

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Muestreo e interpolación en tiempo continuo

Dr. Ing. Pedro D. Arini

Señales y Sistemas
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

2do. cuatrimestre 2026

Resumen

Por qué muestrear una señal de tiempo continuo?

Las señales del mundo real son de naturaleza analógica.

La extracción de información relevante a partir de ellas requiere su procesamiento a través de sistemas adecuados (LTIs o no) de tiempo continuo. El diseño de dichos sistemas en tiempo continuo puede ser complejo y caro!!

En los ultimos años han existidos enormes avances en la microelectrónica:

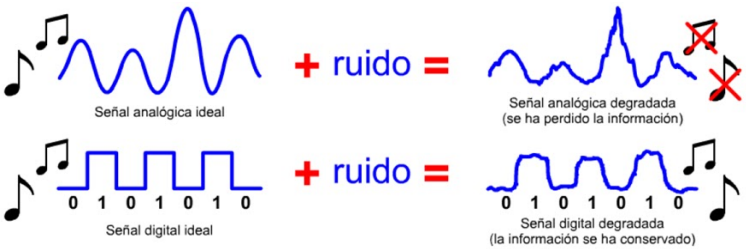
- Procesadores más rápidos y poderosos.
- Procesadores más pequeños.
- Procesadores de muy bajo consumo.

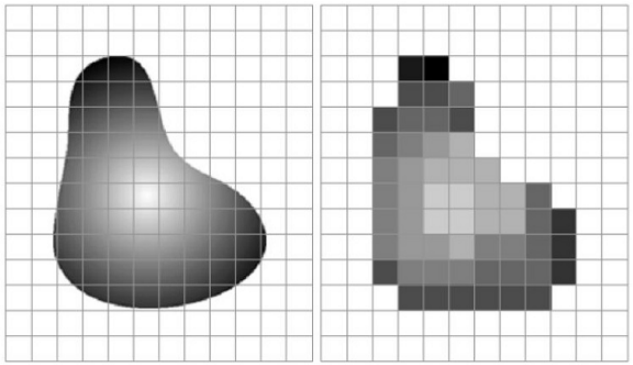
En dichos procesadores es muy fácil implementar, mediante un algoritmos adecuados, sistemas de tiempo discreto que permitan procesar y obtener información a partir de señales de tiempo discreto.

El puente entre el mundo analógico de los señales de interés y el mundo digital donde el procesamiento es más simple y barato es lo que se conoce como *muestreo* o *sampling*: obtener una representación de una señal de tiempo continuo, lo más fiel posible, mediante una señal de tiempo discreto!!

Señales analógicas, discretas, cuantizadas, digitales,...

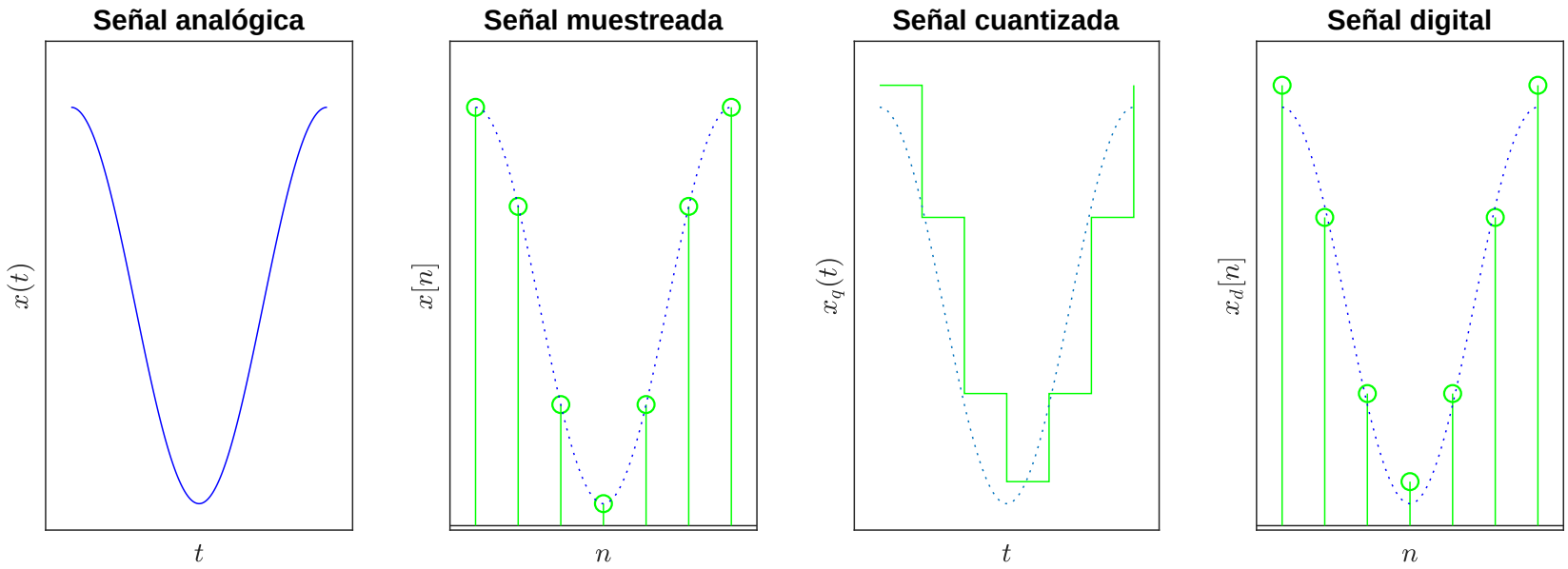


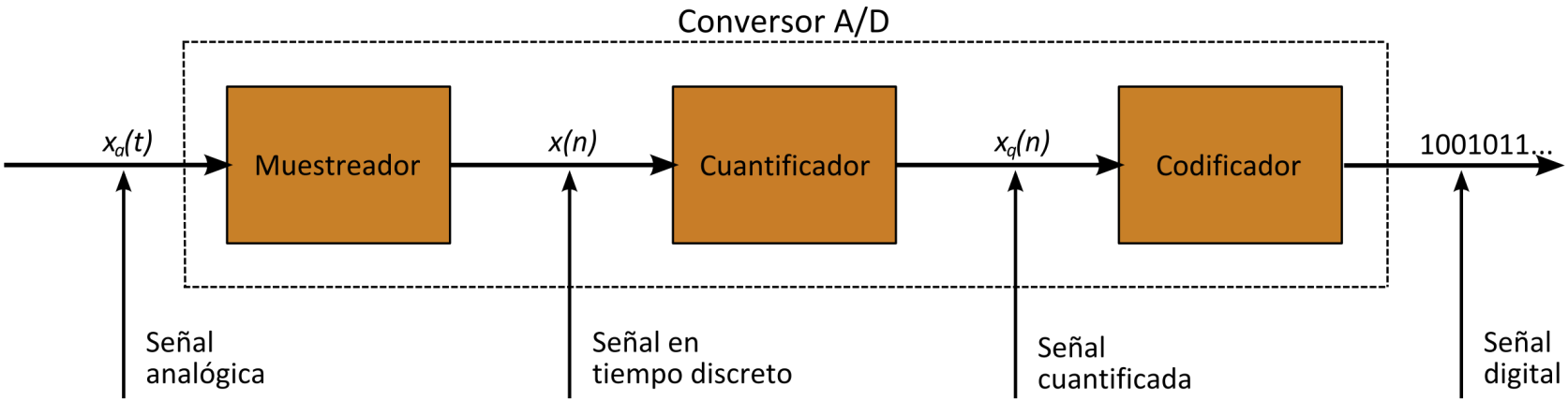




Fuentes: https://www.edu.xunta.gal/centros/iesblancoamorculleredo/aulavirtual/pluginfile.php/20936/mod_resource/content/0/Apuntes/electronica_digital.pdf
https://tecnosantaeugenia.es/comunicaciones/comunicaciones5.html
https://users.exa.unicen.edu.ar/catedras/pdi/FILES/TE/CP1.pdf

Conversión Analógica/Digital





https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Jmcalderon

Conceptos de muestreo I (teoría)

Por qué Nyquist es suficiente ? Decimos que, si una señal $x(t)$ está estrictamente limitada en banda (no tiene frecuencias por encima de B Hz), sucede lo siguiente:

Reconstrucción exacta y unívoca: Al muestrear a $F_s > 2B$, las réplicas espectrales en la frecuencia no se solapan (no hay aliasing). Existe una única señal de ancho de banda B que pasa exactamente por esas muestras.

Los "detalles" entre muestras no se pierden: Aunque entre dos muestras parezca haber un "hueco", la información de lo que ocurre en medio está contenida en la suma de las funciones interpoladoras sinc:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

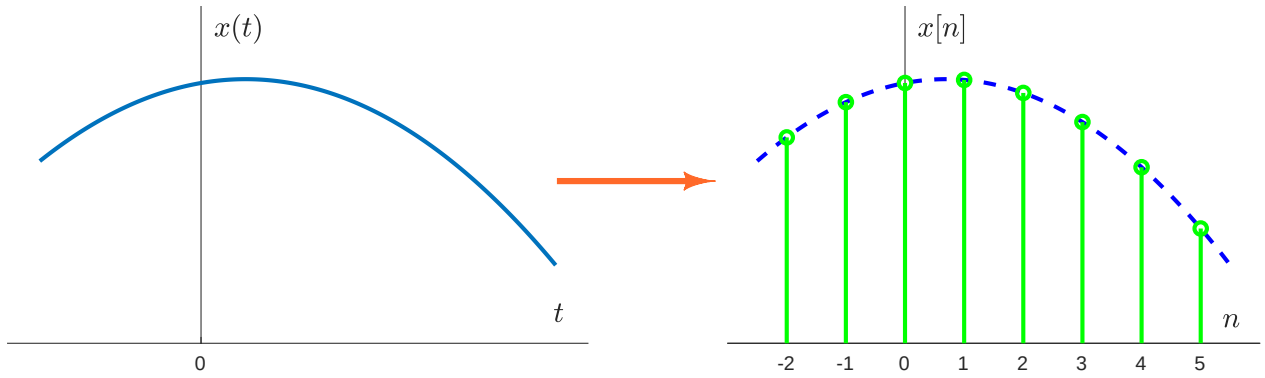
La función sinc reconstruye suavemente los picos y valles entre las muestras sin ningún margen de error teórico.

Muestreo y reconstrucción I

Nos concentraremos en lo que se denominará muestreo periódico o uniforme. En ese caso muestrear una señal es generar una secuencia de tiempo discreto según:

$$x[n] = x_c(nT), \ n \in \mathbb{Z},$$

donde T es el período de muestreo y $x_c(t)$ es la señal de tiempo continuo.

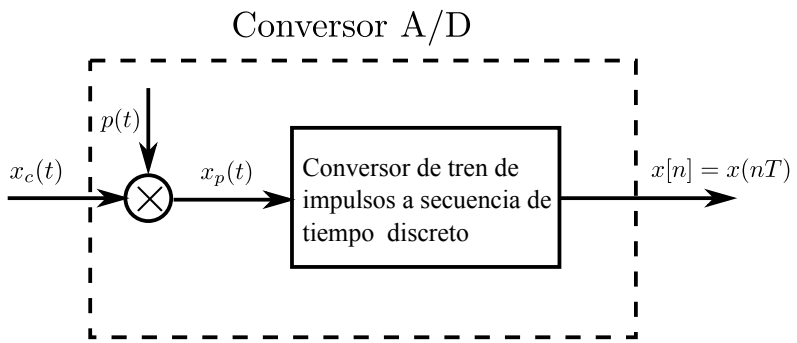


La clave es asegurar que las muestras $x[n]$ con $n \in \mathbb{Z}$ provee la misma información que la señal original $x_c(t)$ o lo que es lo mismo, si es posible reconstruir $x_c(t)$ con solamente los valores $x[n]$. Sorprendentemente esto es cierto para una clase particular pero bastante amplia de señales de tiempo continuo!!

¿Da lo mismo usar cualquier valor de T?

Muestreo y reconstrucción II

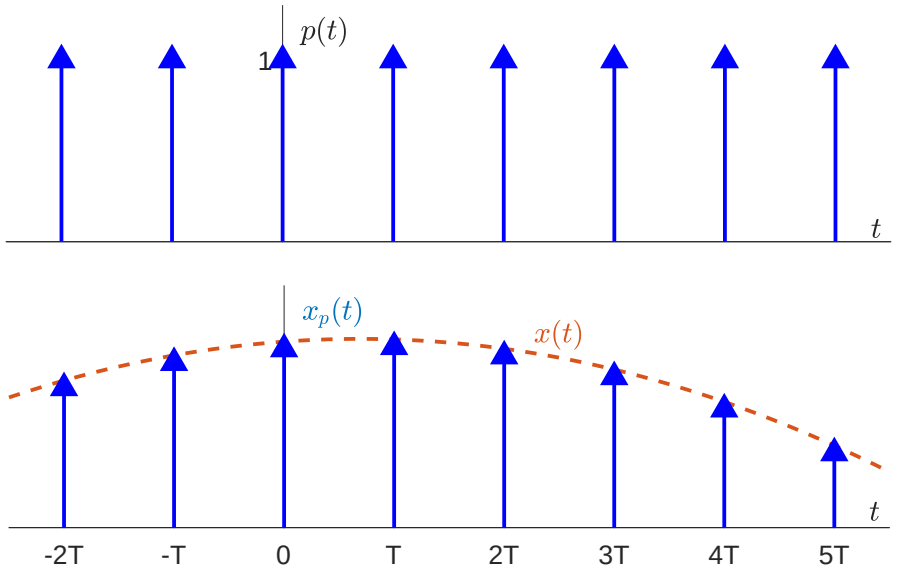
Un conversor A/D será modelado para nosotros de la siguiente forma:



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = x_c(t)p(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t - nT)$$



Este es un modelo matemático adecuado para el ADC. En lo que sigue analizaremos la acción de este sistema en el dominio de la frecuencia!!

Muestreo y reconstrucción III

Vemos que $x_p(t) = x_c(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t - nT)$. En el dominio del tiempo dominio de la frecuencia tenemos que:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\omega) * P(j\omega)$$

Sabemos que:

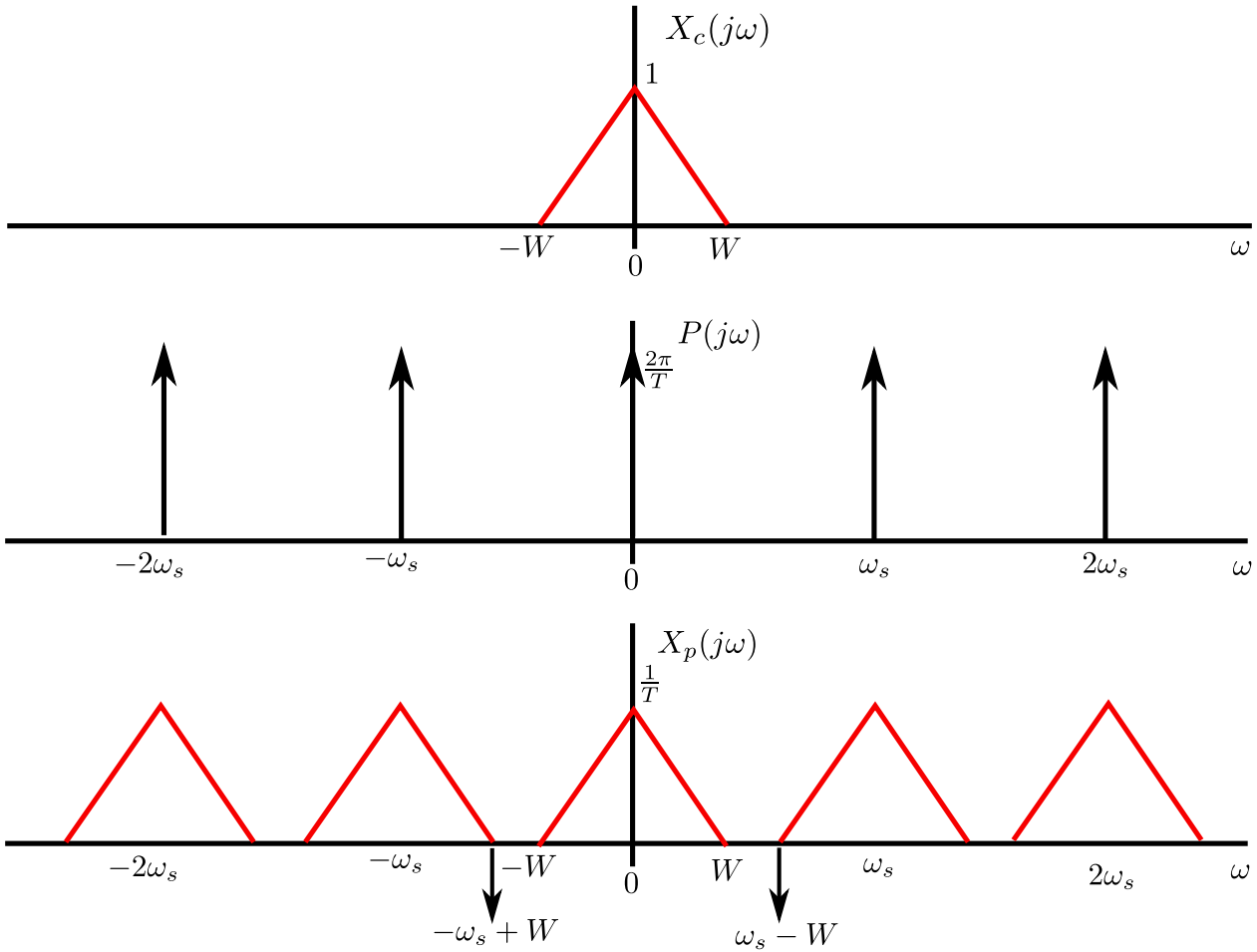
$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

donde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ es la *frecuencia de muestreo* o *frecuencia de sampling*. Es claro entonces que podemos escribir:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$$

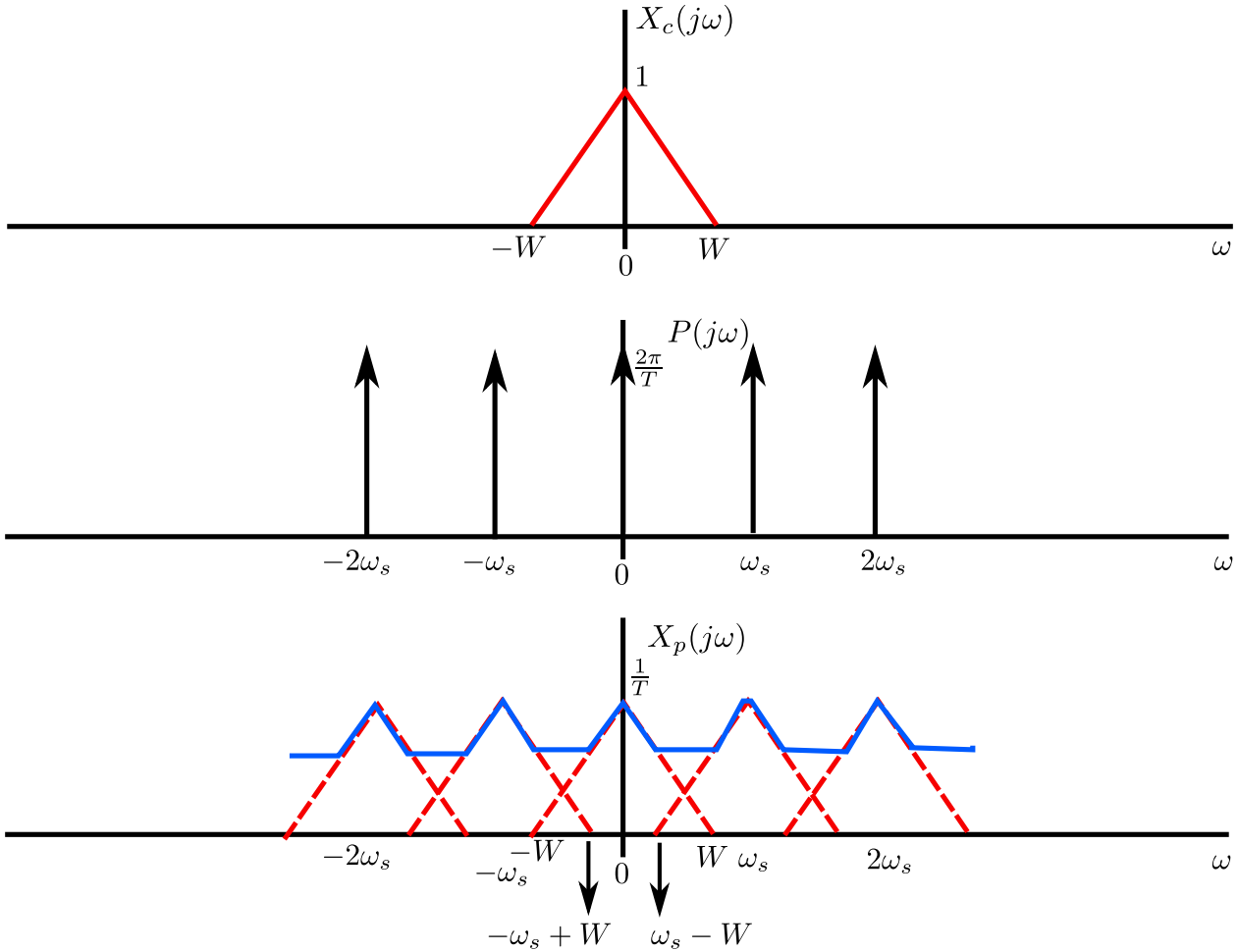
Vemos que la transformada de Fourier $x_p(t)$ es una sucesión de copias de la $X_c(j\omega)$ centradas en frecuencias $k\omega_s$ con $k \in \mathbb{Z}$!! Esas copias se pueden solapar, en función de las características de $X_c(j\omega)$ y del valor de ω_s!!

Muestreo y reconstrucción IV



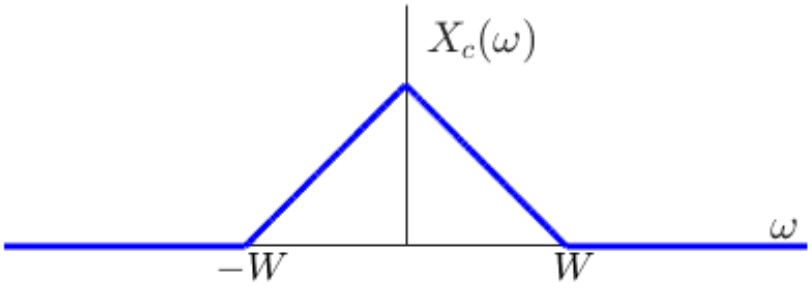
Vemos que si $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| > W$ y si $2W < \omega_s$ las replicas no se solapan!!

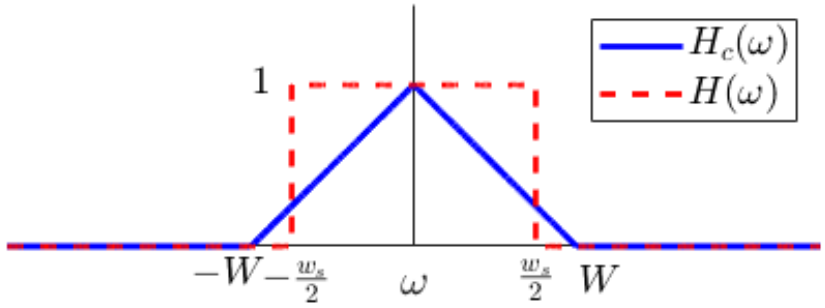
Muestreo y reconstrucción V

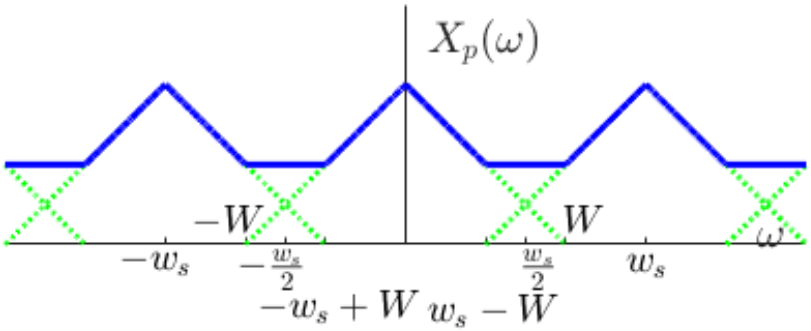


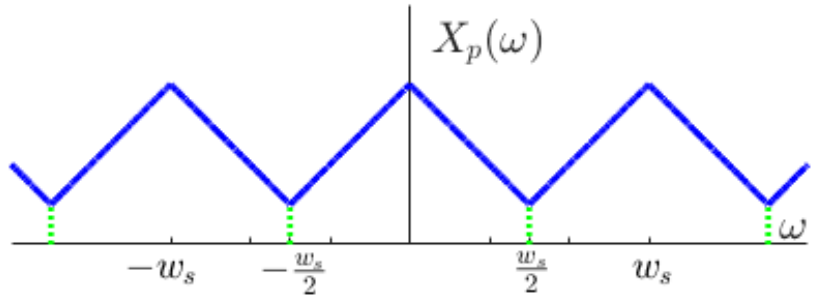
Vemos que aunque $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| > W$ si $2W \geq \omega_s$ las replicas se solapan!!. Existe *aliasing*!! Si $x_c(t)$ no fuera de *banda limitada*, las replicas se solaparían para cualquier eleccióndn de ω_s!!

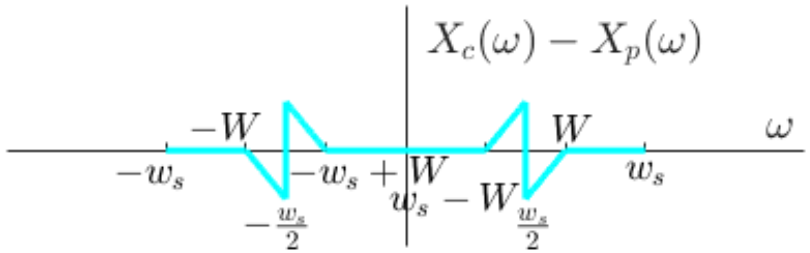
Filtrado antialiasing

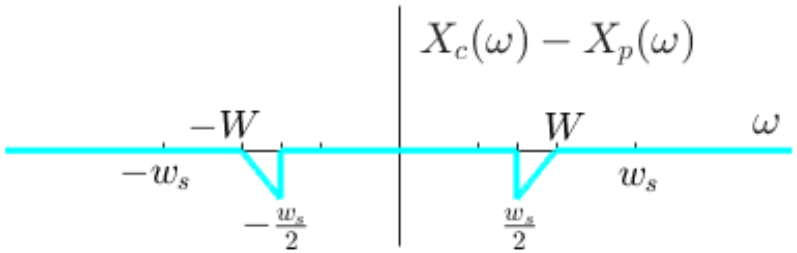








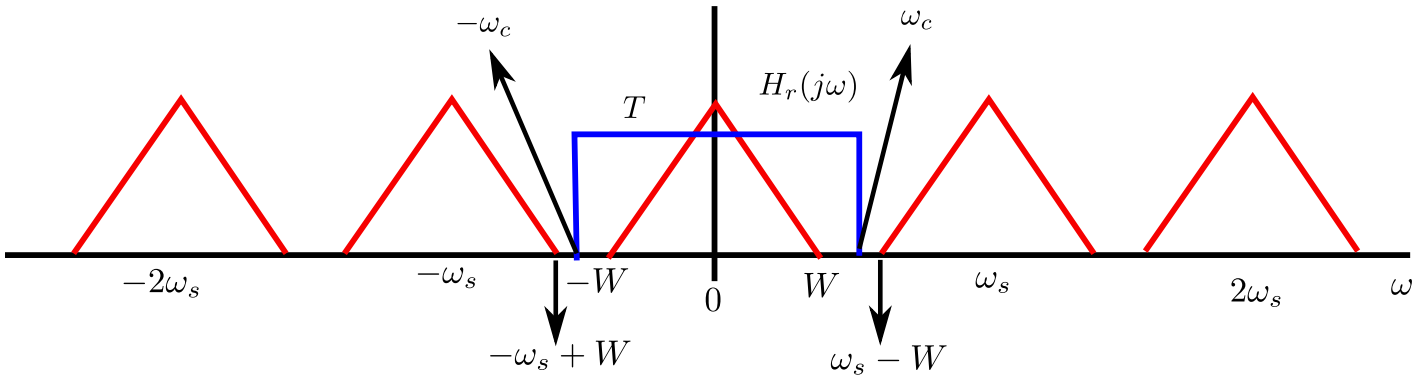




Si nuestro objetivo es obtener una representación fiel de una señal mediante muestreo siempre tenemos que usar un filtro antialiasing! SIEMPRE!!!

Muestreo y reconstrucción VI

Supongamos que $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| > W$ y si $2W < \omega_s$. Sea $H_r(j\omega)$ un filtro pasabajos ideal con frecuencia de corte $W \leq \omega_c \leq \omega_s - W$ y ganancia T.



Es claro que:

$$X_p(j\omega)H_r(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))H_r(j\omega) = X_c(j\omega)$$

Recuperamos la señal original $x_c(t)$!! En el caso en el que hay solapamiento esto no sería posible, ya que dicho solapamiento altera el espectro original de $x_c(t)$!!

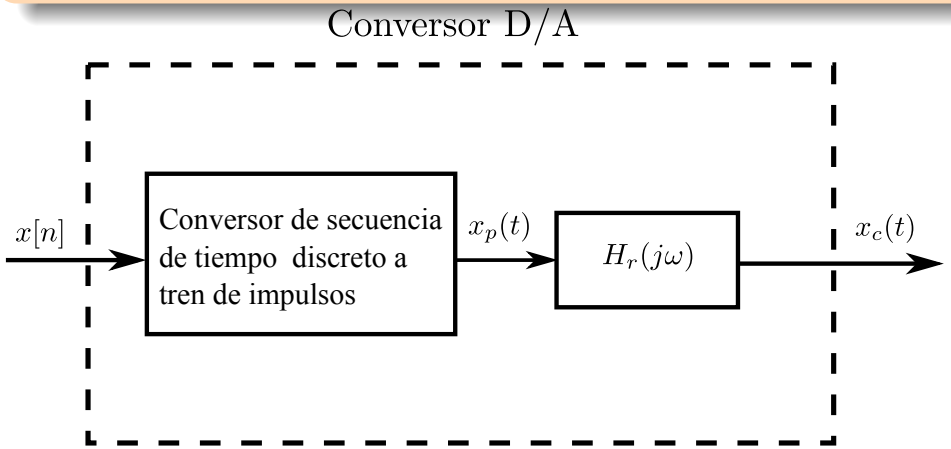
Muestreo y reconstrucción VII

La señal $x_p(t)$ puede escribirse claramente como:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)$$

De esta señal podemos obtener (usando el conversor de tren de impulsos a secuencias en tiempo discreto) las muestras $x[n] = x_c(nT)$.

De esta forma es claro que $x_p(t)$ y $x[n] = x_c(nT)$ son equivalentes y contienen la misma información ya que a partir de la secuencia $x[n]$ puedo volver a generar la señal $x_p(t)$ generando impulsos equiespaciados en T con peso $x[n]$!!



Usando las muestras $x[n]$ puedo recuperar la señal $x_c(t)$ cuando $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| > W$ y si $2W < \omega_s$!!

Muestreo y reconstrucción VIII

Teorema (Whittaker-Kotelnikov-Nyquist-Shannon)

Sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada que cumple:

$$X_c(j\omega) = 0 \ |\omega| \geq W$$

La señal $x_c(t)$ queda determinada en forma única por las muestras $x[n] = x_c(nT), n \in \mathbb{Z}$ si la tasa de muestreo T satisface:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2W, \quad T < \frac{\pi}{W}$$

$\omega_s = 2W$ se denomina frecuencia de Nyquist.

- Notar que la frecuencia de muestreo ω_s tiene que ser estrictamente mayor a $2W$. Muchas veces el resultado del teorema es cierto con $\omega_s = 2W$ pero otras veces no.
- Este teorema revela una condición necesaria suficiente para reconstruir una señal de banda limitada a partir de sus muestras. Pero si uno impone más restricciones a las señales $x_c(t)$ el teorema puede dejar de ser condición necesaria (por supuesto sigue siendo condición suficiente).
- El teorema se puede extender fácilmente a señales de varias variables.

Conceptos de muestreo I (teoría)

Por qué Nyquist es suficiente ? Decimos que, si una señal $x(t)$ está estrictamente limitada en banda (no tiene frecuencias por encima de B Hz), sucede lo siguiente:

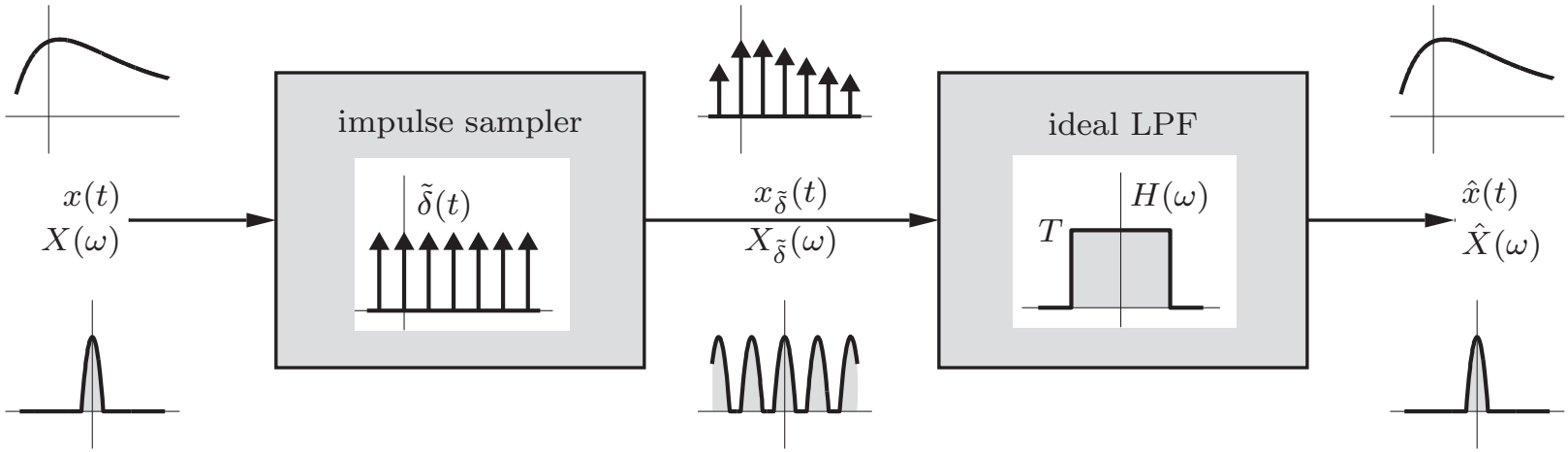
Reconstrucción exacta y unívoca: Al muestrear a $F_s > 2B$, las réplicas espectrales en la frecuencia no se solapan (no hay aliasing). Existe una única señal de ancho de banda B que pasa exactamente por esas muestras.

Los "detalles" entre muestras no se pierden: Aunque entre dos muestras parezca haber un "hueco", la información de lo que ocurre en medio está contenida en la suma de las funciones interpoladoras sinc:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

La función sinc reconstruye suavemente los picos y valles entre las muestras sin ningún margen de error teórico.

Muestreo en la teoría II



Conceptos de muestreo I (práctica)

Por qué en la realidad práctica podría necesitarse más del doble ($F_s \gg 2B$) ? Existen algunas razones por las que muestrear justo al doble del ancho de banda resulta insuficiente o problemático:

1) Los "detalles rápidos" aumentan el ancho de banda real de la señal. Por el Teorema de Paley-Wiener, ninguna señal real de duración finita en el tiempo puede estar estrictamente limitada en banda. Si una señal tiene transiciones bruscas, bordes afilados o picos muy estrechos (detalles de alta frecuencia), su espectro $X(\omega)$ se extiende hasta frecuencias muy elevadas. Si se limita a B mediante un filtro anti-aliasing para cumplir Nyquist, ya se suavizaron y eliminaron esos detalles antes de muestrear. Si queremos conservar esos detalles finos, se necesita ampliar el B y, por ende, aumentar F_s.

Conceptos de muestreo (práctica)

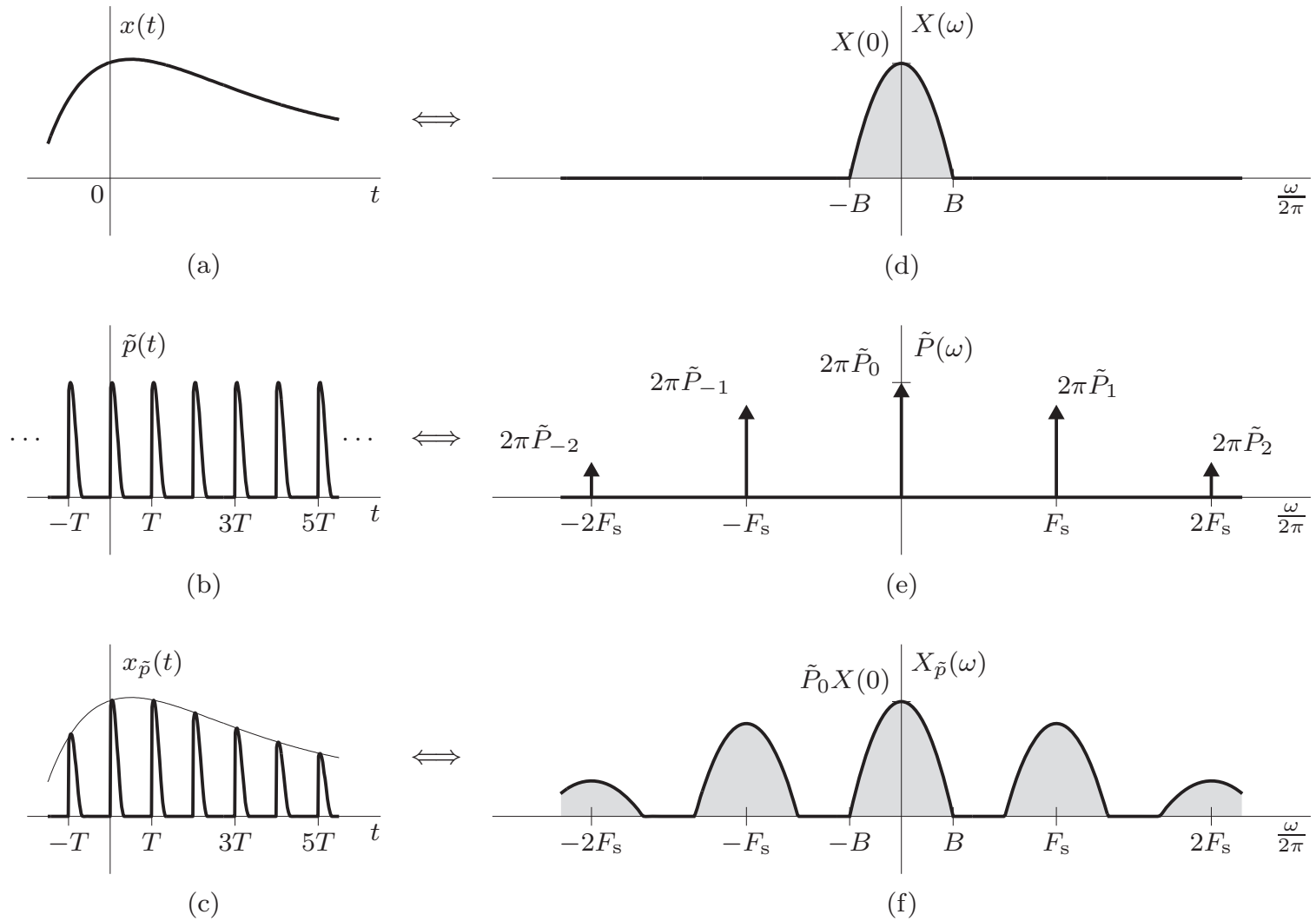
2) Filtros Paso Bajo Ideales. Para recuperar la señal original habiendo muestreado a la tasa justa de Nyquist ($F_s = 2B$), se necesitaría un filtro de reconstrucción analógico ideal con un corte en frecuencia perfectamente vertical. Un filtro así es físicamente irrealizable (requeriría un retardo infinito).La solución práctica: Muestrear a una tasa superior ($F_s > 2B$) para dejar un espacio vacío en la frecuencia conocido como banda de guarda ($F_s - 2B$). Esto permite usar filtros analógicos reales con una zona de transición suave y realizables.

3) Visualización e Interpoladores. En sistemas reales (como osciloscopios o convertidores D/A simples), no se utiliza la interpolación sinc infinita porque se requiere sumar ∞ muestras. Se utilizan interpoladores simples como: Retenedor de Orden Cero (Sample & Hold): Mantiene el valor constante hasta la siguiente muestra (escalonado).
Interpolación Lineal: Une los puntos con líneas rectas. Si se muestrea una sinusoide únicamente con 2 muestras por ciclo ($F_s = 2B$) y se unen con líneas rectas, se obtiene una onda triangular.
Para que una interpolación lineal o S&H reproduzca visualmente los "detalles" y la forma curva de la señal sin usar filtrado complejo, se requiere sobremuestrear (por ej., a 10 o 20 veces la frecuencia de la señal).

Conceptos de muestreo (práctica)

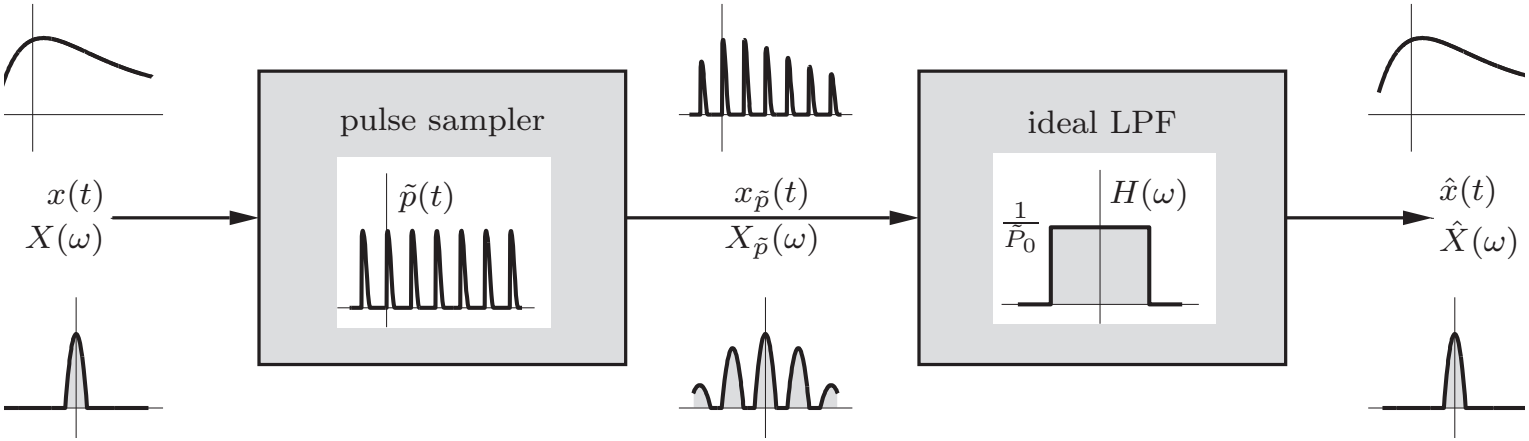
4) El caso límite $F_s = 2B$. Si se muestrea una sinusoide pura $x(t) = \sin(2\pi Bt)$ exactamente a la tasa de Nyquist $F_s = 2B$, y las muestras coinciden con los puntos de cruce por cero de la función, todas las muestras resultantes serán cero, perdiéndose la señal por completo. Por esta razón, el teorema exige estrictamente que la frecuencia de muestreo sea mayor ($F_s > 2B$), no igual.

Muestreo en la práctica I



Fuente: Lathi, B., & Green, R. (2014). Essentials of Digital Signal Processing. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781107444454

Muestreo en la práctica II



$$\tilde{p}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{P}_k e^{jk\omega_s t}$$

$$x_{\tilde{p}}(t) = x_c(t)\tilde{p}(t)$$

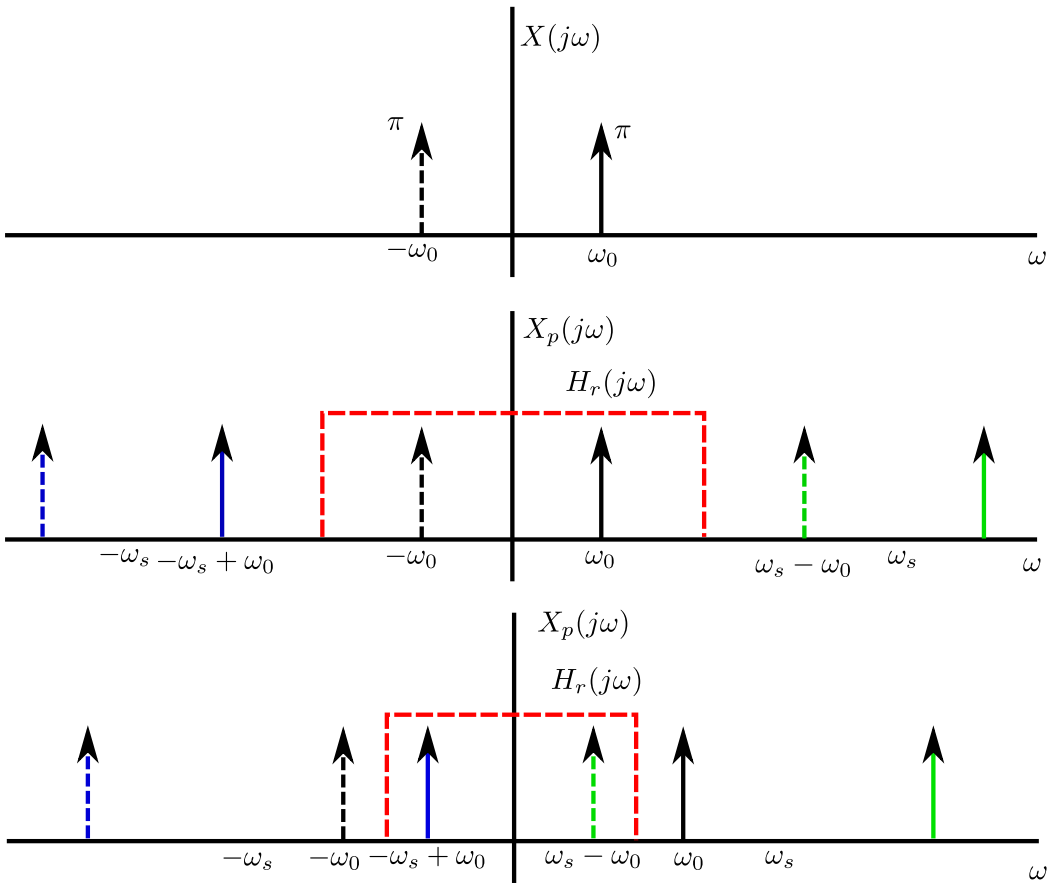
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\tilde{P}_k e^{jk\omega_s t}$$

$$X_{\tilde{p}}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{P}_k X(\omega - k\omega_s)$$

Fuente: Lathi, B., & Green, R. (2014). Essentials of Digital Signal Processing. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781107444454

Señales reconstruidas con aliasing I

Consideremos la señal $x_c(t) = \cos \omega_0 t$

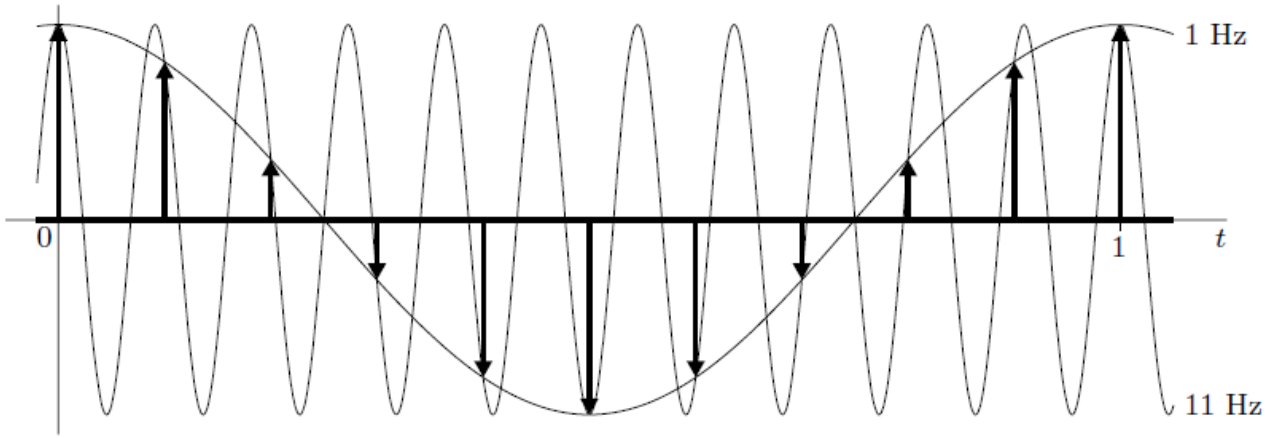


Como era de esperarse si $\omega_s > 2\omega_0$ podemos reconstruir perfectamente $x_c(t)$. Sin embargo, en este ejemplo vemos que si esa situación no se cumple lo que recuperamos es:

$$x_r(t) = \cos\left(\omega_s - \omega_0\right) t$$

Como caso extremo, si $\omega_s = \omega_0$ vemos que la señal reconstruida es una constante!! La presencia de aliasing impide la reconstrucción de la señal original!!

Señales reconstruidas con aliasing II



$$x(t) = \cos(2\ \pi\ f_0\ t + \theta)$$

$$x[n] = x(n\ T) = \cos(2\ \pi\ f_0\ n\ T + \theta)$$

$$y(t) = \cos(2\ \pi\ \left(f_0 + \frac{k}{T}\right)\ t + \theta)$$

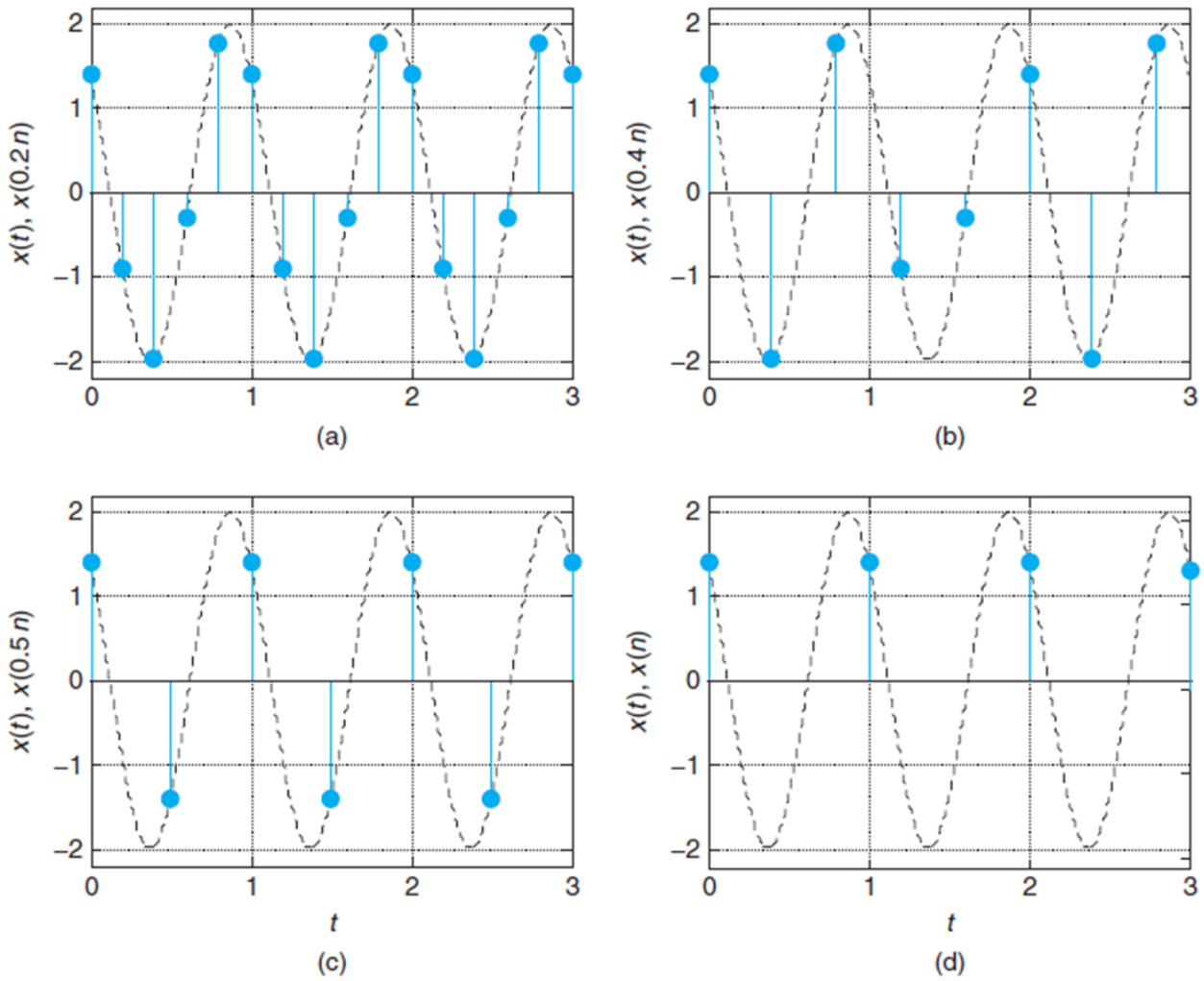
$$\begin{aligned} y[n] = y(n\ T) &= \cos(2\ \pi\ \left(f_0 + \frac{k}{T}\right)\ n\ T + \theta) \\ &= \cos(2\pi\ f_0\ n\ T + 2\pi\ k\ \frac{1}{T}\ n\ T + \theta) \\ &= \cos(2\pi\ f_0\ n\ T + 2\pi\ k\ \ n + \theta) \\ &= \cos(2\pi\ f_0\ n\ T + \theta) \\ &= x[n] \end{aligned}$$

Ejemplo

$W = 2 * \pi * f \;:\; w_s > 2 * W \leftrightarrow T_s < 0.5$

$x(t) = 2\cos(2\pi t + \pi/4)$

(a) $T_s = 0.2$, (b) $T_s = 0.4$, (c) $T_s = 0.5$, and (d) $T_s = 1$



Transformada de Fourier de la señal muestreada I

Podemos analizar como es la transformada de Fourier de la secuencia de tiempo discreto $x[n]$. Denotaremos la frecuencia para la transformada de tiempo discreto como Ω. Sabemos que:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Por otro lado dado que $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$, tenemos que:

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega T n}$$

Vemos entonces que $X_p(j\omega) = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\omega T} = X(e^{j\omega T})$. De esta forma,

$$X(e^{j\omega T}) = X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$$

Y la transformada de la secuencia $x[n]$ se puede escribir como:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\Omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

Transformada de Fourier de la señal muestreada II

Vemos que la transformada de Fourier de $x[n]$ es periódica como debe ser y que está directamente relacionada con la transformada $X_c(j\omega)$ de la señal de tiempo continuo original $x_c(t)$. Está claro que si $X_c(j\omega) = 0 \ \forall |\omega| \geq W$ y $2W < \omega_s$ no tenemos aliasing y que

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} X_c\left(j\frac{\Omega}{T}\right), \Omega \in [-\pi, \pi)$$

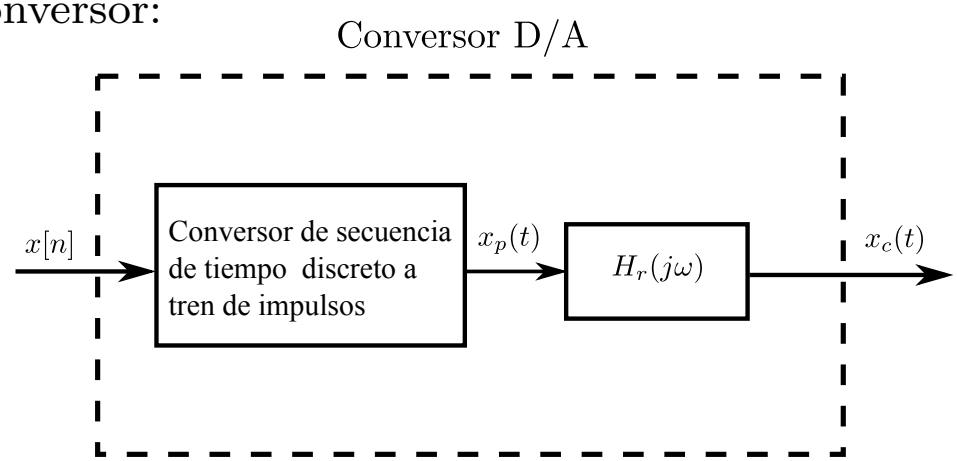
Cuando no hay aliasing, la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ es una versión escalada en frecuencia de $X_c(j\omega)$!! El factor de escala entre la frecuencia de tiempo continuo y la frecuencia de tiempo discreto esta dado por:

$$\omega = \frac{\Omega}{T}$$

Es claro que la frecuencia $\Omega = \pi$ en la secuencia $x[n]$ se corresponde a con la frecuencia $\frac{\omega_s}{2}$ en la señal de tiempo continuo $x_c(t)$. El escalado en frecuencia es básicamente una normalización del eje de frecuencias en la señal de tiempo continuo $x_c(t)$, tal que la componente de frecuencia más alta en dicha señal (captada por un muestreo sin aliasing) se refleja siempre en $\Omega = \pi$ para la señal de tiempo discreto.

Conversión D/A I

Es interesante analizar la reconstrucción de la señal $x_c(t)$ a partir de las muestras $x[n]$, cuando las mismas son pasadas por un conversor D/A. Sea $x_r(t)$ la señal a la salida de dicho conversor:



Tenemos entonces que $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$. De esta forma podemos escribir:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT)$$

Dado que

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

con $W \leq \omega_c \leq \omega_s - W$ es fácil verificar que:

$$h_r(t) = \frac{T\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

Conversión D/A II

De esta forma podemos escribir:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\omega_c T}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}(t - nT)\right)$$

La ecuación anterior se conoce normalmente como la ecuación de *interpolación de banda limitada* y muestra como usando las funciones sinc podemos reconstruir la señal original a través de sus muestras!!

Para mayor simplicidad de análisis consideremos el caso donde $\omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$. Entonces tenemos:

$$h_r(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

De esta forma la señal reconstruida es:

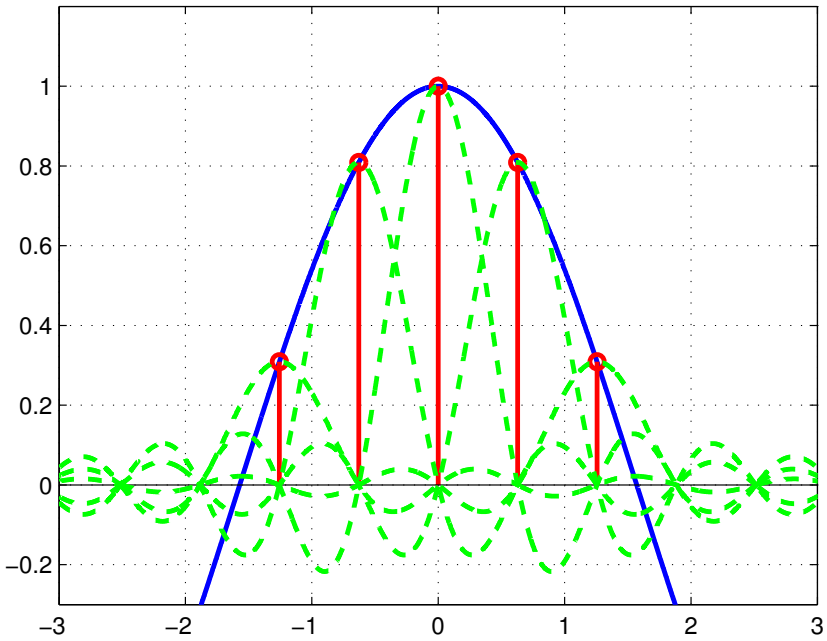
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\text{sinc}\left(\frac{1}{T}(t - nT)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\text{sinc}\left(\frac{1}{T}(t - nT)\right)$$

Notar que $h_r(0) = 1$ y que $h_r(nT) = 0$ para $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. De esta forma es claro que:

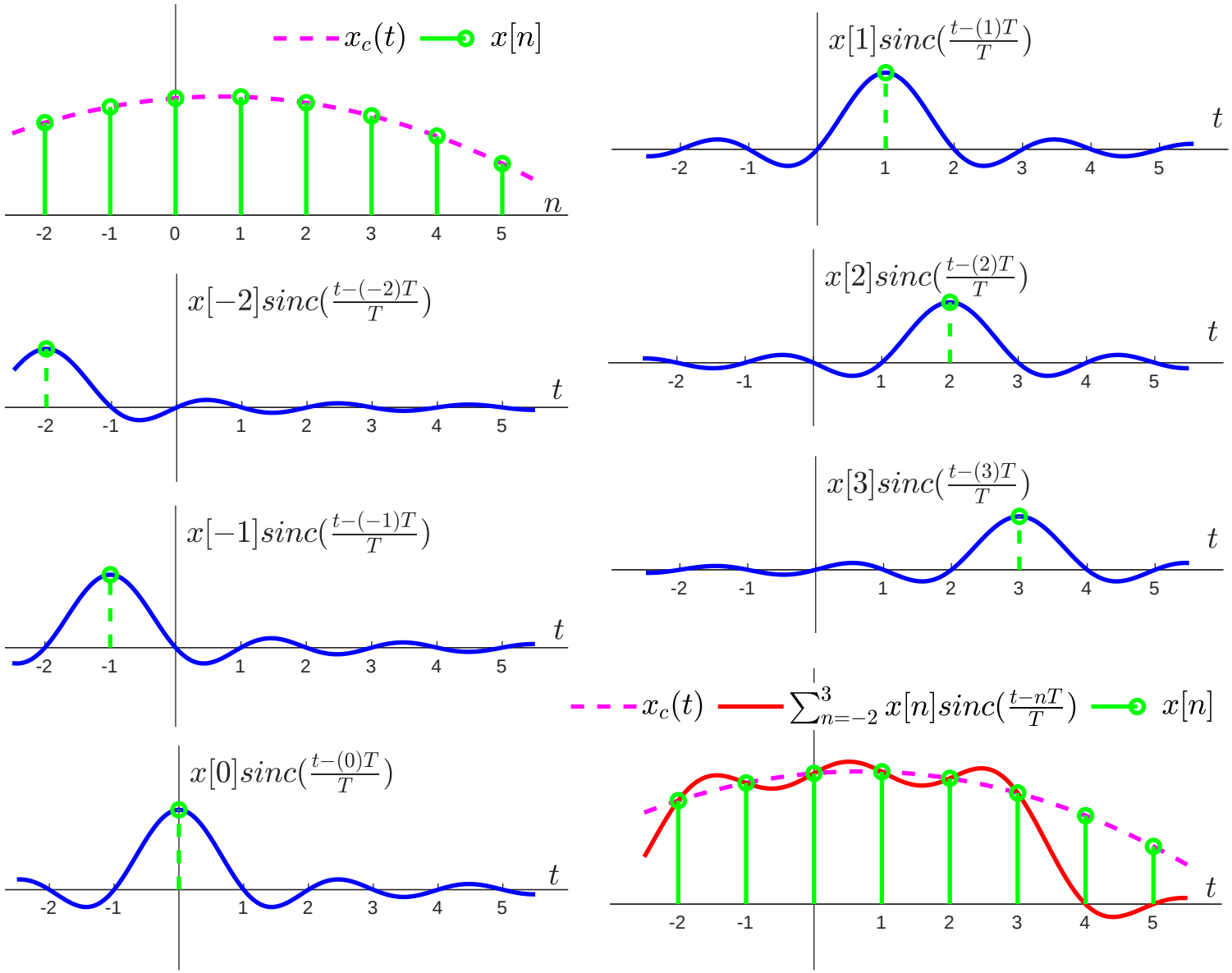
$$x_r(mT) = x_c(mT)$$

Conversión D/A III

Es más: por el análisis que hicimos en el dominio de la frecuencia tenemos que $x_r(t) = x_c(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$!! De esta forma con la hipótesis de que no hay aliasing la ecuación anterior da una forma alternativa de expresar la señal $x_c(t)$ en función de sus muestras a intervalos regulares de T!! La función sinc normalizada (que es la respuesta al impulso del filtro pasa-bajos ideal) *interpola* en forma perfecta entre los impulsos de $x_p(t)$ para reconstruir la señal de tiempo continuo original!! Este siempre será el caso con una señal de banda limitada con $\omega_s > 2W$ y $W \leq \omega_c \leq \omega_s - W$!!

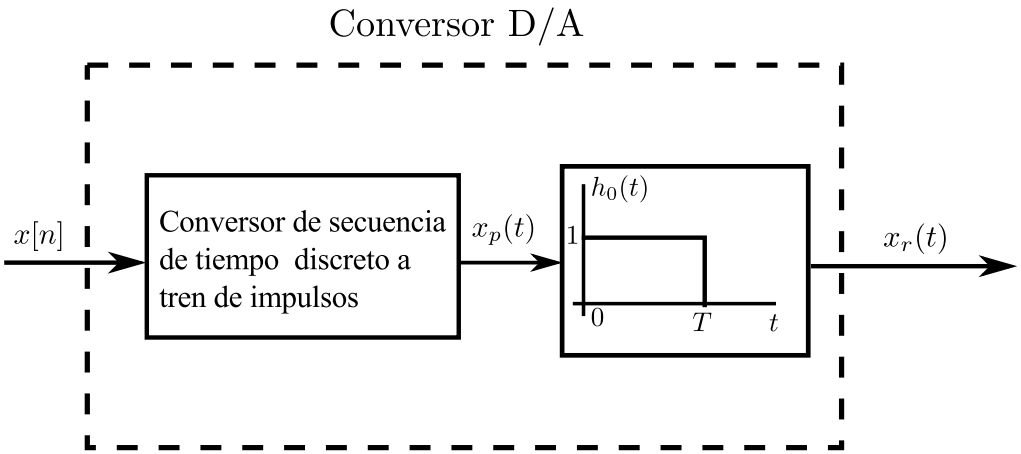


Conversión D/A IV



Conversión D/A V

Notar que el interpolador de banda limitada usa funciones sinc. Estas pueden ser muy complejas de implementar en la práctica.



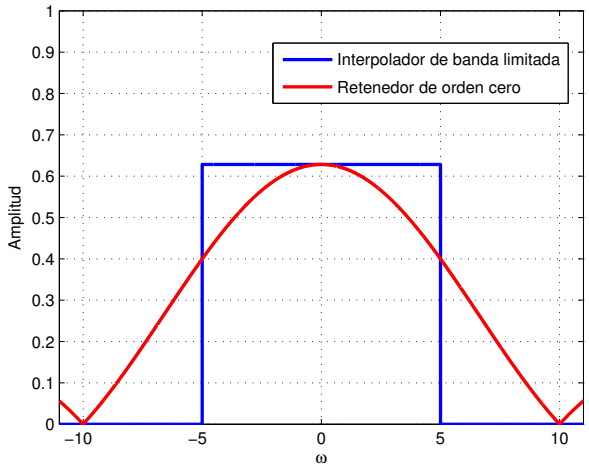
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[u(t - nT) - u(T - t + nT) \right]$$

$$\equiv x[n] \Big|_{n=\{t-T<nT<t\}}$$

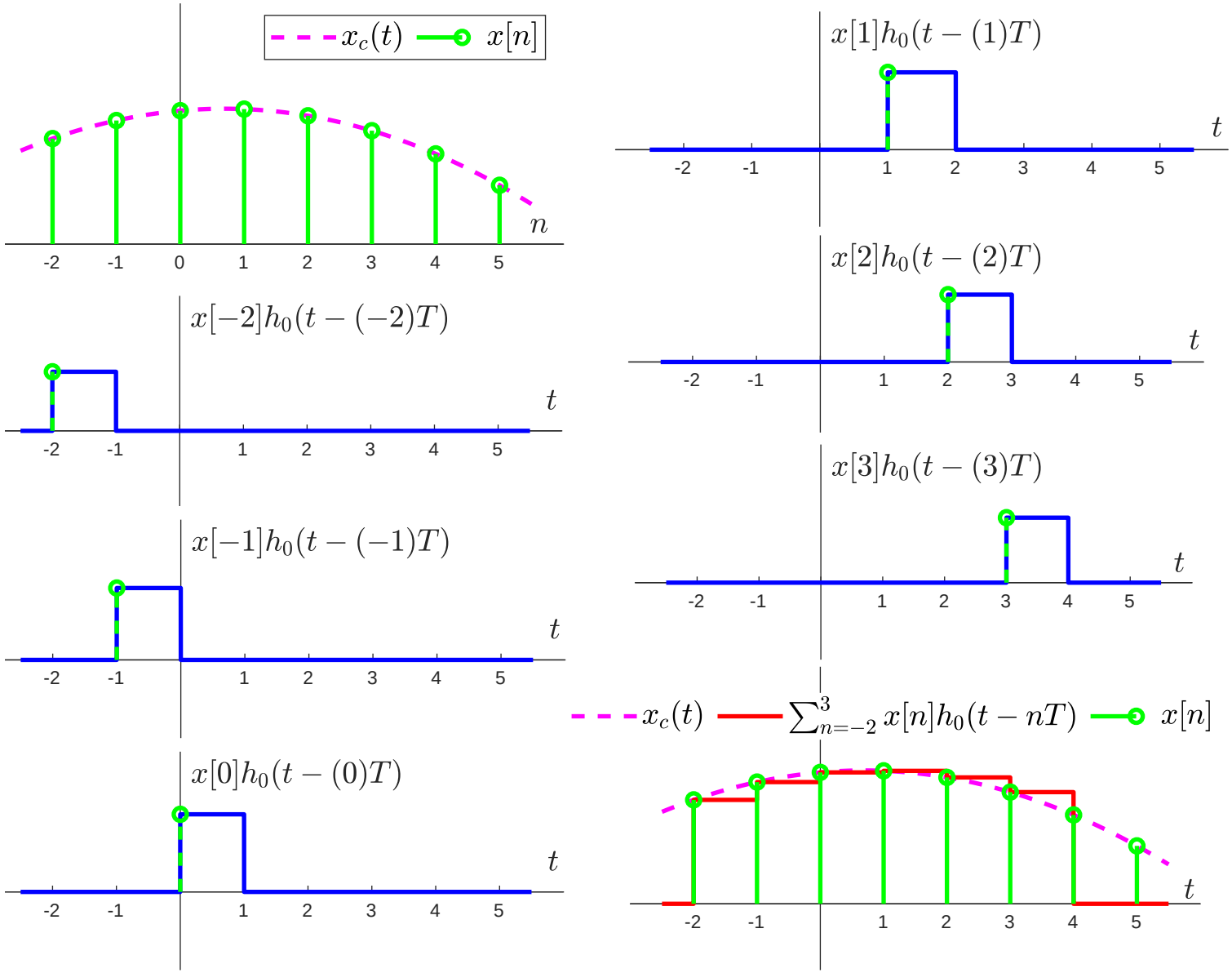
Es fácil probar que:

$$H_0(\omega) = T \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right) e^{-j\omega T/2}$$

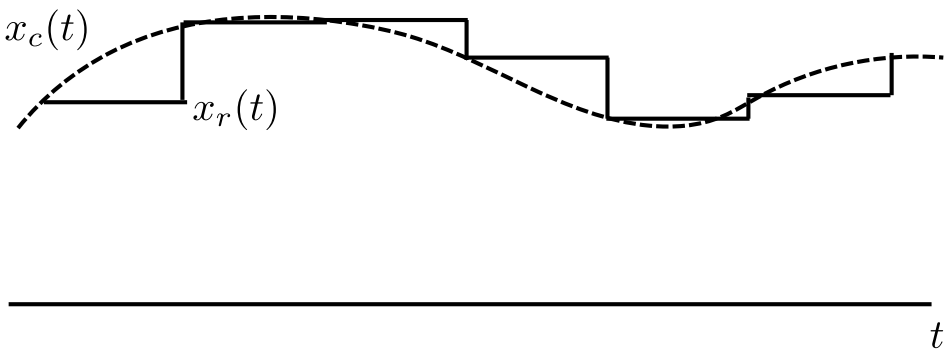


$\omega_s = 10$

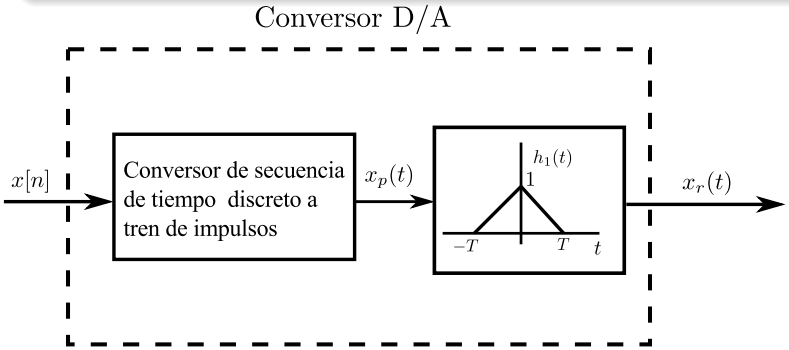
Conversión D/A VI



Conversión D/A VII



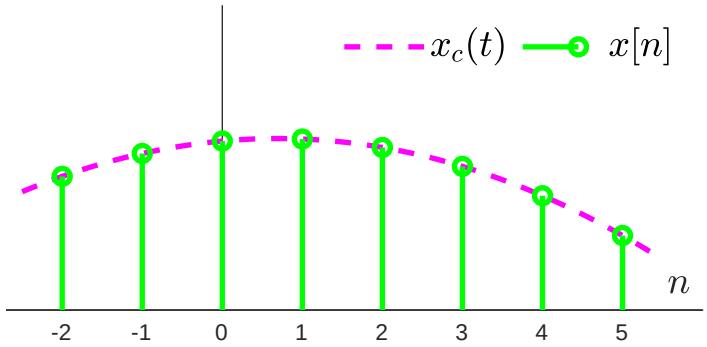
Claramente no tenemos reconstrucción perfecta!! Con este filtro no eliminamos las copias sucesivas del espectro original inducidas por el muestreo!! Es el costo que pagamos por trabajar con un filtro de reconstrucción más simple que el interpolador ideal!! No obstante si T es lo suficientemente grande la aproximación a la señal original puede ser suficiente para muchas aplicaciones. Los conversores D/A comerciales típicamente implementan un retenedor de orden 0 (aunque pueden aplicar algún tipo de compensación interna)!!

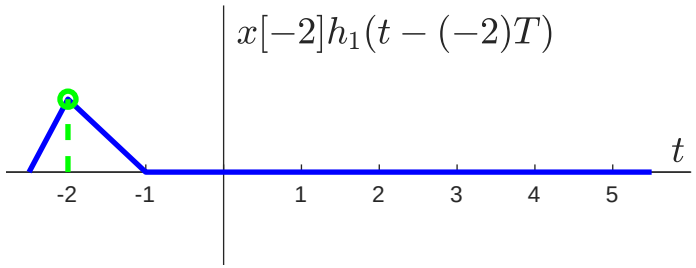


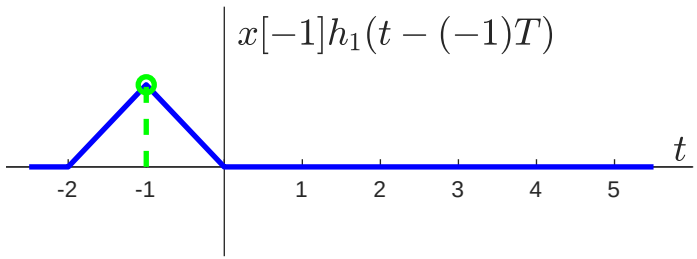
$$H_1(j\omega) = \frac{1}{T}\text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

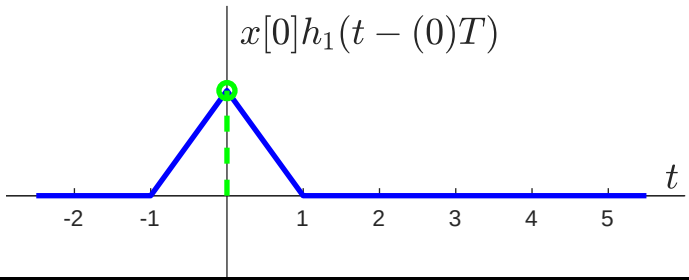
Este filtro es un interpolador lineal! También se lo conoce como retenedor de orden 1!!

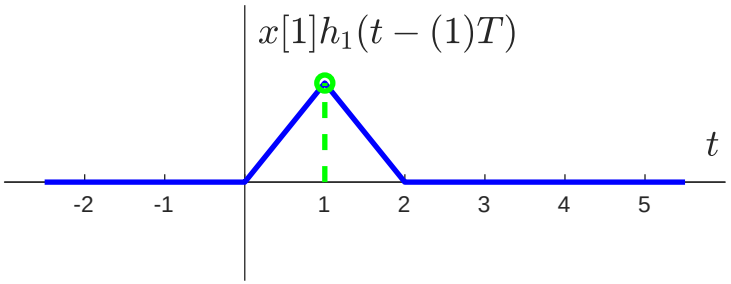
Conversión D/A VIII

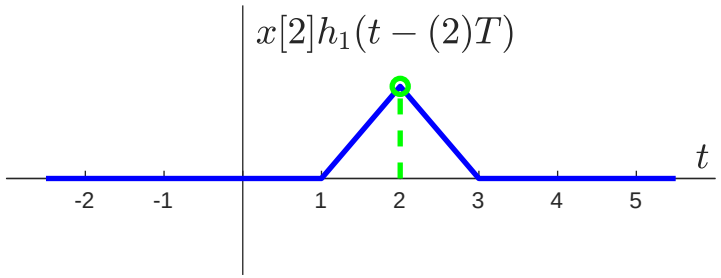


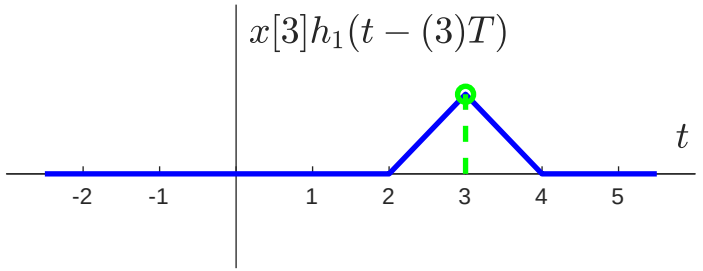


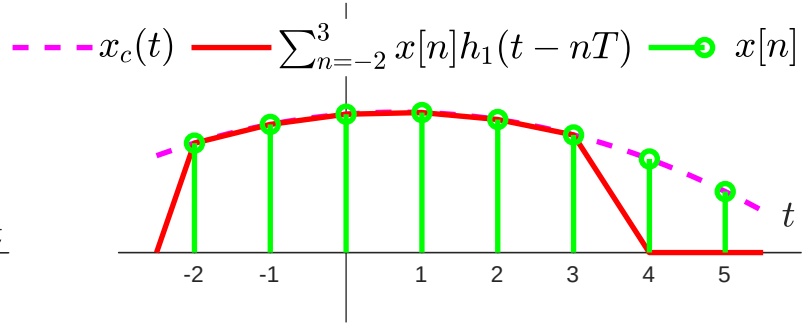








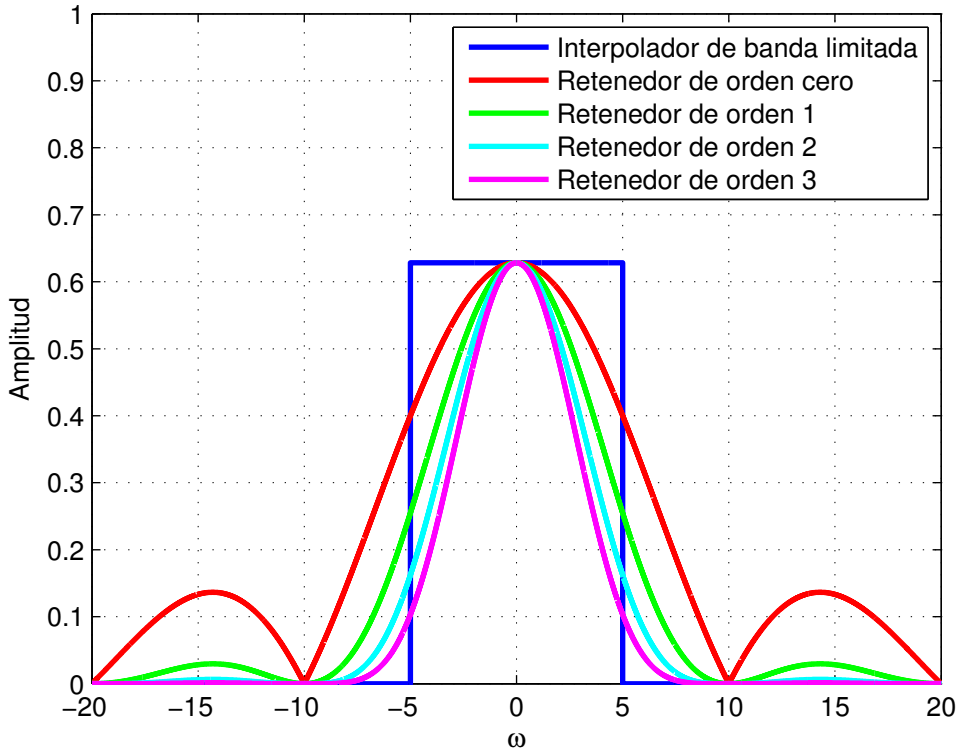




Conversión D/A IX

Podemos en general considerar los retenedores de orden k que proporcionaran para valores de k crecientes vada vez mejores aproximaciones a la señal de tiempo continuo original:

$$H_k(j\omega) = \frac{1}{T^{k-1}} \text{sinc}^k \left(\frac{\omega T}{2\pi} \right)$$



$\omega_s = 10$