$ con $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{y}[n]$ secuencias periódicas de periódo N. Tenemos que:

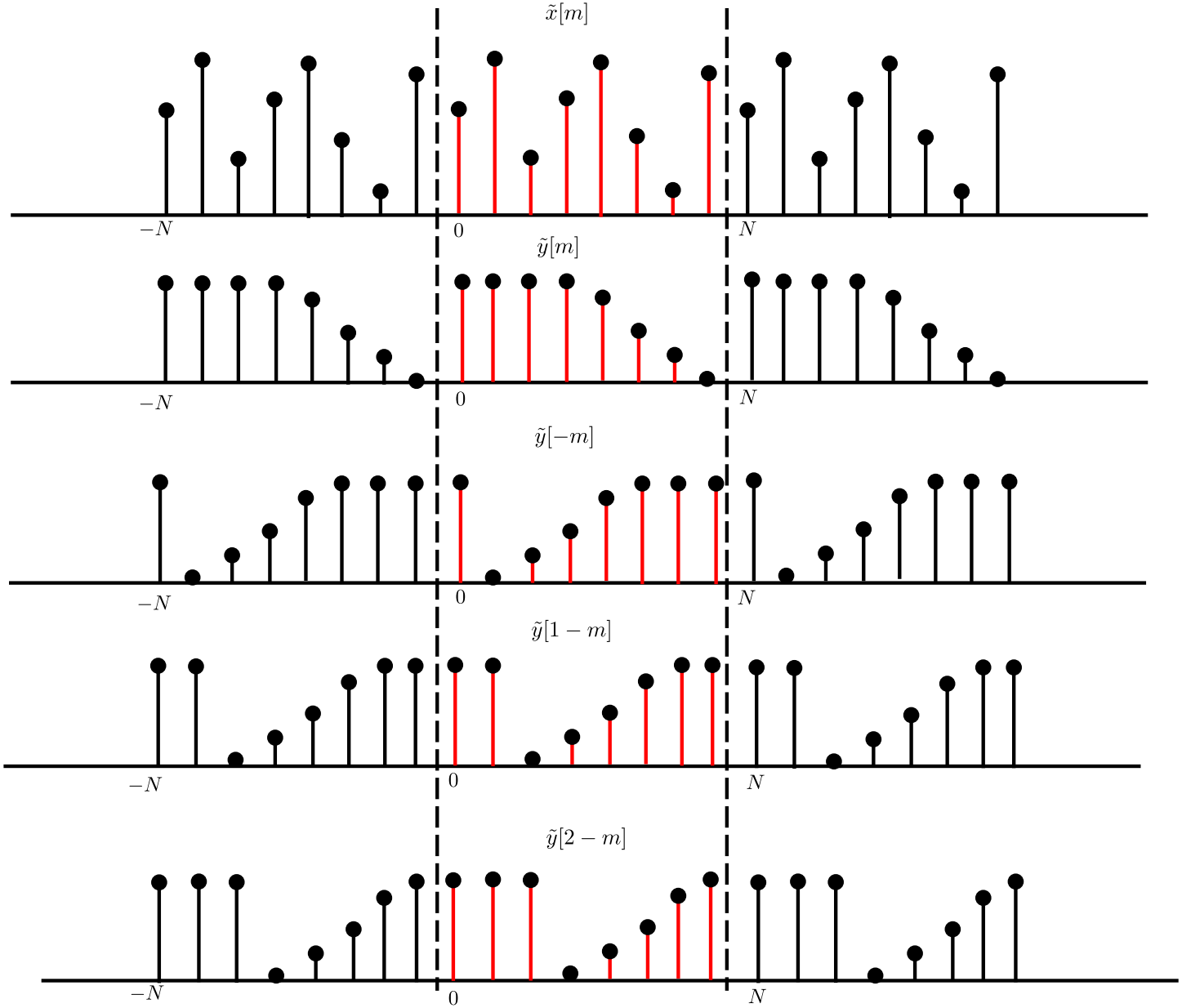
$$\tilde{z}[n] = \tilde{x}[n] \circledast \tilde{y}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}[m]\tilde{y}[n-m] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k]b[k]$$

La convolución periódica de secuencias de tiempo discreto periódicas se corresponde con la multiplicación de sus respectivos coeficientes de Fourier!!

La prueba de este resultado es muy simple y se deja como ejercicio. Es importante analizar sin embargo la mecánica de la convolución periódica un poco más en detalle. Tener en cuenta que:

- La suma de convolución se realiza en el intervalo finito $0 \leq m \leq N-1$ (en realidad se puede realizar en cualquier intervalo de largo N).
- Las secuencias $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{y}[n]$ están definidas fuera del intervalo $0 \leq m \leq N-1$ y se repiten periódicamente fuera de él.

Serie discreta de Fourier V



Transformada de Fourier de la secuencia periódica

Para el caso de una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ con periodo N tenemos que la transformada de Fourier de tiempo discreto de la misma se puede escribir como:

$$\tilde{X}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} a[k] \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N} k\right)$$

Es fácil verificar:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{X}(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k] \int_{-\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N} k\right) e^{j\Omega n} d\Omega \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a[k] e^{j\frac{2\pi}{N} kn}
\end{aligned}$$

Periodización

Consideremos ahora una señal $x[n]$ que es cero para $n < 0$ y $n \geq N$. Sea también:

$$\tilde{p}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta[n - lN]$$

Consideremos la señal dada por $\tilde{x}[n] = x[n] * \tilde{p}[n]$. Es claro que podemos escribir:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN]$$

Vemos que $\tilde{x}[n]$ es una señal periódica con período N donde en $0 \leq n \leq N-1$ tenemos que $\tilde{x}[n] = x[n]$.

En forma equivalente:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Transformada de Fourier de la señal periodizada I

$$\tilde{X}(\Omega) = X(\Omega)P(\Omega)$$

$$P(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N}\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\tilde{X}(\Omega) = X(\Omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N}\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{2\pi}{N}\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N}a[k]\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

Donde hemos usado que:

$$a[k] = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = X(\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

Transformada de Fourier de la señal periodizada II

Conclusiones:

- Los coeficientes de Fourier de la señal $\tilde{x}[n]$ (versión periodizada de $x[n]$) son las muestras de la transformada de Fourier de $x[n]$ a intervalos regulares de $\frac{2\pi}{N}$.
- Notar la semejanza con las ideas de muestreo de una señal temporal. El hecho de periodizar una secuencia de tiempo discreto de longitud N $x[n]$ (sin que haya aliasing en el tiempo) se refleja en muestrear la transformada de Fourier de $x[n]$ a intervalos regulares de longitud $\frac{2\pi}{N}$!!
- Por lo que sabemos del muestreo de señales continuas (la transformada de Fourier de tiempo discreto es continua!), estas muestras son suficientes para caracterizar completamente la transformada de Fourier en todo punto del intervalo $[-\pi, \pi)$.
- O sea usando los las muestras de la transformada debería existir un "sistema reconstructor" que permita volver a obtener la transformada de Fourier original. Se imagina cómo sería ese sistema?
- Los dos puntos anteriores son válidos siempre y cuando la versión periodizada $\tilde{x}[n]$ conserve en un período una copia exacta de $x[n]$. O sea, al periodizar no debemos generar "aliasing". En este caso y a diferencia del muestreo de señales temporales, ese aliasing ocurre en el dominio del tiempo.
- Si la longitud de la señal $x[n]$ es N se puede periodizar con período $M \geq N$ agregando $M - N$ ceros (*zero-padding*). De esta forma y aumentando M puedo tomar muestras de la verdadera transformada de Fourier con separación decreciente dada por $\frac{2\pi}{M}$, mejorando entonces la "visualización" de las características espectrales de $x[n]$.

Transformada discreta de Fourier I

Consideremos una secuencia $x[n]$ de longitud M. Es decir $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq M$. Sea $N \geq M$. Siempre podremos definir la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ con periódo N:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN]$$

Dado que $M \leq N$ siempre podemos recuperar $x[n]$ (con ceros agregados en $n = M,\ M+1, \ldots N-1$) a partir de un periodo de $\tilde{x}[n]$. Es decir:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Consideremos la operación $q = n \bmod N$. Esto significa que $n = rN + q$ donde $r \in \mathbb{Z}$ y $q \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Es decir q es el resto que surge de dividir n por N. Es fácil probar que

$$\tilde{x}[n] = x[n \bmod N] \equiv x[((n))_N]$$

Probarlo!!! Esto nos permitirá escribir en forma compacta la relación entre $x[n]$ y su versión periodizada de periodo N.

Transformada discreta de Fourier II

Sean $a[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$, $k \in \mathbb{Z}$ los coeficientes del desarrollo de Fourier de $\tilde{x}[n]$. Esta secuencia es periódica con periódo N. Definimos la siguiente secuencia:

$$X[k] = \begin{cases} a[k] & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

o lo que es lo mismo:

$$a[k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X[k - rN] = X[k \bmod N] = X[((k))_N]$$

Es claro que $X[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Dado que:

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a[k] W_N^{-kn}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Transformada discreta de Fourier III

Usando las definiciones previas podemos escribir:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

O en forma más compacta, y asumiendo implícitamente que $X[k] = 0$ para $k < 0$ y $k \geq N$ y $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad \text{Ecuación de análisis}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad \text{Ecuación de sintésis}$$

Las dos últimas ecuaciones definen lo que llamaremos las ecuaciones de sintésis y análisis de la DFT (Discrete Fourier Transform). En forma aún más compacta la DFT de N puntos la denotaremos como:

$$x[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X[k]$$

Transformada discreta de Fourier IV

Notar que tenemos que:

$$X[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \ k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$$

La DFT es igual a las muestras de la tranformada de Fourier de $x[n]$ evaluada en los puntos $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \ k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, o sea N muestras en el intervalo $[0, 2\pi)$!!

Algunas aclaraciones

- Notar que las ecuaciones de análsis y sintésis definen $x[n]$ y $X[k]$ en el intervalo $[0 : N-1]$. Sin embargo, si dichas expresiones se evaluán para valores fuera de dicho intervalo el resultado no será cero. Existe una periocidad implícita en ambas definiciones que es necesario tener en cuenta cuando se analicen las propiedades de la DFT, aún cuando sólo estemos interesados en los valores para el intervalo $[0 : N-1]$.
- Sea $\mathbf{x} = [x[0] \ x[1] \ldots \ x[N-1]]^T$ y $\mathbf{X} = [X[0] \ X[1] \ldots \ X[N-1]]^T$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^H\mathbf{X}$$

donde la definición de $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ es igual que antes.

Reconstrucción de la transformada de Fourier usando la DFT

Sea $x[n]$ una secuencia finita de longitud N, y sea $X[k]$ su DFT. Entonces podemos obtener la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto $X(\Omega)$ como:

$$
\begin{aligned}
X(\Omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] e^{-j\Omega n} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)n} &= \frac{1 - e^{-j(\Omega N - 2\pi k)}}{1 - e^{-j\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)}} \\
&= \frac{e^{-j\frac{\Omega N - 2\pi k}{2}} \left[e^{j\frac{\Omega N - 2\pi k}{2}} - e^{-j\frac{\Omega N - 2\pi k}{2}} \right]}{e^{-j\frac{\Omega N - 2\pi k}{2N}} \left[e^{j\frac{\Omega N - 2\pi k}{2N}} - e^{-j\frac{\Omega N - 2\pi k}{2N}} \right]} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\Omega N - 2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega N - 2\pi k}{2N}\right)} e^{-j\frac{(\Omega N - 2\pi k)(N-1)}{2N}}
\end{aligned}
$$

$$
X(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \frac{\sin\left(\frac{\Omega N - 2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega N - 2\pi k}{2N}\right)} e^{-j\frac{(\Omega N - 2\pi k)(N-1)}{2N}}
$$

Transformada discreta de Fourier V

Ejemplo: Consideremos

$$x[n] = \begin{cases} e^{j\omega_0 n} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La DFT de esta secuencia (siempre para $0 \leq k \leq N-1$) se puede calcular como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

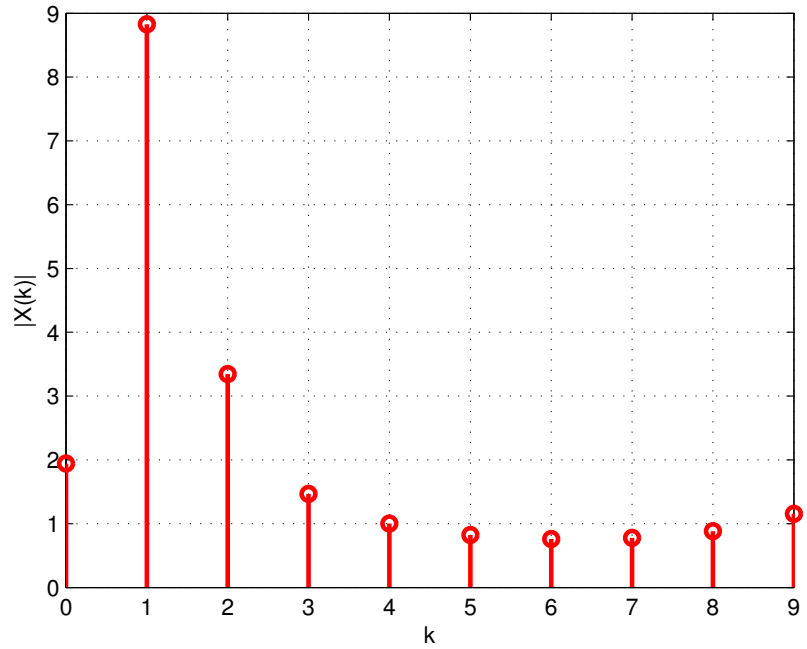
Esta suma se puede evaluar fácilmente para obtener:

$$X[k] = e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)(N-1)/2} N \frac{\text{sinc}\left(\frac{N}{2\pi}\left(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k\right)\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2\pi}\left(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k\right)\right)}, \; k = 0, 1, \ldots, N-1$$

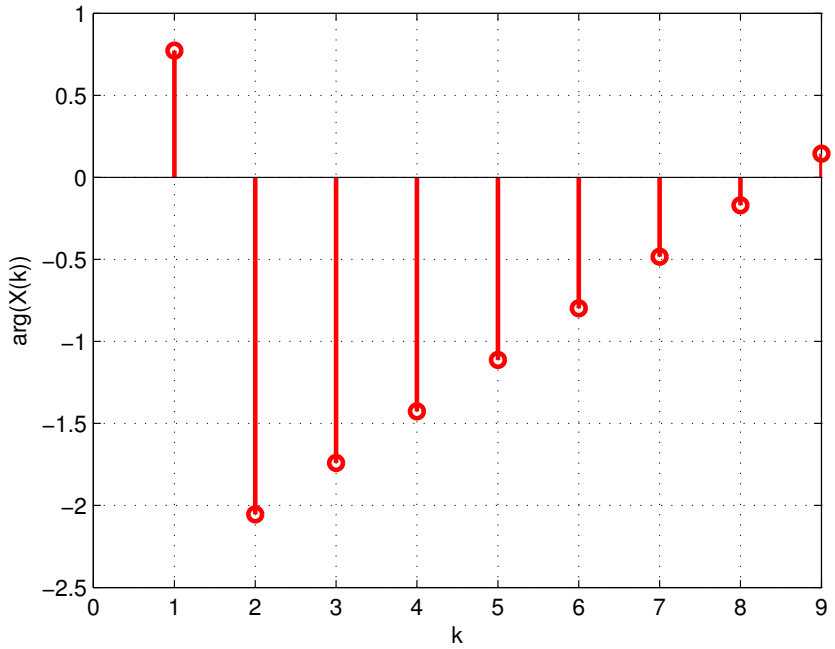
Este resultado se puede obtener muestreando la transformada de Fourier de $x[n]$ a intervalos regulares de longitud $\frac{2\pi}{N}$, donde

$$X(e^{j\omega}) = e^{j(\omega_0 - \omega)(N-1)/2} \frac{\text{sinc}\left(\frac{N}{2\pi}(\omega_0 - \omega)\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2\pi}(\omega_0 - \omega)\right)}, \; \omega \in [0, 2\pi)$$

Transformada discreta de Fourier VI



$N = 10,\ \omega_0 = 0.8$

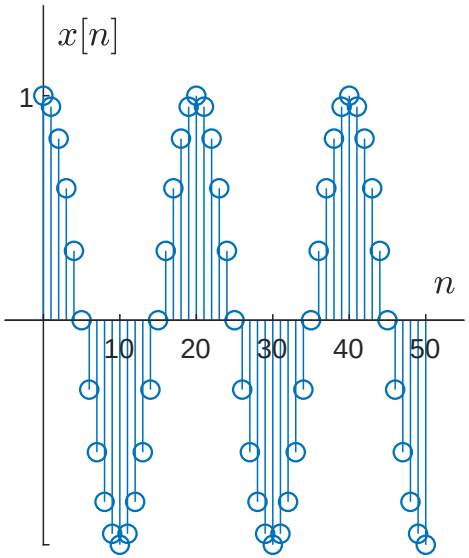


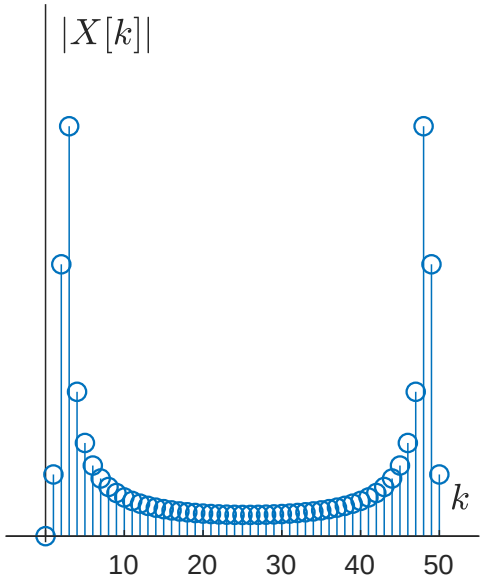
$N = 10,\ \omega_0 = 0.8$

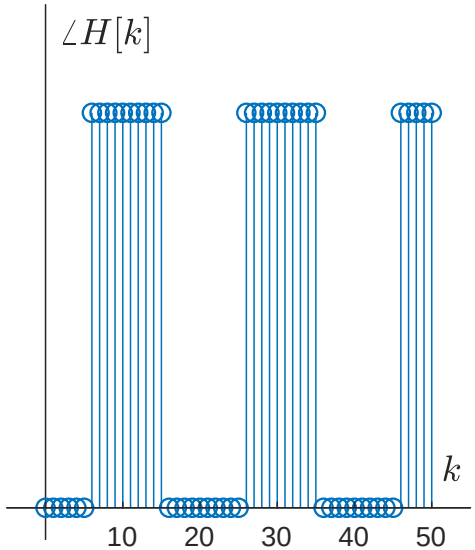
Si $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} k_0$ tenemos que:

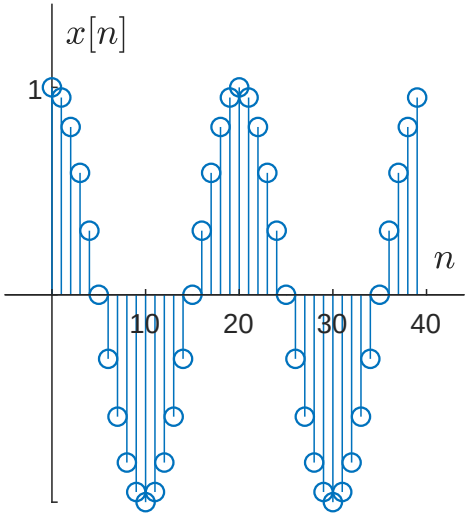
$$X[k] = \begin{cases} N & k = k_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

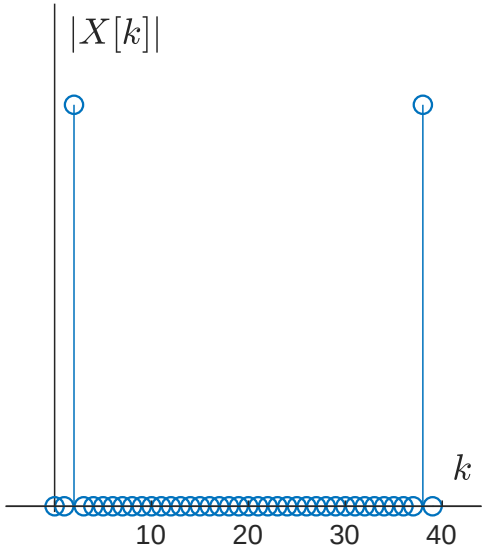
Transformada discreta de Fourier VII

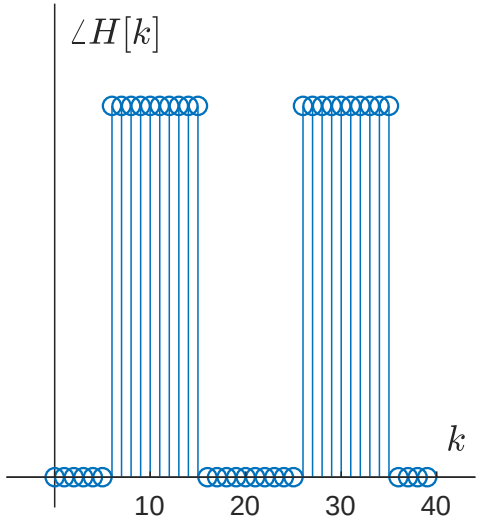












Propiedades de la DFT I

Al analizar las propiedades de la DFT debemos considerar la periocidad implicita en la secuencia $x[n]$ y en la misma DFT $X[k]$. Veremos que dicha periodicidad influencia fuertemente las propiedades de la DFT

- **Linealidad**: Sea $x[n]$ una señal de longitud N_1 y $y[n]$ una señal de longitud N_2. Consideremos $z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n]$. Es claro que la longitud de $z[n]$ será $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ (alguna de las secuencias será completada con ceros!). Sea entonces $x[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_3}{\longleftrightarrow}} X[k]$ y $y[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_3}{\longleftrightarrow}} Y[k]$. Es claro que:

$$z[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_3}{\longleftrightarrow}} \alpha X[k] + \beta Y[k]$$

  Es claro que la propiedad sigue siendo válida si las DFT se toman con una longitud común $N \geq N_3$.

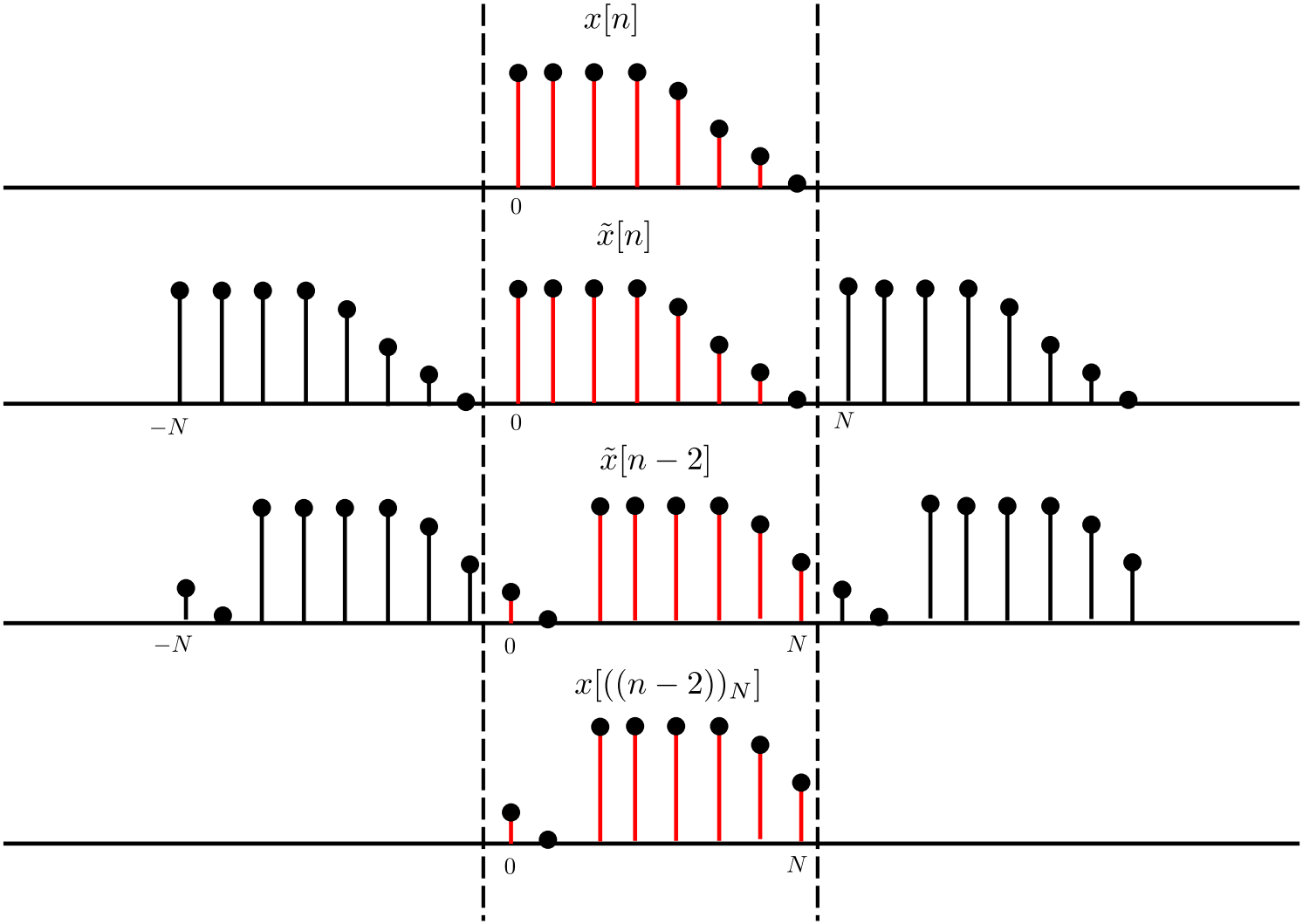
- **Desplazamiento circular de una secuencia**: Sea una secuencia $x[n]$ de longitud N y $x[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X[k]$. Entonces:

$$x[((n-m))_N] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} W_N^{km} X[k]$$

  Sobre la izquierda tenemos que lo se denomina un *desplazamiento circular*. Notar la diferencia con la propiedad de la serie de Fourier discreta o la transformada de Fourier de tiempo discreto!!

Propiedades de la DFT II

Esta propiedad es una consecuencia de la periodicidad implícita que existe en la DFT. Gráficamente podemos ver fácilmente qué es un desplazamiento circular



Propiedades de la DFT III

Veamos ahora la demostración de esta propiedad. Sabemos que la extensión periódica de $x[n]$ se puede escribir como $\tilde{x}[n] = x[((n))_N]$. Sabemos además que $\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k]$ con lo cual podemos escribir:

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k] = X[((k))_N]$$

Consideremos ahora un secuencia periódica $\tilde{x}_1[n]$, de periodo N, cuya serie de Fourier esta dada por $a[k]W_N^{km}$. Sabemos que $\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m]$. Sea secuencia de longitud N $x_1[n]$ que da lugar a $\tilde{x}_1[n]$ de forma tal que $\tilde{x}_1[n] = x_1[((n))_N]$. Entonces tenemos que:

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m] = x[((n-m))_N] = x_1[((n))_N]$$

Es claro que

$$\tilde{x}_1[n] = x[((n-m))_N] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k]W_N^{km} = X_1[((k))_N]$$

donde $X_1[k]$ es la DFT de $\tilde{x}_1[n] = x[((n-m))_N]$. Es fácil ver que:

$$X_1[k] = W_N^{km} X[k]$$

Propiedades de la DFT IV

Para ver esto último notemos que:

$$X_1[((k))_N] = W_N^{((k))_N m} X[((k))_N] = W^{((k))_N m} a[k]$$

Pero como W_N^{km} es periódica en k con periodo N tenemos que $W_N^{((k))_N m} = W_N^{km}$. Esto implica que:

$$X_1[((k))_N] = W_N^{km} a[k]$$

que es lo mismo que obtuvimos arriba. Es decir, la secuencia $X_1[k]$ de longitud N, que da origen a la señal periodizada $a[k]W_N^{km} = X_1[((k))_N]$ es:

$$X_1[k] = \begin{cases} W_N^{km} a[k] & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

lo que es equivalente a $X_1[k] = W_N^{km} X[k]$.

Notar que la prueba no es particularmente difícil. Sólo hay que usar fuertemente la periodicidad inherente en las ecuaciones de sintésis y análisis de la DFT. Sin embargo, la prueba "gráfica" es particularmente simple de entender. Esta es la clave de todas la propiedades de la DFT!! Gráficamente, usando la periodicidad inherente, todas las propiedades son fáciles de entender!!

Propiedades de la DFT V

- **Dualidad**: Sea una secuencia $x[n]$ de longitud N y $x[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X[k]$. Entonces:

$$X[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} Nx[((-k))_N]$$

La prueba se realiza fácilmente usando la periodicidad inherente y la dualidad en la serie de Fourier: si $\tilde{x}[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a[k]$ entonces:

$$a[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} N\tilde{x}[-k]$$

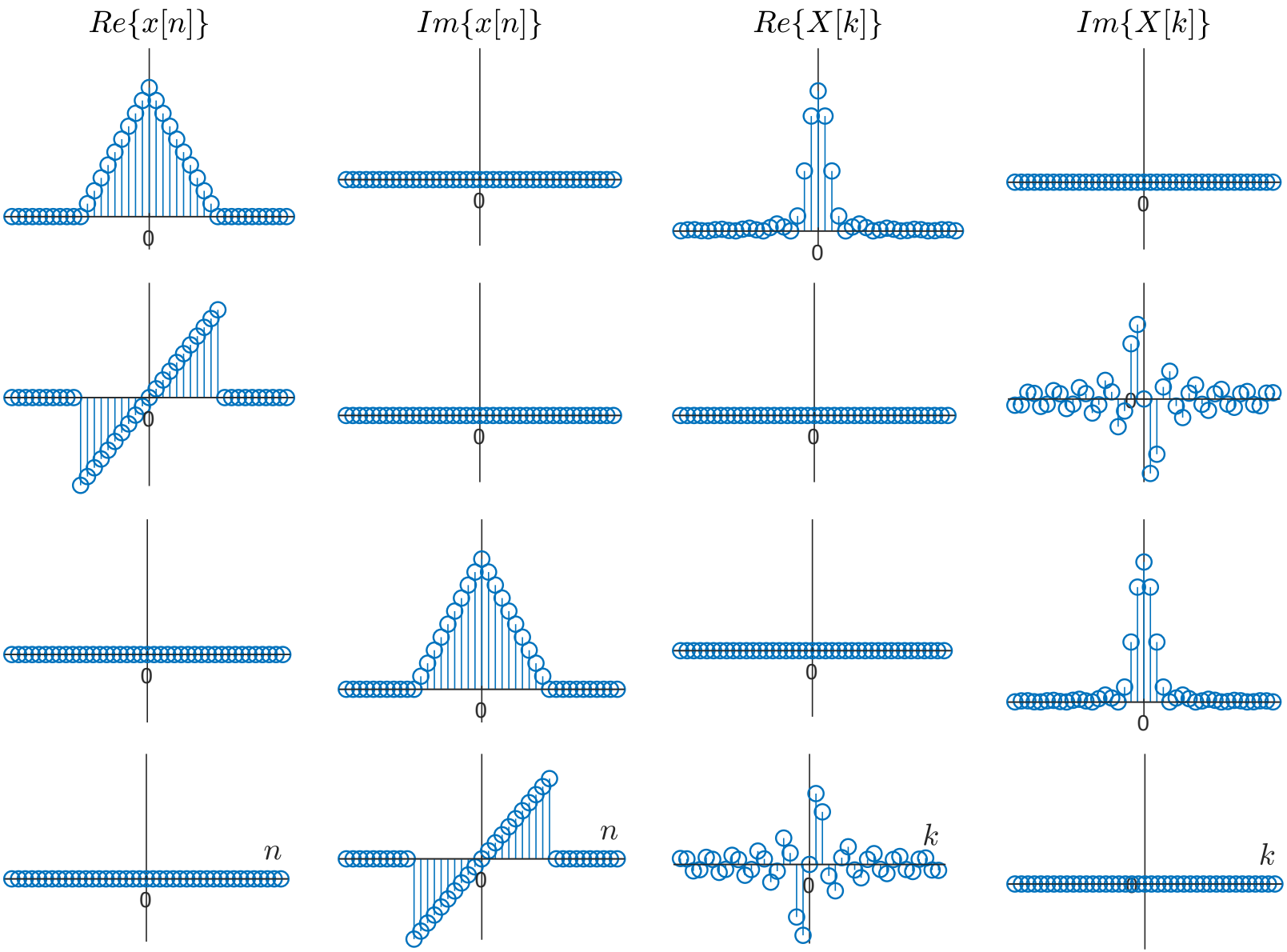
Probarlo!!!

- **Simetría conjugada**: Sea una secuencia $x[n]$ de longitud N y $x[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X[k]$. Entonces:

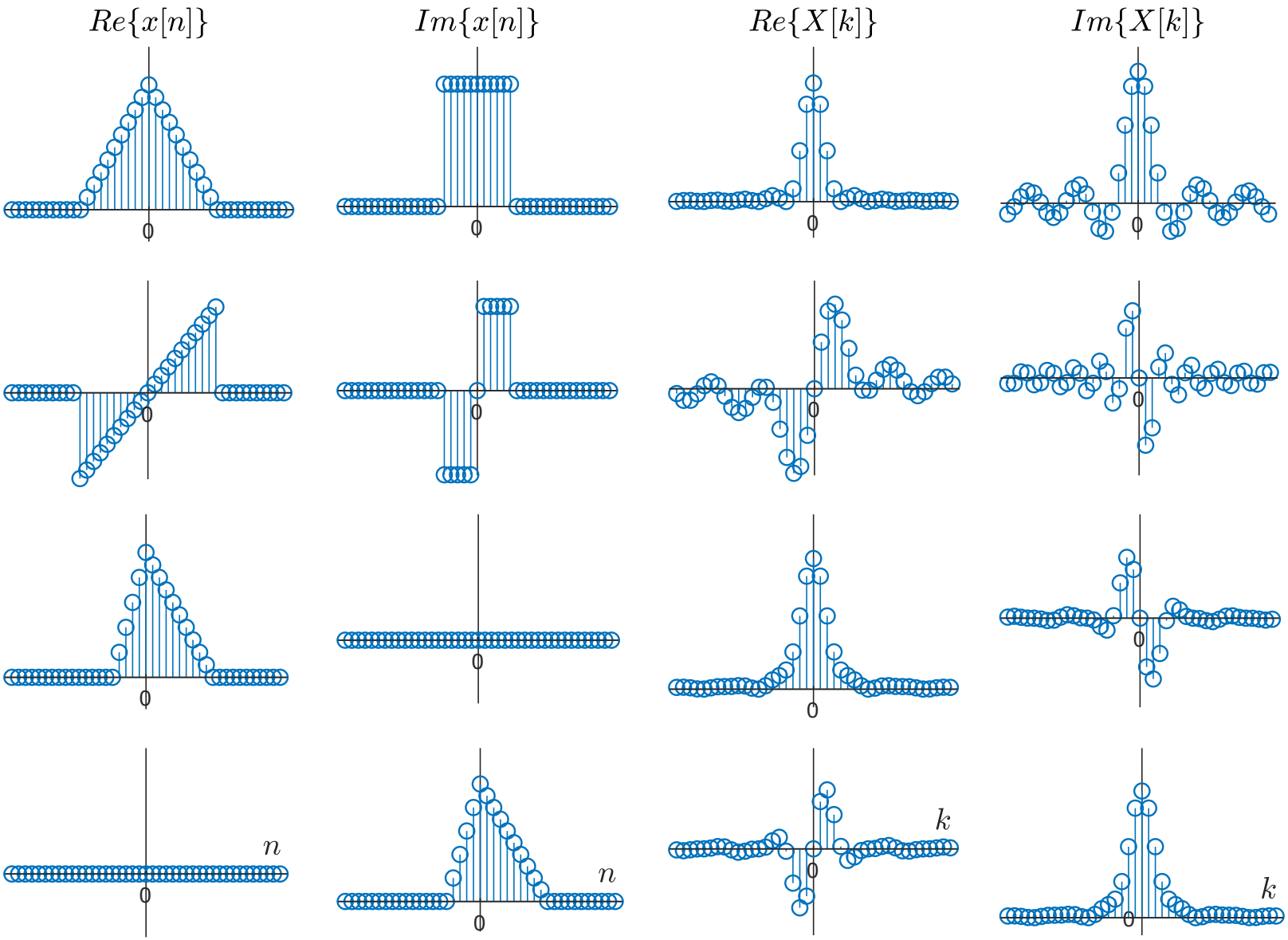
$$x^*[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X^*[((-k))_N]$$

La prueba se realiza fácilmente utilizando nuevamente la periodicidad inherente en la DFT y la simetría conjugada en serie de Fourier. Probarlo!!!

Simetrías en DFT I



Simetrías en DFT II



Propiedades de la DFT VI

La siguiente es la propiedad central de la DFT

- **Convolución circular**: Sean $x[n]$ e $y[n]$ una señales de longitud N. Consideremos

$$z[n] = x[n] \underset{N}{\circledcirc} y[n] \equiv \sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[((n-m))_N] = \sum_{m=0}^{N-1} x[((n-m))_N]y[m] \equiv y[n] \underset{N}{\circledcirc} x[n] \tag{1}$$

donde $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Si $x[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X[k]$ y $y[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} Y[k]$ tenemos

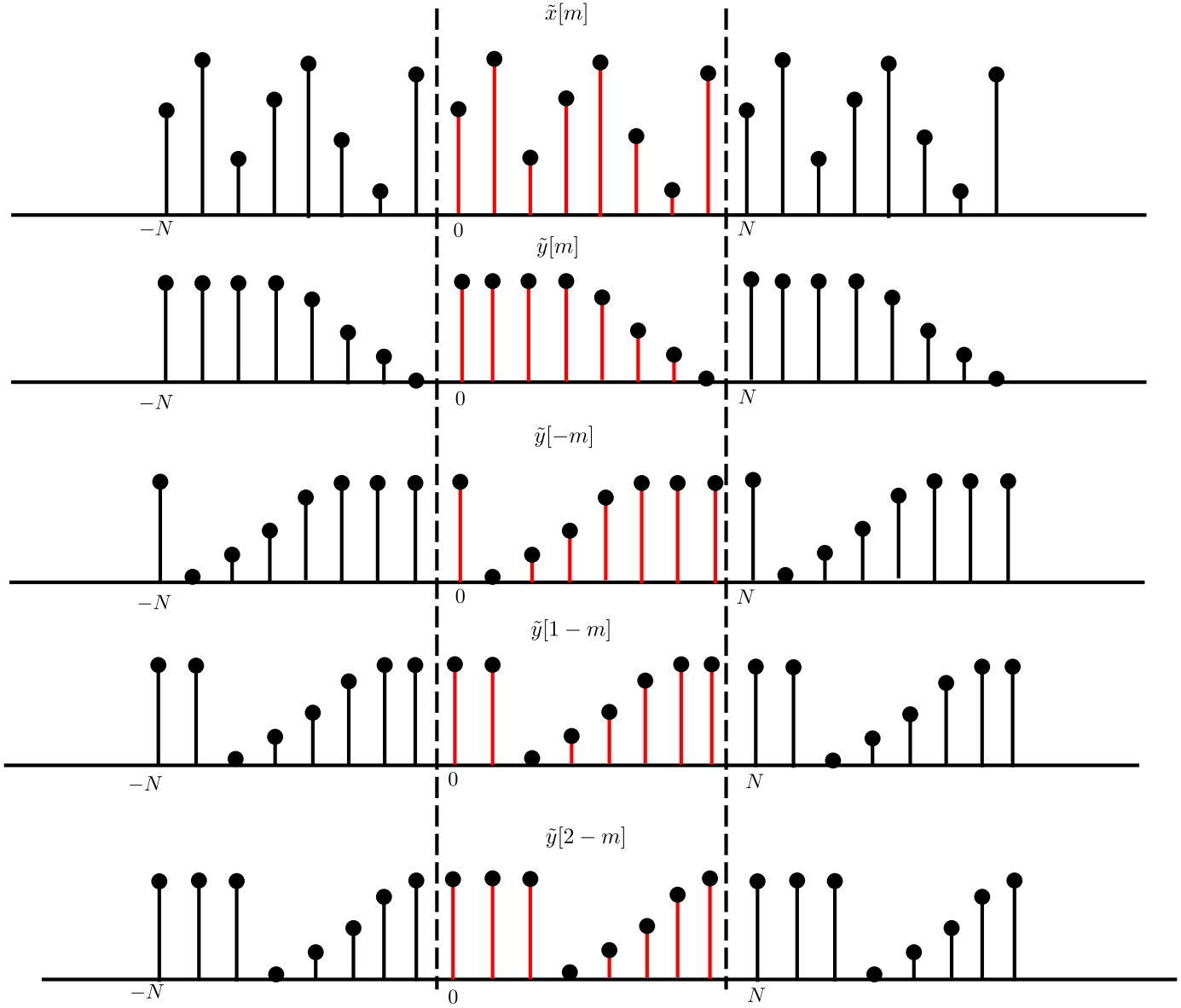
$$z[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X[k]Y[k]$$

La ecuación (1) define lo que se conoce como la *convolución circular de N puntos* entre $x[n]$ e $y[n]$. Se ve claramente que de la misma forma que la convolución lineal o la periódica es conmutativa! Vemos entonces que la familiar propiedad de multiplicación de 2 espectros se traduce, en el caso de la DFT, a la convolución circular!!

La clave de la convolución circular es verla como el resultado en el intervalo $[0 : N-1]$ de la convolución periódica entre las versiones periodizadas $\tilde{x}[n]$ e $\tilde{y}[n]$ de $x[n]$ e $y[n]$.

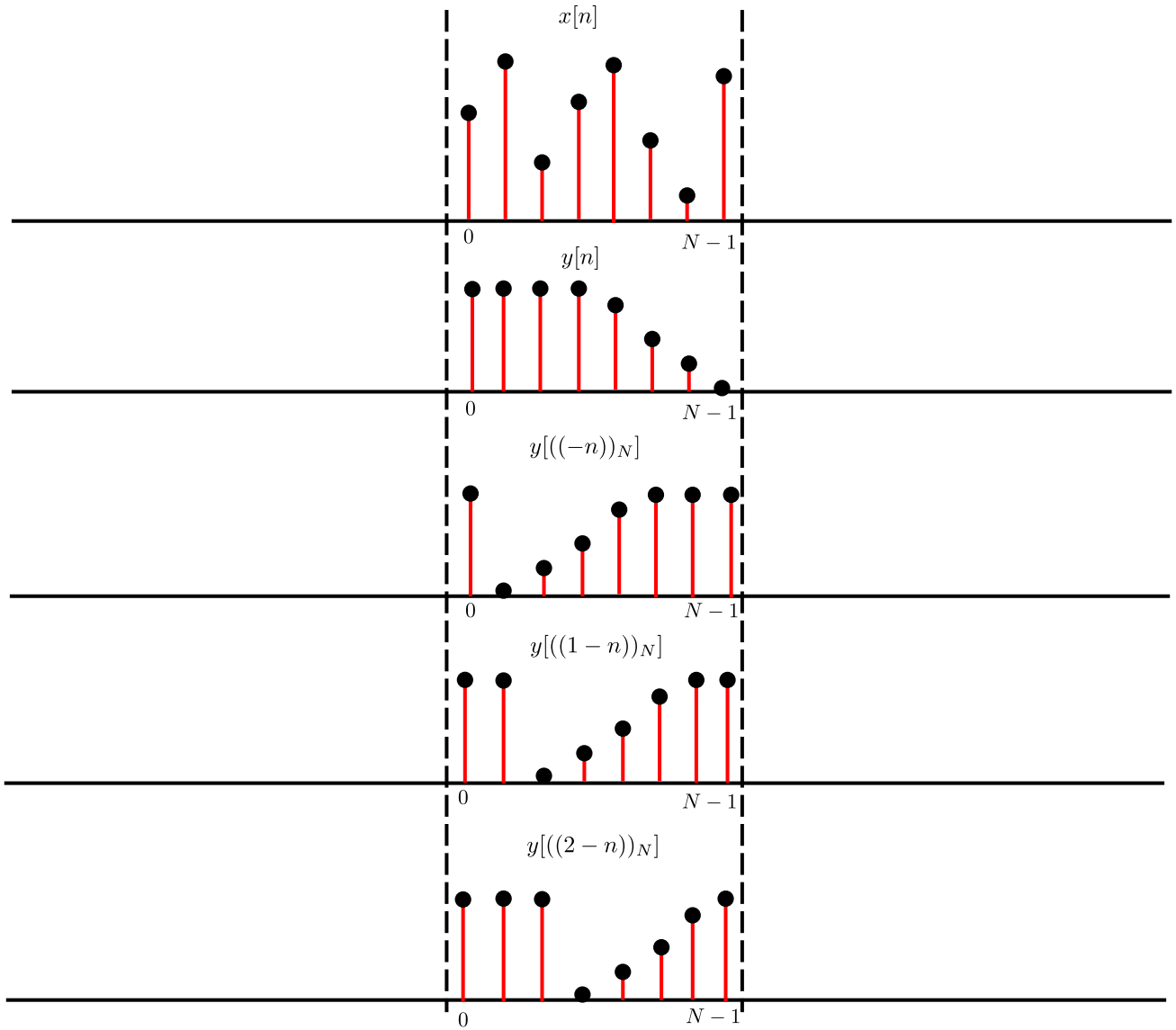
Propiedades de la DFT VII

La convolución periódica $\tilde{x}[n] \circledast \tilde{y}[n]$ se puede representar



Propiedades de la DFT VIII

La convolución circular $x[n] \underset{N}{\circledcirc} y[n]$ se puede representar:



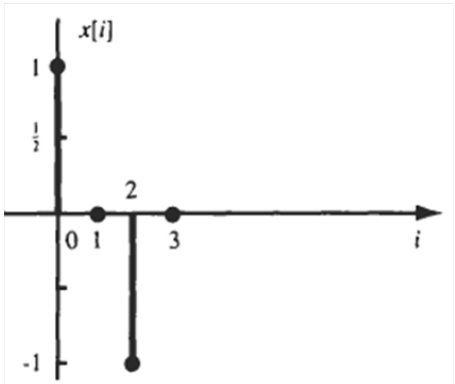
Ejemplo de convolución circular

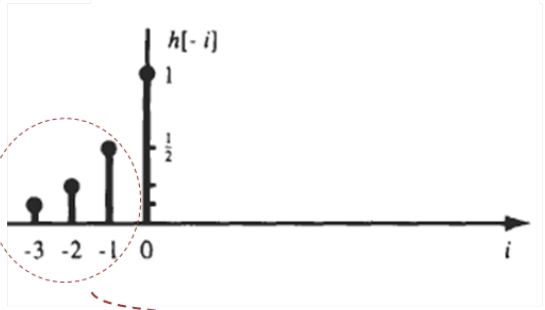
$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \qquad n = 0,1,2,3$$

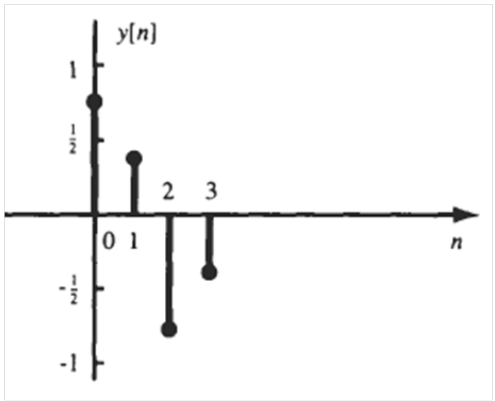
$$h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \qquad n = 0,1,2,3$$

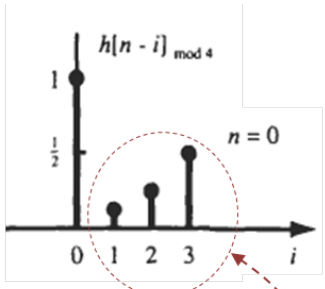
$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{i=0}^{3} x[i]h[n-i]_{\text{mod } 4}$$

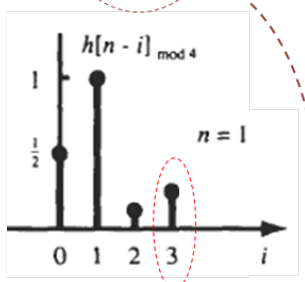
Periodicidad

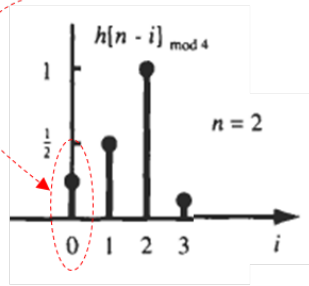


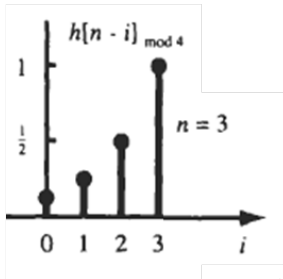












Cálculo eficiente de DFT: FFT I

Vimos que la DFT y la IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform) de N puntos de una secuencia de largo N se pueden escribir como el producto de una matriz de $N \times N$ por un vector de longitud N. Sea $\mathbf{x} = [x[0]\ x[1] \dots\ x[N-1]]^T$ y $\mathbf{X} = [X[0]\ X[1] \dots\ X[N-1]]^T$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^H\mathbf{X}$$

donde:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-2)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-2)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-2)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Para analizar la complejidad computacional de calcular la DFT de una secuencia de largo N debemos analizar la complejidad e cálculo del producto de un vector de largo N por una matriz de dimensiones $N \times N$!!

Cálculo eficiente de DFT: FFT II

La complejidad computacional de un algoritmo se mide por:

- Cantidad de cálculos necesarios para implementarlo. En general se consideran número de multiplicaciones y sumas necesarias.
- Memoria utilizada para guardar los datos necesarios.
- Operaciones que involucren movimientos de datos dentro del microprocesador (copiado de registros, movimientos de punteros, etc).

Para el caso de la DFT (y en general para cualquier algoritmo de procesamiento de señales) se considera fundamentalmente el número de multiplicaciones y sumas. Esta medida está directamente relacionada con el tiempo o velocidad de cómputo que demandará la aplicación del algoritmo y en forma indirecta también con el consumo energético del mismo!!

En el caso de la DFT vemos que:

- Para el cálculo de cada entrada del vector $\mathbf{X}$ debemos realizar N multiplicaciones y $N-1$ sumas.
- Debemos repetir ese cálculo N veces (el número de elementos en $\mathbf{X}$).

Para la DFT vemos que es necesario realizar N^2 multiplicaciones y $N(N-1)$ sumas complejas!!

Cálculo eficiente de DFT: FFT III

Hagamos un pequeño ejemplo para analizar esto:

1. Supongamos un sistema que muestrea una señal de tiempo continuo a una tasa de 48 KHz (algo estándar para señales de audio de buena calidad). La señal de tiempo discreto que entra al microprocesador se va partiendo en pedazos de largo $N = 8192$.
2. A cada uno de esos pedazos se le desea realizar un análisis en frecuencia. Para ello se les calcula una DFT.
3. El procesador deberá ser capaz de terminar el cálculo de dicha DFT antes que se vuelva a juntar un nuevo pedazo de señal de $N = 8192$.
4. Ello significa que el microprocesador deberá ser capaz de realizar aproximadamente 67.000.000 multiplicaciones en aproximadamente 170 mseg (no contamos las sumas ni el resto de operaciones que involucran el manejo apropiados de registros, acceso a memoria, etc).
5. El microprocesador debe ser capaz de realizar una multiplicación por cada 2 nseg!!
6. Si bien actualmente existen microprocesadores que pueden realizar esto, no es algo del todo eficiente.

Cálculo eficiente de DFT: FFT IV

Si observamos la matriz $\mathbf{W}$ vemos que la misma presenta mucha simetría.

Esa simetría puede ser explotada para reducir sustancialmente el cálculo de la DFT!! De esta forma surgen los algoritmos FFT (Fast Fourier Transform) para el cálculo "rápido" de la DFT!!

El trabajo seminal de Cooley and Tukey

- Cooley, James W.; Tukey, John W. (1965). "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier serie". Math. Comput. 19 (90): 297–301. `https://www.ams.org/journals/mcom/1965-19-090/S0025-5718-1965-0178586-1/S0025-5718-1965-0178586-1.pdf`

dio lugar al algoritmo de Cooley-Tukey para el cálculo de la FFT. El mismo presenta (cuando N es potencia de 2) una complejidad de

- $\frac{N}{2} \log N$ multiplicaciones complejas.
- $N \log N$ sumas complejas.

Para el ejemplo anterior el número de multiplicaciones complejas a realizar se reduce a 61440!! Un gran ahorro en velocidad de cálculo!

La clave del algoritmo es dividir el cálculo de la DFT de N puntos en cálculos de DFT más pequeñas (primero de tamaño $N/2$, luego $N/4$ y así sucesivamente) y aprovechar la simetría presente en las exponenciales complejas de tiempo discreto!!

Reducción de Complejidad: De la DFT a la FFT (Base 2

1. **Complejidad en Multiplicaciones Complejas:**
   - **DFT Directa:** El cálculo de cada uno de los N puntos $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$ requiere N productos complejos.

$$\mathcal{O}(N^2) \quad \longrightarrow \quad C_{\text{DFT}} = N^2 \quad \text{multiplicaciones complejas}$$

   - **Algoritmo FFT (Cooley–Tukey en base 2):** Descompone sucesivamente la secuencia en muestras pares e impares mediante etapas sucesivas de mariposas:

$$\mathcal{O}(N \log_2 N) \quad \longrightarrow \quad C_{\text{FFT}} = \frac{N}{2} \log_2 N \quad \text{multiplicaciones complejas}$$

Factor de Reducción Computacional (η):

$$\eta = \frac{\text{Multiplicaciones DFT}}{\text{Multiplicaciones FFT}} = \frac{N^2}{\frac{N}{2} \log_2 N} = \frac{2N}{\log_2 N}$$

Conclusión: Mientras la DFT crece de forma cuadrática (N^2), la FFT escala de forma casi lineal ($N \log_2 N$), incrementando la aceleración η para bloques grandes de datos.

Cuantitativa: DFT Directa vs. FFT Base 2

2. Tabla Comparativa de Multiplicaciones Complejas:

N	**DFT** (N^2)	**FFT** ($\frac{N}{2}\log_2 N$)	**Factor Reducción** (η)
8	64	12	5,3×
16	256	32	8,0×
64	4.096	192	21,3×
256	65.536	1.024	64,0×
1.024	1.048.576	5.120	204,8×
4.096	16.777.216	24.576	682,7×
8.192	**67.108.864**	**53.248**	**1.260,3**×

Impacto en el Ejemplo de Audio ($F_s = 48$ kHz, $N = 8192$):

- Tiempo disponible para procesar el bloque: $T_{\text{bloque}} = \frac{8192}{48.000} \approx 170{,}67$ ms.
- **Con DFT:** Se requieren $\approx 67{,}1$ millones de multiplicaciones $\Longrightarrow$ 1 multiplicación cada 2,54 ns (inviable en procesadores estándar).
- **Con FFT:** Se requieren solo 53.248 multiplicaciones $\Longrightarrow$ 1 multiplicación cada 3,21 μs (tasa de solo 311 kHz, plenamente realizable).

Aritmética en Hardware: Multiplicaciones Reales

3. Traducción a Operaciones Aritméticas Reales:
En los procesadores digitales, los números complejos se operan mediante sus componentes real e imaginaria: $(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$.

- **1 Multiplicación Compleja = 4 Multiplicaciones Reales + 2 Sumas Reales**.

Cómputo Real Total Requerido:

- **DFT Directa:**

$$4 \times N^2 \quad \text{multiplicaciones reales}$$

- **FFT Base 2:**

$$4 \times \left(\frac{N}{2} \log_2 N \right) = \mathbf{2N} \log_{\mathbf{2}} \mathbf{N} \quad \text{multiplicaciones reales}$$

Evaluación para el Bloque de Audio ($N = 8192$):

- **DFT:** $4 \times 67.108.864 = \mathbf{268.435.456}$ multiplicaciones reales.
  Exige una velocidad de procesamiento de $> 1{,}57$ GFLOPS dedicada únicamente al cálculo de la transformada.
- **FFT:** $2 \times 8192 \times 13 = \mathbf{212.992}$ multiplicaciones reales.
  Exige únicamente $\approx 1{,}25$ MFLOPS (**99,92**% de ahorro en consumo de potencia y tiempo de cómputo).

Filtrado usando DFT I

Sea $x[n]$ una señal de longitud N, que se procesa con un filtro de respuesta al impulso $h[n]$ de longitud M, obteniendo la salida:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- No es díficil de probar que la señal $y[n]$ tiene una longitud $N + M - 1$, ya que una de las señales se debe "deslizar" completamente sobre la otra.
- Por cada deslizamiento, el número de multiplicaciones y sumas es del orden de $\min N, M$.
- La complejidad total es del orden de $N(N + M - 1)$ o $M(N + M - 1)$. En rigor esto es una cota superior, pero que da el orden correcto cuando N y/o M son grandes. O sea complejidad cuadrática en el orden de las secuencias que se desean convolucionar.

También sabemos que podemos operar en el dominio de la frecuencia:

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\Omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)H(\Omega)\}$$

donde $X(\Omega)$, $H(\Omega)$ y $Y(\Omega)$ son las trasnformadas de Fourier de $x[n]$, $h[n]$ y $y[n]$, respectivamente.

Filtrado usando DFT II

Por otro lado:

- Calcular las DFTs de las secuencias es muy eficiente: del orden de $M \log M$ y $N \log N$ respectivamente.
- Lamentablemente el producto de las DFTs no es igual a la convolución regular sino a la circular.

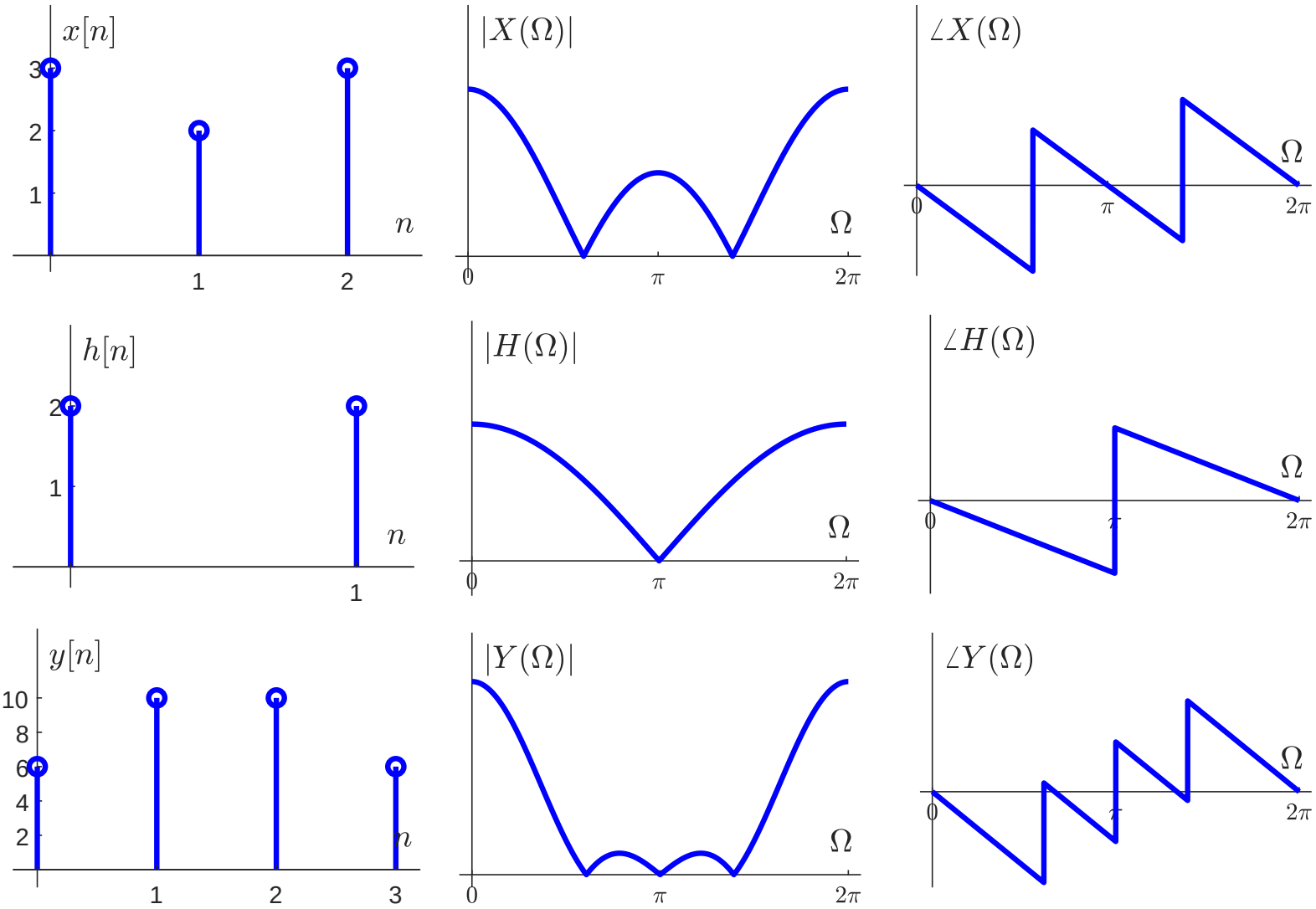
Una idea es completar con ceros las señales hasta llevarlas a la longitud esperada de la señal de salida de la convolución regular. De esa forma cuando multiplique las DFTs de las señales, la DFT resultante va a ser la que corresponde a la convolución circular de las señales con ceros agregados.

Pero el resultado de esa convolución circular coincide con la convolución regular que buscábamos!

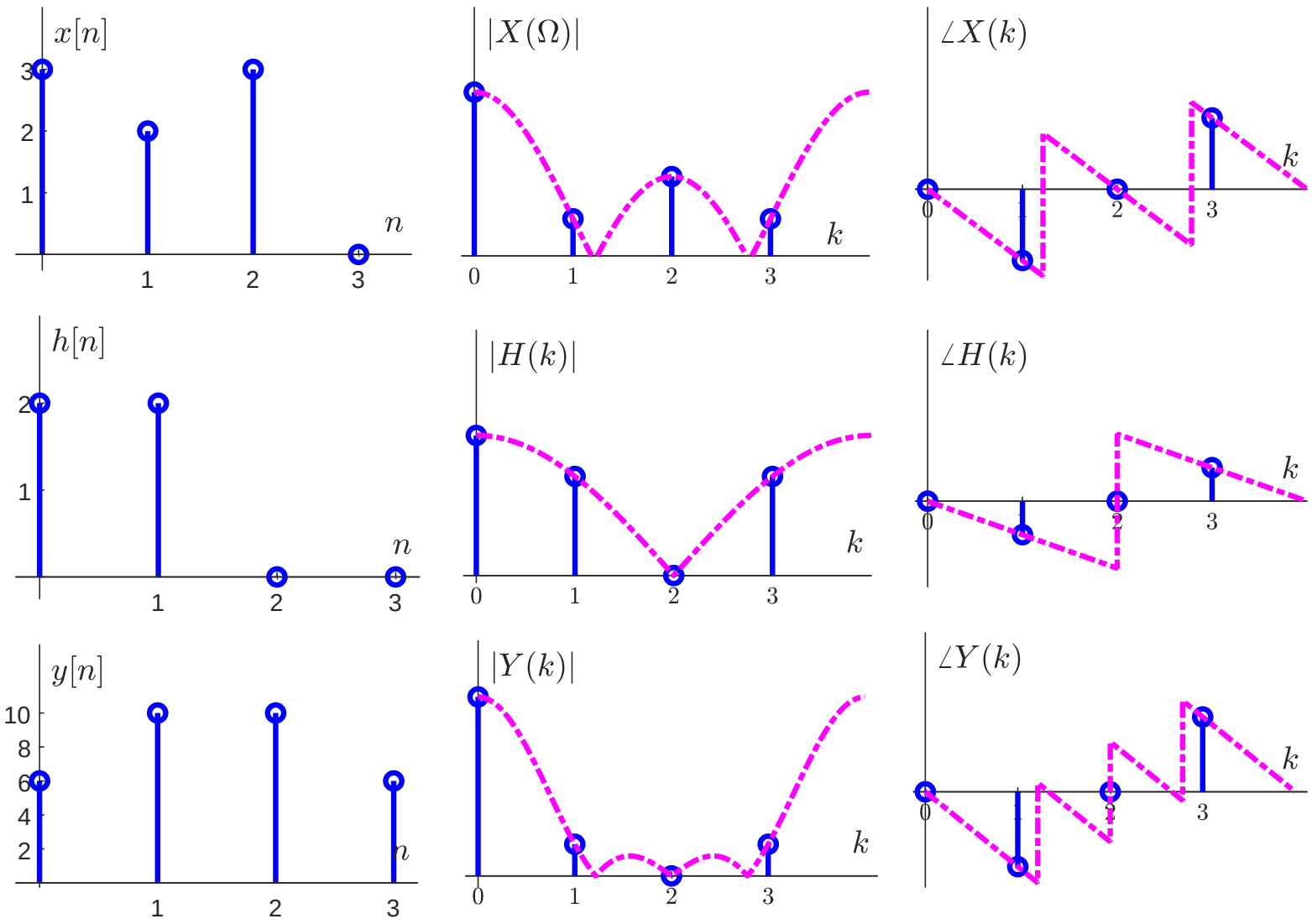
El procedimiento sería así:

- Completamos ambas señales $x[n]$ y $h[n]$ con ceros para que ambas tengan longitud $N + M - 1$.
- Calculamos ambas DFT de $N + M - 1$ puntos y obtenemos el producto de ambas.
- Calculamos la DFT inversa para obtener la señal $y[n]$.
- Complejidad total del orden de $(N + M - 1) \log(N + M - 1)$.

Filtrado usando DFT III



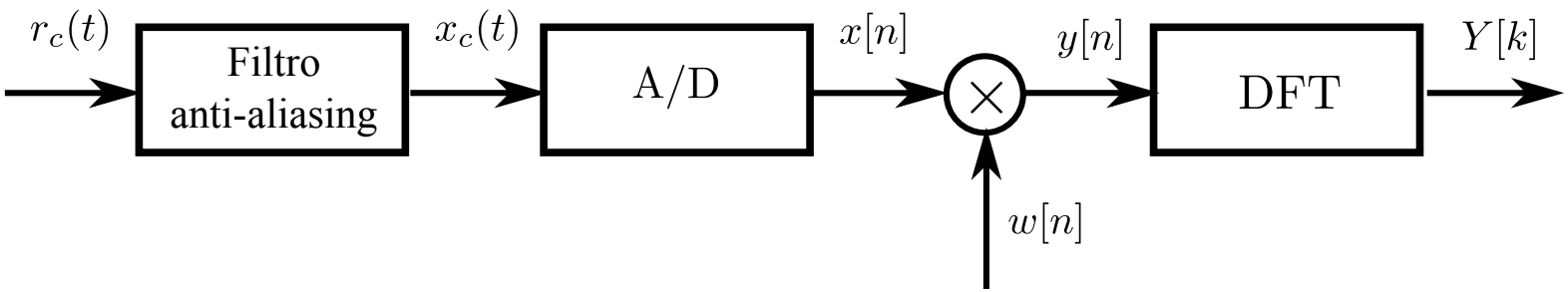
Filtrado usando DFT IV



Análisis de Fourier por medio de la DFT I

Una de los principales usos de la DFT es el análisis de Fourier de señales de tiempo continuo. Esto es muy útil en campos como las comunicaciones, procesamiento de habla o radar.

Muchos *analizadores de espectro* comerciales proveen análisis de Fourier de señales de tiempo continuo a través de un procedimiento de muestreo de tiempo continuo a tiempo discreto seguido por el cómputo de una DFT!!



- La señal a analizar $r_c(t)$ es pasada por un filtro anti-aliasing para generar $x_c(t)$ y poder pasar de tiempo continuo a tiempo discreto.
- A través del muestreo (y eligiendo apropiadamente la tasa de muestreo) generamos las muestras $x[n]$.
- Una ventana $w[n]$ de longitud finita es aplicada a la secuencia $x[n]$ y se genera la señal $y[n]$.
- Se calcula la DFT de la señal $y[n]$. Obviamente se desea que la DFT $Y[k]$ represente lo más fielmente posible a $R_c(j\omega)$.

Análisis de Fourier por medio de la DFT II

La transformada de Fourier de la secuencia discreta $x[n]$, asumiendo que no hay aliasing en el proceso de muestreo es:

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{T} X_c\left(\frac{\Omega}{T}\right), \ \Omega \in [-\pi, \pi)$$

Además la señal $y[n] = x[n]w[n]$ se puede caracterizar en forma equivalente por:

$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\theta}\right) W\left(e^{j(\Omega-\theta)}\right) d\theta$$

Finalmente, asumiendo que la ventana $w[n]$ tiene longitud N, la DFT se puede escribir como:

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] W_N^{kn}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

Es claro entonces que

$$Y[k] = Y\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}}$$

De esta forma los valores de DFT $Y[k]$ se corresponden con las frecuencias de tiempo continuo

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{NT}, \quad k = 0, \ldots, N$$

Análisis de Fourier por medio de la DFT III

Algunas consideraciones:

- Lo que se desea finalmente es que los valores de $TY[k]$ sean lo más similares posibles a los valores de $R_c(j\omega_k)$. Con N lo suficientemente grande podríamos obtener bastante detalle en el espectro de $r_c(t)$.
- Existen distintos efectos que impiden que $TY[k] = R_c(j\omega_k)$.
- En primer lugar está la presencia del filtro anti-aliasing puede eliminar zonas del espectro de $R_c(j\omega)$ para frecuencias elevadas (o ruido). Es más, puede esperarse algún solapamiento luego de este filtrado (el filtro anti-aliasing no es ideal) al hacer el muestreo. Se supone, que la zonas del espectro de $R_c(j\omega)$ filtradas, no son importantes o son despreciables y que el posterior solapamiento no molesta demasiado.
- El efecto de la cuantificación también impide conservar exactamente los valores exactos de las muestras. Este efecto y el anterior, se pueden minimizar implementando adecuadamente el sistema de muestreo (diseño del filtro anti-aliasing, selección de frecuencia de muestreo, número de bits del conversor, etc). De esta forma uno puede asumir que $R_c(j\omega) \approx X_c(j\omega)$.
- Dado que la señal $x[n]$ puede tener una longitud ilimitada o muy grande se hace necesaria la presencia de la ventana $w[n]$. Vemos que la misma puede alterar la forma del espectro de $X(e^{j\Omega})$. Sin embargo, si la misma tiene buenas propiedades dicha distorsión puede ser tolerable. En general, si N es grande, la ventana no va a traer mayores problemas.

Análisis de Fourier por medio de la DFT IV

Ejemplo: Consideremos la señal

$$r_c(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t)$$

Suponiendo que no hay efectos distorsivos en el muestreo (filtro anti-aliasing no ideal, ruido, fenómenos de cuantificación,e tc) tenemos:

$$x[n] = A_1 \cos(\Omega_1 n) + A_2 \cos(\Omega_2 n),\ n \in \mathbb{Z}$$

donde $\Omega_i = \omega_i T$ con $i = 1, 2$. La secuencia enventanada:

$$y[n] = A_1 w[n] \cos(\Omega_1 n) + A_2 w[n] \cos(\Omega_2 n),\ n \in \mathbb{Z}$$

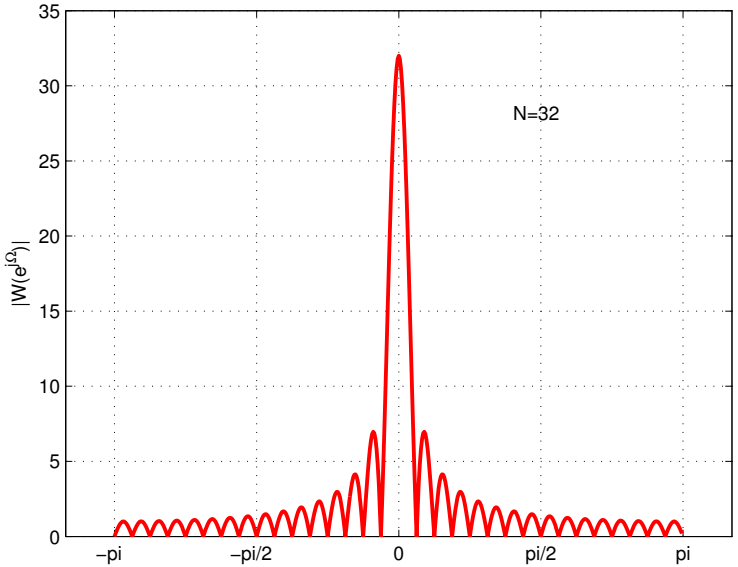
En el dominio de la frecuencia podemos escribir:

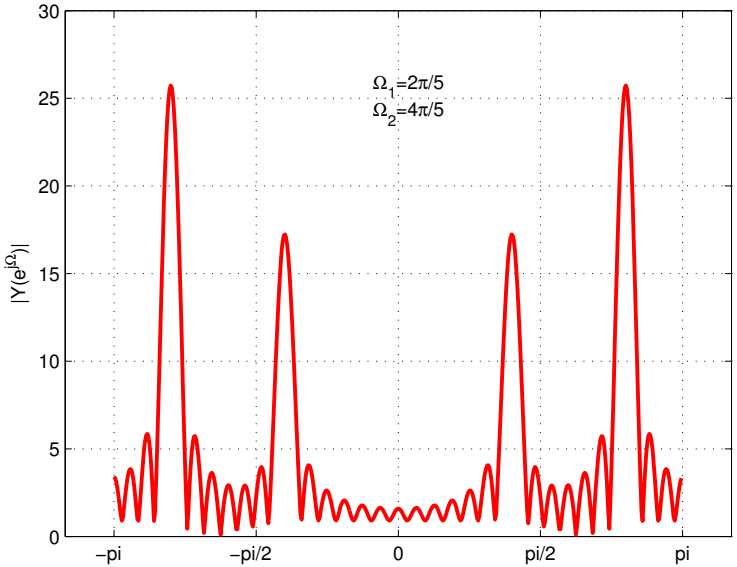
$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{A_1}{2} W\left(e^{j(\Omega-\Omega_1)}\right) + \frac{A_1}{2} W\left(e^{j(\Omega+\Omega_1)}\right) + \frac{A_2}{2} W\left(e^{j(\Omega-\Omega_2)}\right) + \frac{A_2}{2} W\left(e^{j(\Omega+\Omega_2)}\right)$$

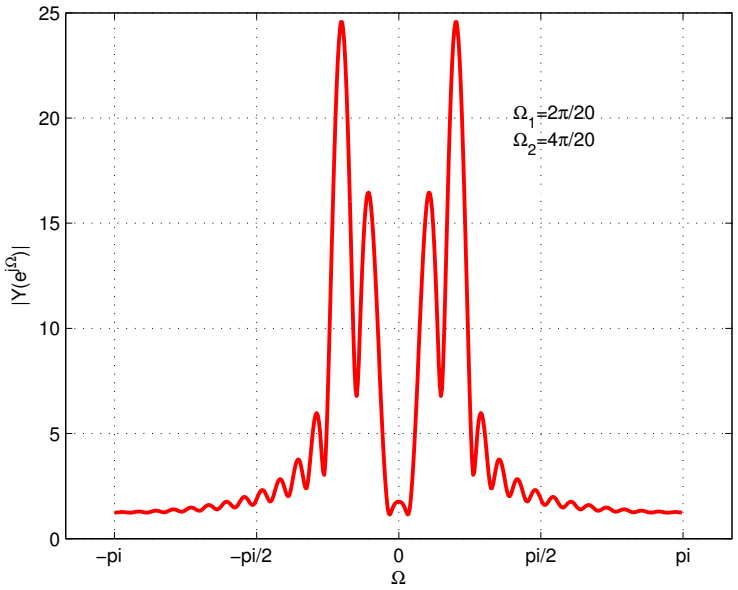
A continuación consideremos que la ventana $w[n]$ es la ventana rectangular:

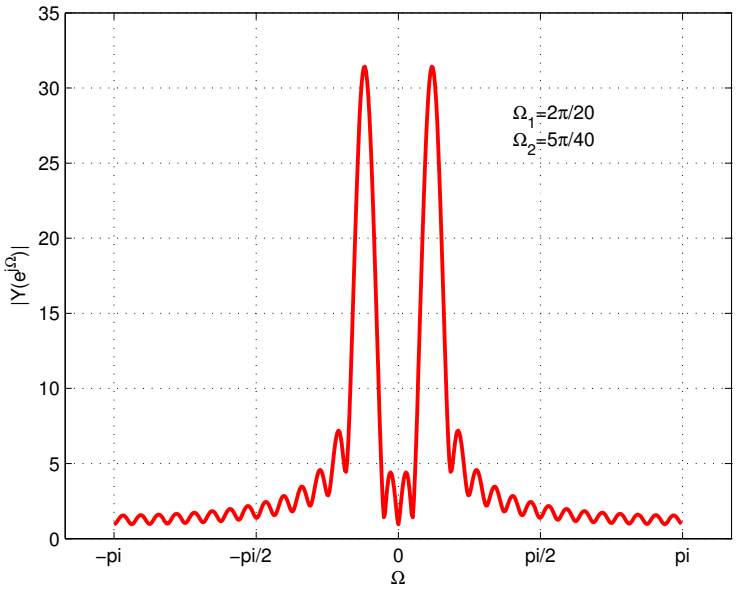
$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Análisis de Fourier por medio de la DFT V







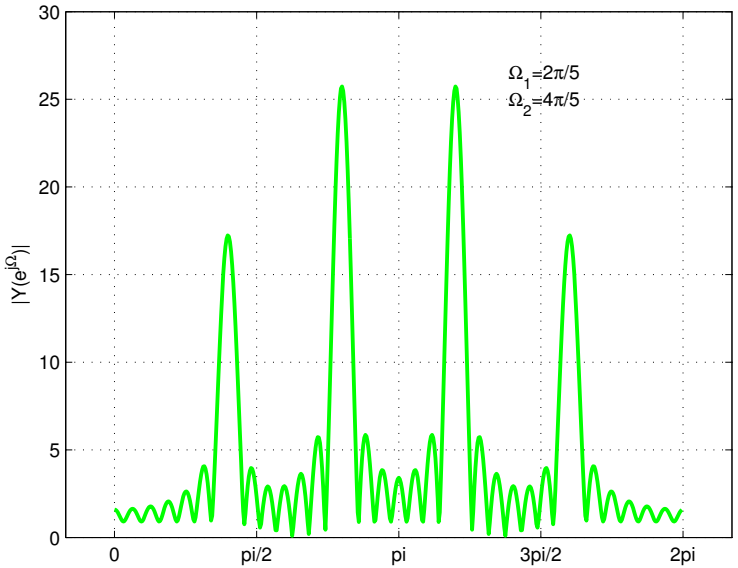


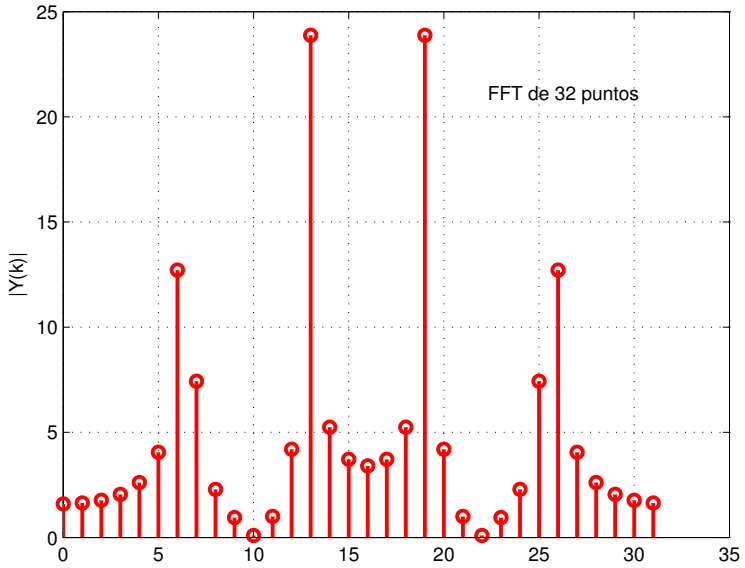
Análisis de Fourier por medio de la DFT VI

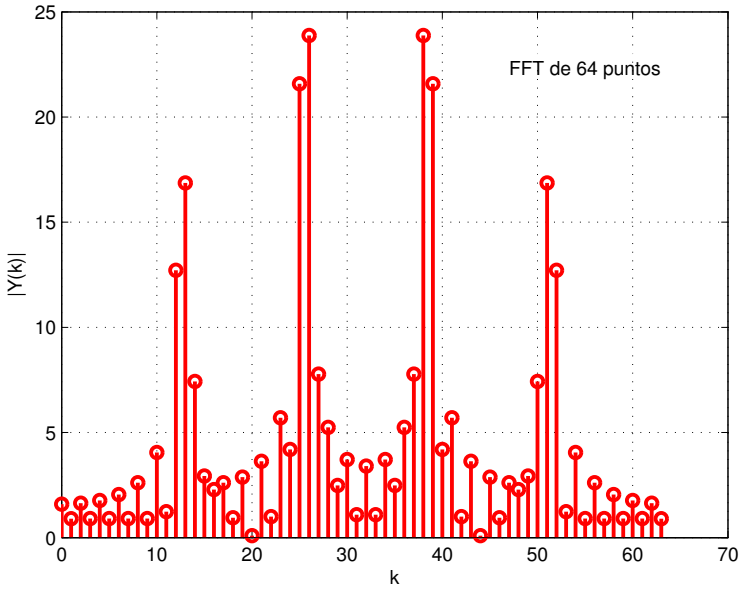
- El ancho del lóbulo principal de la ventana rectangular $w[n]$ es inversamente proporcional a N. De hecho es aproximadamente $\Delta\Omega = \frac{4\pi}{N}$.
- El espectro ideal debería ser el de dos impulsos en Ω_1 y Ω_2. El ancho no despreciable del lóbulo principal de la ventana hace que los impulsos se transformen en picos altos pero con cierto ancho.
- Cuando la separación entre las dos frecuencias presentes es mucho mayor a $\Delta\Omega$, los dos picos se diferencian muy bien en el espectro.
- Cuando la separación entre las frecuencias es comparable a $\Delta\Omega$ vemos que los picos se empiezan a solapar. La altura de los lóbulos secundarios de la ventana producen *leakage* (fugas) de un pico hacia el otro.
- Cuando la separación entre las frecuencias componentes es menor a $\Delta\Omega$ es más díficil diferenciar las dos frecuencias presentes. Hasta una separación de $\Delta\Omega/2 = \frac{2\pi}{N}$ es posible diferenciar picos, pero la estimación de sus amplitudes es bastante más pobre porque el leakage empieza a tener una relevancia mayor. Separaciones menores a $\frac{2\pi}{N}$ ya no son resolubles.

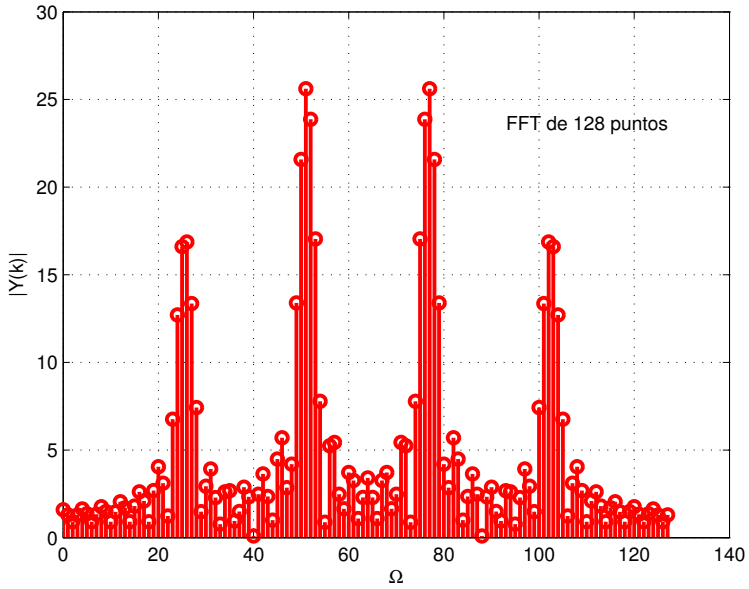
El uso adecuado de la ventana es fundamental en función de lo que esperamos observar en el espectro. El diseño adecuado de ventanas es muy importante y un área de interés en procesamiento de señales. Se puede probar que existe un compromiso entre el ancho del lóbulo principal y la altura de los lóbulos secundarios. Existen técnicas de diseño para jugar con este esta relación de compromiso. Más adelante volveremos sobre esto.

Análisis de Fourier por medio de la DFT VI









Análisis de Fourier por medio de la DFT VII

Observaciones sobre el efecto del muestreo en frecuencia con la DFT:

- Vemos que a medida que aumentamos el tamaño de la DFT (agregando ceros) tomamos muestras de la transformada de Fourier a intervalos más pequeños. Ello permite aproximar con mayor claridad la verdadera transformada de Fourier.
- De ninguna manera, el agrego de ceros permite resolver mejor detalles en la señal $x[n]$: si el largo de la ventana N es tal que no se puede diferenciar dos frecuencias con distancia entre ellas menor a $\frac{2\pi}{N}$, el agregado de ceros no permitirá diferenciarlas tampoco.

La posibilidad de observar detalles finos en el espectro de una señal está vinculada al número N de muestras efectivas de $x[n]$ usadas para el cálculo de la DFT y las características espectrales de la ventana usada. El agregado de ceros no mejora la *resolución espectral*. Sólo permite aproximar con mayor detalle una transformada de Fourier en donde ya está fijada la mínima resolución espectral obtenible por la acción de la ventana con un largo igual a la cantidad de muestras disponibles.

Temas para leer por cuenta propia

Lectura obligatoria

- Serie de Fourier en tiempo discreto (Secciones 8.1 y 8.2 y tabla 8.1 de Oppenheim and Schafer).
- Muestreo de la transformada de Fourier (Sección 8.4 de Oppenheim and Schafer).
- Propiedades de la DFT (Sección 8.6 y tabla 8.2 de Oppenheim and Schafer).
- Convolución lineal mediante la DFT (Sección 8.7 de Oppenheim and Schafer).
- Transformada de Fourier dependiente del tiempo (Sección 10.3 de Oppenheim and Schafer).
- Análisis de Fourier de señales no estacionarias (Sección 10.5 de Oppenheim and Schafer).

Lectura optativa

- Tranformada discreta del coseno (DCT) (Sección 8.8 de Oppenheim and Schafer).
- Cómputo eficiente de la DFT (Secciones 9.0, 9.1, 9.2 y 9.3 de Oppenheim and Schafer).

Algunos ejercicios I

1. Ejercicios 8.5, 8.9, 8.10, 8.12, 8.23, 8.32, 8.37de Oppenheim and Schafer.
2. Ejercicios 8.39, 8.40, 8.41, 8.43, 8.59 y 8.60 de Oppenheim and Schafer.
3. Ejercicio 10.2, 10.3, 10.4, 10.6,10.10, 10.12, 10.24, 10.25,10.31, 10.44 de Oppenheim and Schaffer.

Tiempo de consultas

¿Preguntas?