

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

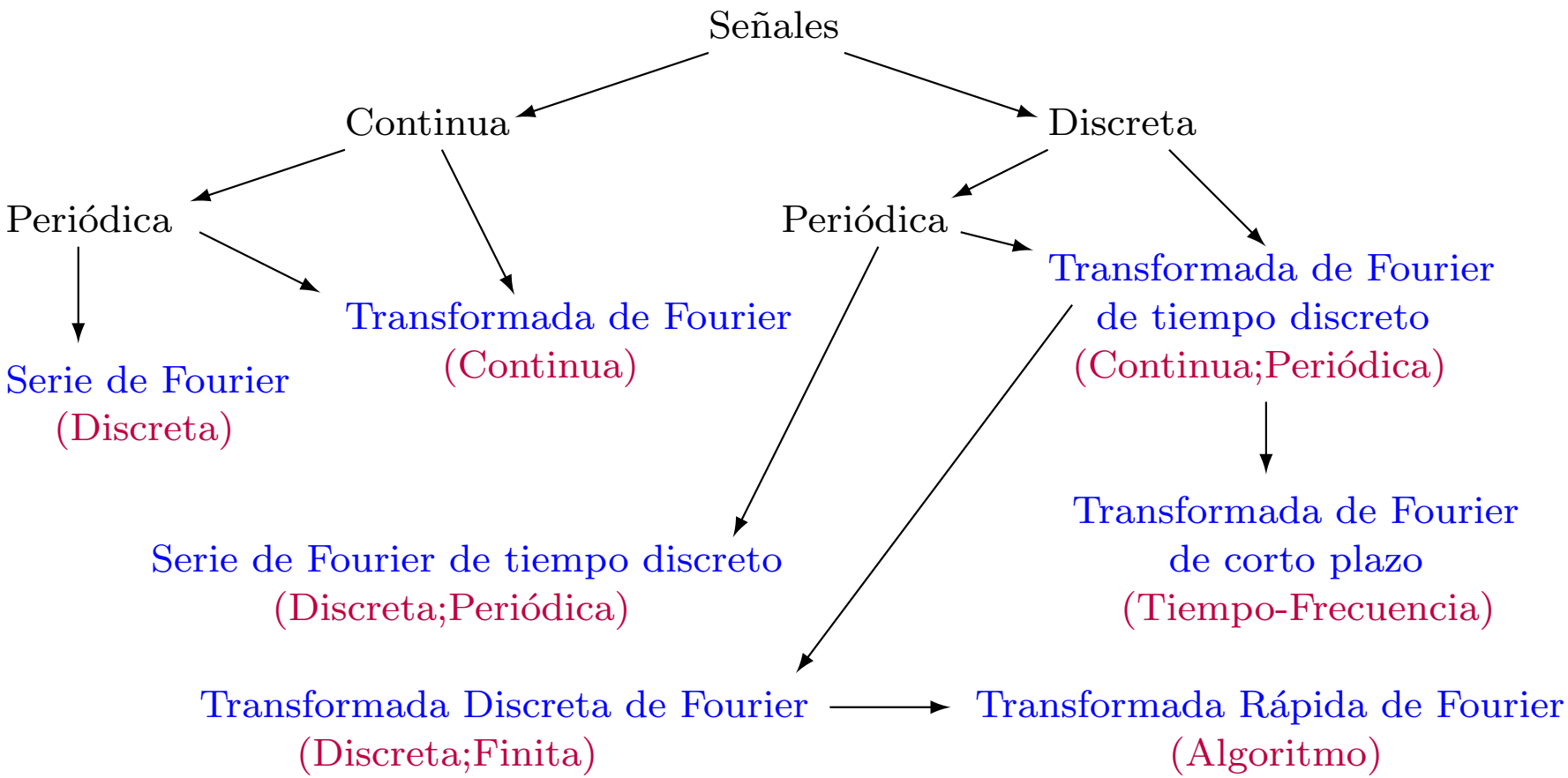
Dr. Ing. Pedro D. Arini
parini@fi.uba.ar

2do. cuatrimestre 2026

Resumen

1. Representación de señales de tiempo discreto
2. Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo discreto
3. Caracterización de sistemas LTI discretos a través de la transformada de Fourier

Análisis de Fourier



Transformada de Fourier en tiempo discreto

$$\mathcal{F}\{x[n]\} \equiv X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}, \ \Omega \in [-\pi, \pi)$$

La definición de $X(\Omega)$ tiene sentido siempre y cuando la sumatoria esté bien definida!! Es decir, debe existir para todo Ω y ser finita!! Esto por ejemplo se cumple si $x[n] \in l_1(\mathbb{Z})$.

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} \qquad x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}$$

Nuevamente, la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ se debe interpretar como un *operador* que mapea señales $x[n]$ en un determinado espacio vectorial y entrega señales $X(\Omega)$ en otro espacio vectorial donde podamos obtener caracterizaciones útiles de la señal original. Será de interés asegurar que dicho operador sea invertible. Esto es que podamos encontrar un operador $\mathcal{F}^{-1}$ que dada la transformada de Fourier $X(\Omega)$ nos permita recuperar la señal original $x[n]$!

Notar que hemos definido la transformada para $\Omega \in [-\pi, \pi)$. Esto es así por que en caso discreto la transformada de Fourier es claramente una función periódica por lo que podemos restringir el análisis de $X(\Omega)$ a dicho intervalo!! En general podemos definir la variación en Ω en cualquier conjunto $B \in \mathbb{R}$ con largo 2π!!

Transformada inversa de Fourier en tiempo discreto

La *anti-transformada* de Fourier $\hat{x}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}$ se define como:

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega, \quad n \in \mathbb{Z}$$

siempre que la integral esté bien definida.

Notar que por ser $X(\Omega)$ periódica la integral se puede hacer sobre cualquier intervalo $B \in \mathbb{R}$ de largo 2π. Como siempre nuestro interés estará en poder recuperar $x[n]$, con lo cual desearíamos que $\hat{x}[n] = x[n]$.

$$\begin{aligned}
\hat{x}[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}\right)e^{j\Omega n}d\Omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(n-k)}d\Omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega n}e^{-j\Omega k}d\Omega \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \\
&= x[n]
\end{aligned}$$

Vemos que si la transformada de Fourier $X(\Omega)$ está bien definida es siempre posible volver a recuperar $x[n]$!! Notar el contraste con el caso de la transformada de Fourier de tiempo continuo!! Esto se debe a que la integral de la anti-transformada es sobre un intervalo finito, con lo cual no hay problemas de convergencia.

Es de esperar entonces que tampoco observemos el fenómeno de Gibbs que teníamos para la serie y transformada de Fourier de tiempo continuo!!

Tenemos también el siguiente resultado

Teorema

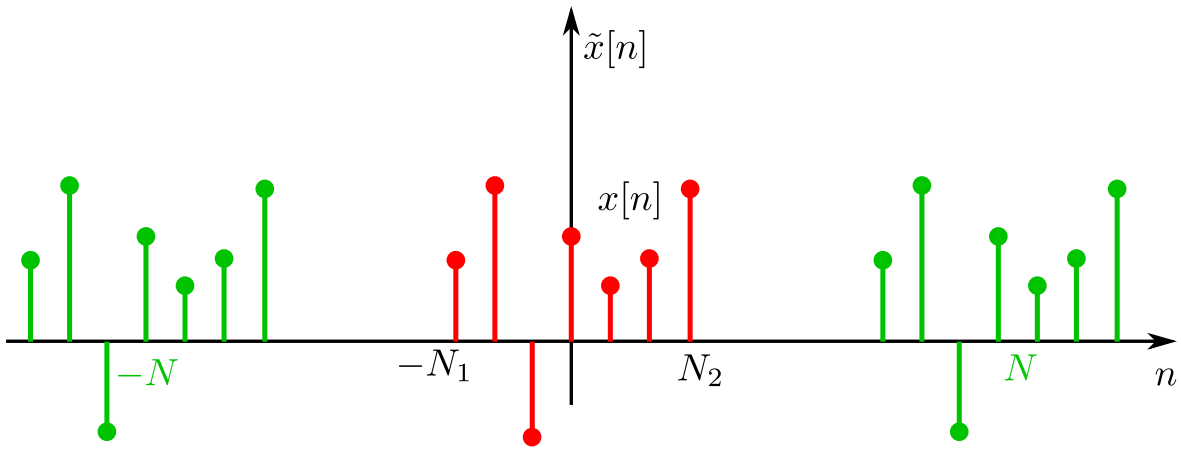
Sobre el espacio $l_2(\mathbb{Z})$ el operador $x[n] \to \mathcal{F}\{x[n]\}$ es biyectivo. Es decir, si $\mathcal{F}\{x_1[n]\} = \mathcal{F}\{x_2[n]\}$ (en el sentido cuadrático en $L_2([-\pi, \pi))$) entonces $x_1[n] = x_2[n]$. Además para cada $x[n] \in l_2(\mathbb{Z})$ existe su transformada de Fourier $X(\Omega) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\}$ la cual es de energía finita. Así mismo para cada señal $X(\Omega) \in L_2([-\pi, \pi))$ existe $x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}$ también de energía finita. Además se cumple la relación de Parseval:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

TFTD desde la SFTD

De la misma forma que hicimos para la transformada de Fourier de tiempo continuo veamos como podemos obtener la transformada de tiempo discreto a partir de la serie de Fourier. Sea $x[n]$ una señal no periódica que es cero para $n < -N_1$ y $n > N_2$.

Sin embargo podemos construir una señal periódica $\tilde{x}[n]$ con periodo $N > N_1 + N_2$, de forma tal que en cada periodo tengamos $x[n]$.



Podemos calcular la serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$!!

TFTD desde la SFTD

Tenemos que:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}, \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} \tilde{x}[k] e^{-jk\Omega_0 n}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Pero cuando $-N_1 < n < N_2$, tenemos que $\tilde{x}[n] = x[n]$. Además para n fuera de ese rango tenemos que $x[n] = 0$. Entonces podemos escribir:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[k] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Con $X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\Omega k}$ podemos escribir:

$$a_k = \frac{1}{N} X(\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0} = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$$

Entonces podemos escribir:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(k\omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$

TFTD desde la SFTD

Cuando $N \to \infty$ tenemos que $\tilde{x}[n] \to x[n]\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Además $\omega_0 \to 0$. El lado derecho de la última ecuación se "convierte" en una integral:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Mientras por medio de la serie de Fourier podemos representar una señal periódica a través de una superposición de exponenciales con armónicos en un conjunto discreto, a través de la transformada de Fourier podemos representar una señal no periódica como una "superposición" de exponenciales cuyos armónicos forman un continuo en el intervalo $[-\pi, \pi)$!!

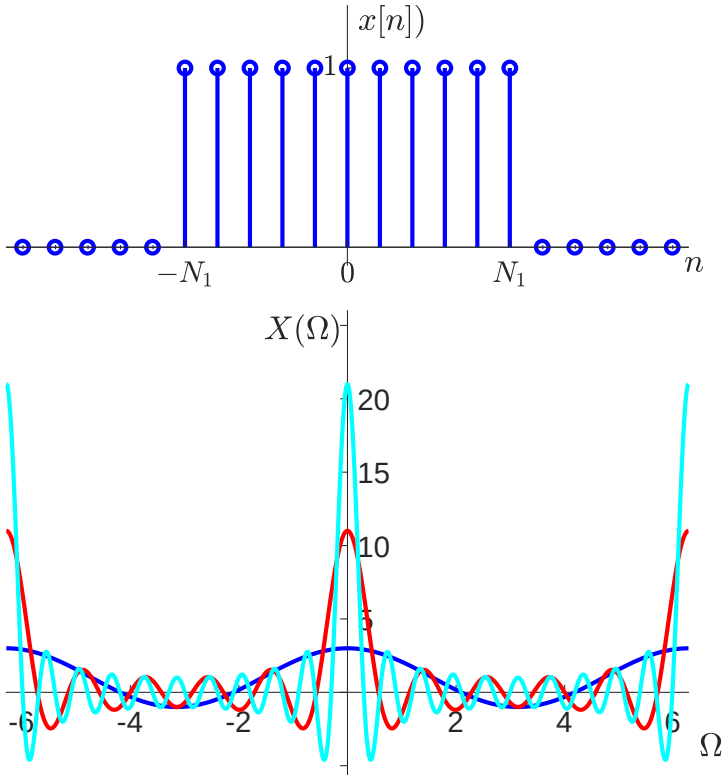
Notar que podemos recorrer el camino inverso: partimos de una señal periódica $\tilde{x}[n]$, la cual es igual a $x[n]$ en un período. Es claro que podemos recuperar los coeficientes de Fourier de $\tilde{x}[n]$ a través de un "muestreo" equiespaciado de la transformada de Fourier $X(\Omega)$ de $x[n]$:

$$a_k = \frac{1}{N} X(\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0}$$

Ejemplo: Pulso rectangular

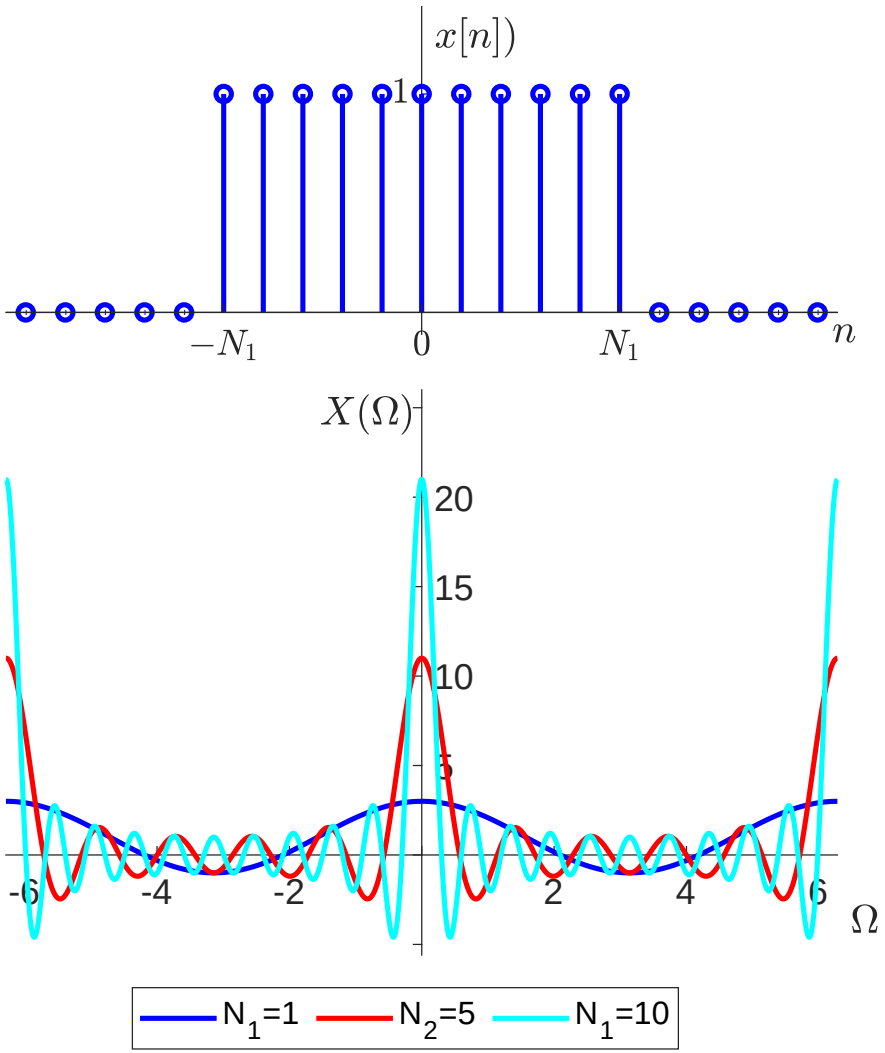
$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{k=0}^{2N_1} e^{-j\Omega(k+N_1)} \\ &= e^{j\Omega N_1} \sum_{k=0}^{2N_1} e^{-jk\Omega} \\ &= e^{j\Omega N_1} \frac{1 - e^{-j\Omega(2N_1+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} \\ &= e^{j\Omega N_1} \frac{e^{-j\Omega\frac{2N_1+1}{2}}}{e^{-j\Omega\frac{1}{2}}} \frac{e^{j\Omega\frac{2N_1+1}{2}} - e^{-j\Omega\frac{2N_1+1}{2}}}{e^{j\Omega\frac{1}{2}} - e^{-j\Omega\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(\Omega(N_1 + 1/2)\right)}{\sin\left(\Omega/2\right)} \end{aligned}$$



Este es el equivalente discreto de la función sinc en tiempo continuo. Vemos que aquí también tenemos el comportamiento dual entre tiempo y frecuencia.

Ejemplo: Pulso rectangular



Ejemplo: Sinc

Consideremos

$$x[n] = \frac{\sin(nT_1)}{\pi n},\ n \in \mathbb{Z},\quad T_1 \leq \pi$$

Podemos ver por dualidad cual es la transformada de Fourier de esta secuencia. Sabemos que para la siguiente función periódica con periódo 2π:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq \pi \end{cases}$$

los coeficientes de Fourier valen $a_n = \frac{\sin(nT_1)}{\pi n}$ y $\Omega_0 = 1$. Entonces $a_n = x[n]$. Sabemos que:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jnt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} e^{-jnt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{-jnt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jnt}$$

Reemplazando Ω por t probamos que $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & T_1 < |t| \leq \pi \end{cases}$$

Ejemplo: $\delta[n]$

Sea $x[n] = \delta[n]$. Podemos verificar que:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1$$

Tal como en el caso de tiempo continuo tenemos que el impulso está generado por una superposición en fase de un continuo de armónicas de la misma amplitud!! En este caso, dada las características especiales de las exponenciales de tiempo discreto el continuo de armónicas a utilizar pertenece al conjunto acotado $[-\pi, \pi)$.

Es inmediato verificar que:

$$\delta[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\Omega n) d\Omega$$

Ejemplo: Antitransformada de un tren de impulsos

Sea $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$ con $|\Omega_0| \leq \pi$. Claramente esto es periódico con período 2π. (Tener en cuenta que estamos considerando los impulsos unitarios de tiempo continuo!!). Podemos tratar de determinar $x[n]$. Para ello:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)\right)e^{j\Omega n}d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)e^{j\Omega n}d\Omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\Omega - \Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega \\ &= e^{j\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Tenemos que $$\mathcal{F}\left\{e^{j\Omega_0 n}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k), \quad |\Omega_0| \leq \pi$$

Qué hubiera pasado si en lugar de integrar entre $-\pi$ y π hubiéramos integrado entre $-\pi + 2\pi p$ y $\pi + 2\pi p$??

Ejemplo: señal periódica

Una señal $x[n]$ periódica con periodo N se puede escribir de acuerdo a su serie de Fourier como:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x[n]\} &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \mathcal{F}\left\{e^{jk\Omega_0 n}\right\} \\
&= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{p=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi p) \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}(k + Np)\right) \\
&= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_{k+Np} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}(k + Np)\right)
\end{aligned}$$

donde hemos usado que los coeficientes de Fourier de una secuencia discreta periódica forman una secuencia periódica también.

Ejemplo: señal periódica

Notar que cuando $k = \langle N \rangle$ y $-\infty < p < \infty$ tenemos que $l = k + Np$ varía de $-\infty$ a ∞. Entonces podemos escribir:

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_l \delta\left(\Omega - \frac{2\pi l}{N}\right)$$

En la expresión anterior estamos usando no sólo los coeficientes de Fourier en un período de largo N, sino todos ellos!! O sea la secuencia periódica completa!!!

La transformada de Fourier de tiempo discreto para secuencias periódicas es una sucesión infinita de impulsos unitarios posicionados en las armónicas que componen dichas secuencias y pesados por los correspondientes coeficientes de Fourier!!

Propiedades de la transformada de tiempo discreto

Vamos a asumir que todas las señales involucradas tiene bien definida su transformada de Fourier.

- **Linealidad**: Sean $x[n]$ e $y[n]$ funciones tales que $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $Y(\Omega) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}[ax[n] + by[n]] = aX(\Omega) + bY(\Omega), \quad a, b \in \mathbb{C}$$

- **Desplazamiento temporal y en frecuencia**: Sea $x[n]$ tal que $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$. Entonces valen:

$$\mathcal{F}\{x[n - n_0]\} = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega), \ n_0 \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{F}\left\{e^{j\Omega_0 n} x[n]\right\} = X(\Omega - \Omega_0)), \quad \Omega_0 \in [-\pi, \pi)$$

Ejemplo

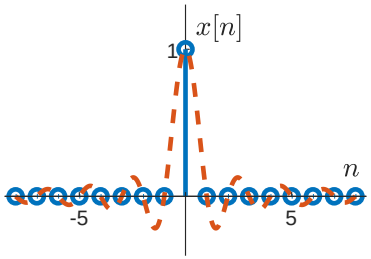
$$x[n] = \delta[n] \Leftrightarrow X(\Omega) = 1$$

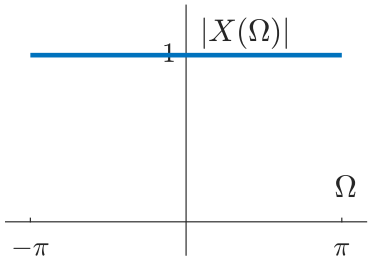
$$Y(\Omega) = X(\Omega)\, e^{-jm\Omega} \quad m \in \mathbb{R}$$

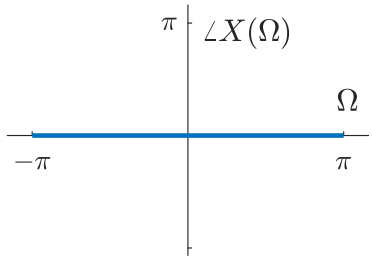
$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\, e^{-jm\Omega} e^{jn\Omega} d\Omega$$

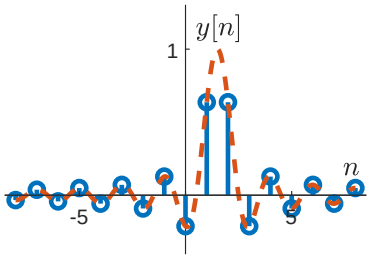
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}}{j(n-m)} \right)$$

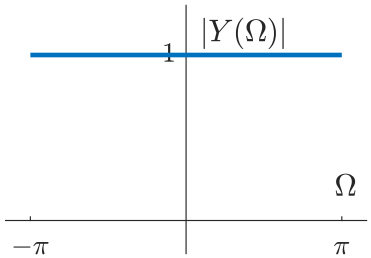
$$= sinc(n-m)$$

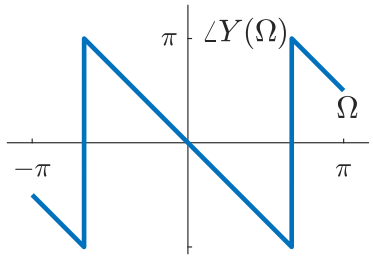












Propiedades de la transformada de tiempo discreto

Conjugación y simetría:

- Si $x[n] \in \mathbb{R} \Rightarrow X(\Omega) = X^*(-\Omega)$ y $|X(\Omega)|$ es par y $\angle X(\Omega)$ es impar.
- Si $x[n]$ es imaginaria $\Rightarrow X(\Omega) = -X^*(-\Omega)$ y $|X(\Omega)|$ es impar y $\angle X(\Omega)$ es par.
- Si $y[n] = Re\{x[n]\} = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x^*[n] \Rightarrow Y(\Omega) = \frac{1}{2}X(\Omega) + \frac{1}{2}X^*(-\Omega)$.
- Si $y[n] = Im\{x[n]\} = \frac{1}{2j}x[n] - \frac{1}{2j}x^*[n] \Rightarrow Y(\Omega) = \frac{1}{2j}X(\Omega) - \frac{1}{2j}X^*(-\Omega)$.
- Si $x[n]$ es par, entonces $X(\Omega)$ par.
- Si $x[n]$ es impar, entonces $X(\Omega)$ impar.
- Si $y[n] = x_{par}[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[-n] \Rightarrow Y(\Omega) = X_{par}(\Omega) = \frac{1}{2}X(\Omega) + \frac{1}{2}X^(-\Omega)$.
- Si $y[n] = x_{impar}[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[-n] \Rightarrow Y(\Omega) = X_{impar}(\Omega) = \frac{1}{2}X(\Omega) - \frac{1}{2}X(-\Omega)$.

Propiedades de la transformada de tiempo discreto

- **Diferencia y acumulación**: Sea $x[n]$ tal que $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$. Entonces valen:

$$\mathcal{F}\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$$

Si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = 0$ tenemos que:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right\} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega)$$

El caso para el que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \neq 0$ se modifica como:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right\} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

Propiedades de la transformada de tiempo discreto

- **Convolución**: Sea $x[n]$ tal que $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $y[n]$ tal que $Y(\Omega) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Sea $z[n] = x[n] * y[n]$. Tenemos:

$$\mathcal{F}\{z[n]\} = X(\Omega)Y(\Omega)$$

Demostración: Podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[z(t)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]\right)e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]e^{-j\Omega n}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]Y(\Omega)e^{-j\Omega k} \\
&= X(\Omega)Y(\Omega)
\end{aligned}$$

Esta propiedad es análoga al caso continuo!! Nos será de mucha utilidad para analizar sistemas LTI en tiempo discreto!!

Propiedades de la transformada de tiempo discreto

- **Multiplicación**: Sea $x[n]$ tal que $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $y[n]$ tal que $Y(\Omega) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Sea $z[n] = x[n]y[n]$. Tenemos:

$$\mathcal{F}\{z[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\nu)Y(\Omega-\nu)d\nu$$

Demostración:

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\nu)e^{j\nu n}d\nu\right\}e^{-j\Omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\nu)\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j(\Omega-\nu)n}\right\}d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\nu)Y(\Omega-\nu))d\nu \end{aligned}$$

La convolución periódica se puede realizar en cualquier intervalo de longitud 2π!! Notar la diferencia con la convolución tradicional o *aperiódica*!! Cuando estudiemos el tema de filtros digitales veremos que esta propiedad tendrá mucha utilidad!!

Sistemas LTI discretos y TFTD

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI en tiempo discreto se definió como:

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

donde $h[n]$ es la respuesta al impulso del sistema. Por la propiedad de convolución la salida $y[n]$ a una entrada $x[n]$ se puede escribir como:

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

La ecuación anterior caracteriza, así como lo hacía la suma de convolución, en forma completa la acción de un sistema LTI de tiempo discreto!! Esto es así porque, según lo que discutimos previamente, siempre podemos volver del campo transformado al dominio del tiempo gracias a la invertibilidad de la transformada de Fourier!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier II

En lo anterior hemos supuesto que la respuesta en frecuencia existe. Es decir que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso debe estar bien definida. Sin embargo, esto no es un problema para los sistemas LTI estables:

Teorema

La respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ de un sistema LTI de tiempo discreto estable siempre existe.

Demostración: Dado que el sistema es estable tenemos que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$. Pero entonces podemos escribir:

$$|H(\Omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Lo que muestra que la respuesta en frecuencia está bien definida.

Nuestro interés en analizar sistemas LTI mediante la transformada de Fourier siempre estará en aquellos que son estables!! Para analizar sistemas LTI inestables de tiempo discreto utilizaremos más adelante la transformada Z!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier III

Muchos sistemas LTI causales (con la condición de reposo inicial discutida hace unas clases) van a estar descriptos por una ecuación en diferencias con coeficientes constantes:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Si aplicamos el operador $\mathcal{F}\{\cdot\}$ a ambos lados obtenemos (aplicando linealidad):

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\{x[n-k]\}$$

Usando la propiedad de diferenciación:

$$Y(\Omega) \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\Omega k} = X(\Omega) \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\Omega k}$$

Para un sistema LTI tenemos que

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega), \quad H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier IV

La respuesta en frecuencia se puede escribir entonces como un cociente de polinomios trigonométricos:

$$H(\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\Omega k}}$$

- Vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es un cociente de polinomios, los cuales se obtienen por inspección a través de los coeficientes de la ecuación en diferencias!
- De una ecuación en diferencias pasamos a una expresión equivalente del sistema totalmente algebraica. Todo queda definido por los coeficientes de los polinomios o por lo que es los mismo por sus raíces. Esto simplifica mucho el análisis de los sistemas LTI de tiempo discreto!
- Podemos obtener la respuesta al impulso del sistema, en lugar de resolviendo la ecuación en diferencias, antitransformando $H(\Omega)$! Nuevamente y como en el caso de tiempo continuo, el método de fracciones simples puede ser muy útil!!

Serie Fourier de tiempo continuo:

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$, síntesis

$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$, análisis

Transformada Fourier de tiempo continuo:

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, síntesis

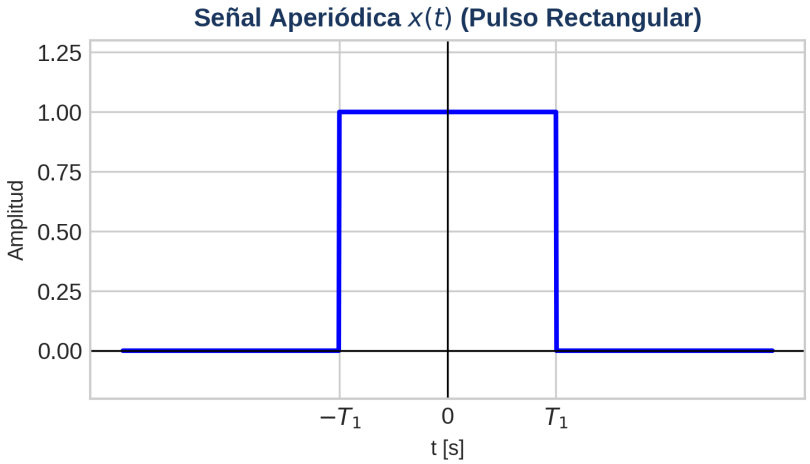
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$, análisis

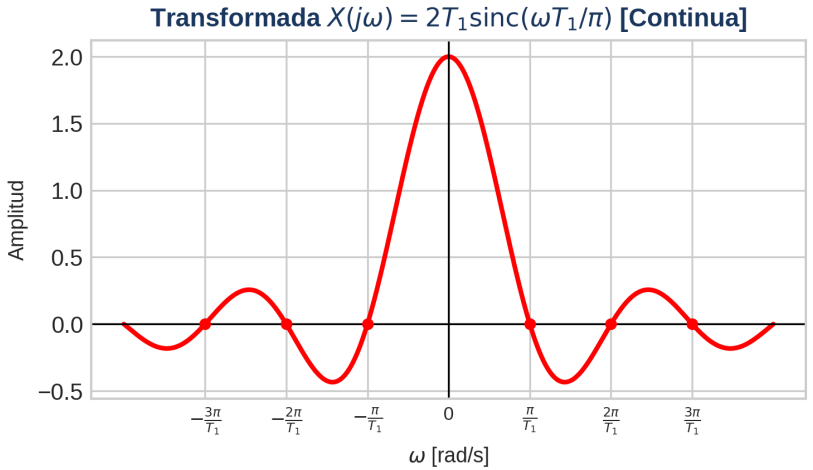
Tiempo Continuo

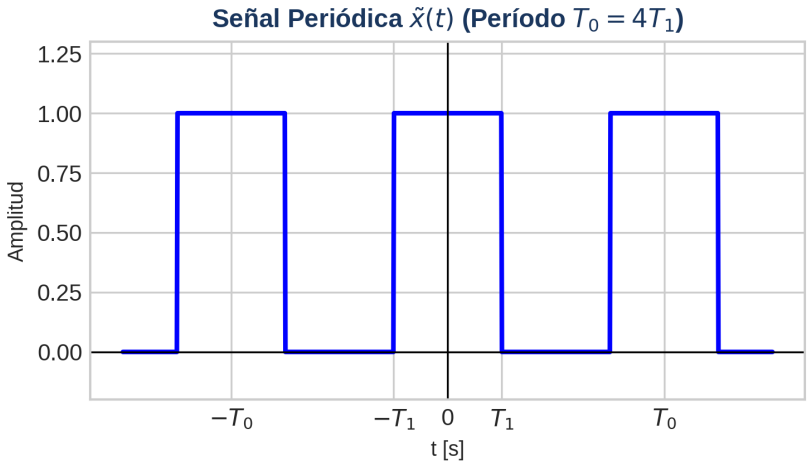
Pulso Rectangular de ancho $2T_1$ y período T_0:

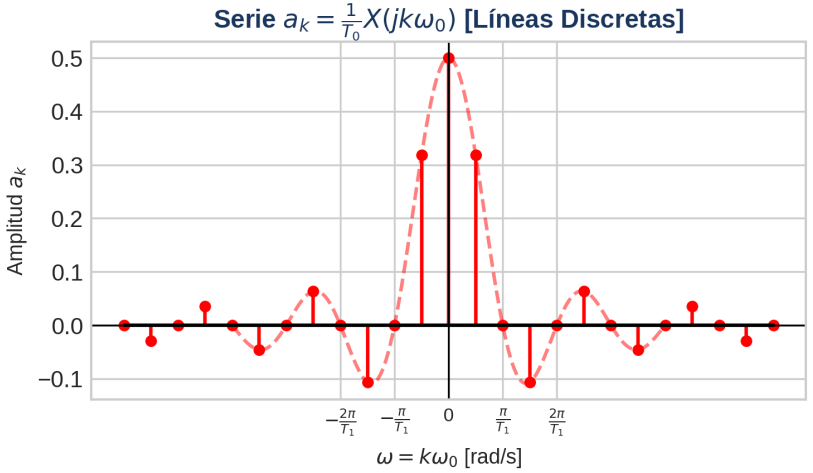
- **Transformada:** $X(j\omega) = 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$
  - máximo $(\omega = 0)$: $X(j0) = 2T_1$
  - cruces por cero: $\omega = \pm\frac{\pi}{T_1}, \pm\frac{2\pi}{T_1}, \pm\frac{3\pi}{T_1}, \ldots$
- **Serie:** $a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0})$
  - máximo $(k = 0)$: $a_0 = \frac{2T_1}{T_0}$
  - cruces por cero: $k\omega_0 = \pm\frac{\pi}{T_1}, \pm\frac{2\pi}{T_1}, \ldots$

Tiempo Continuo: Serie (CTFS) vs. Transformada (CTFT)









Serie Fourier de tiempo discreto:
$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}$, síntesis
$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$, análisis

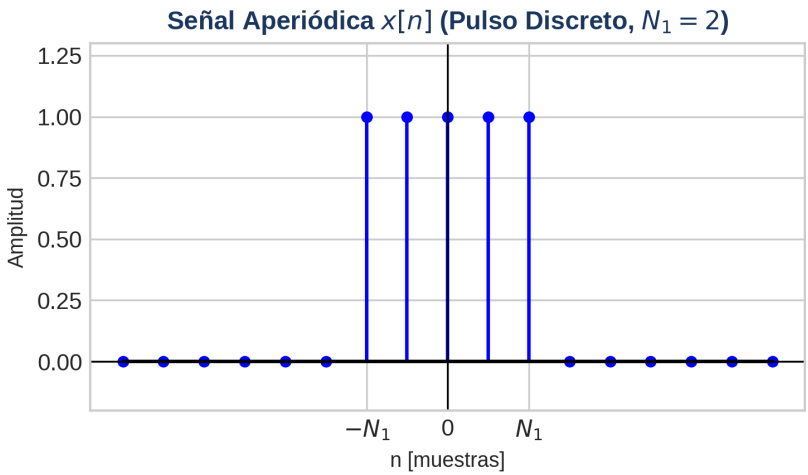
Transformada Fourier de tiempo discreto:
$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$, síntesis
$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$, análisis

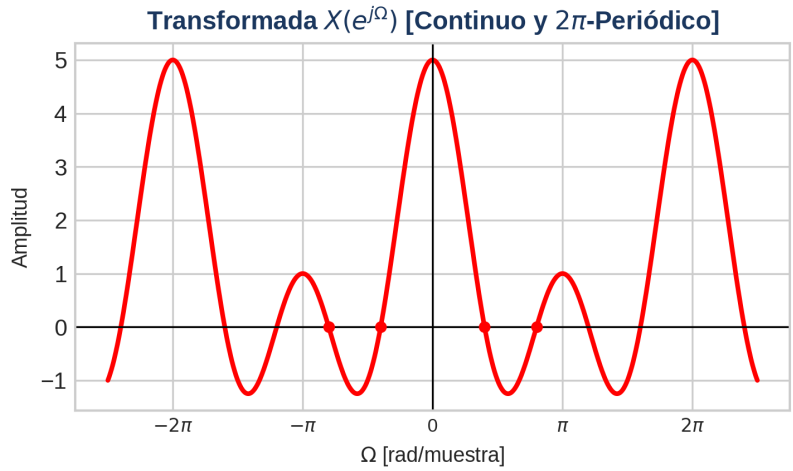
Tiempo Discreto

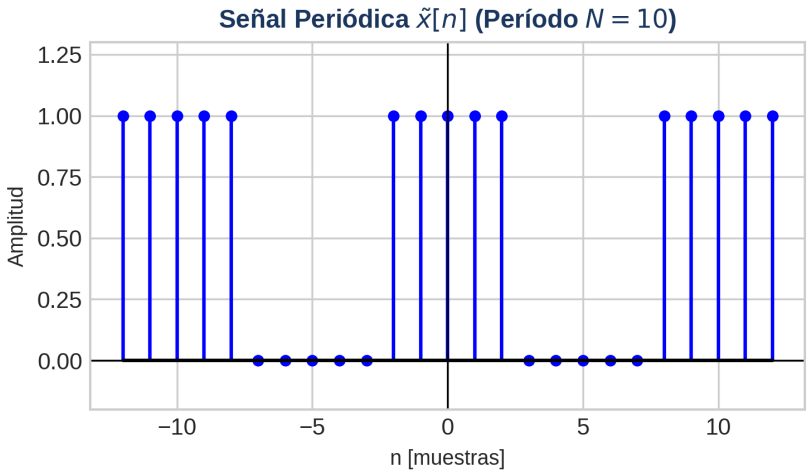
Pulso Discreto de ancho $2N_1 + 1$ y período N:

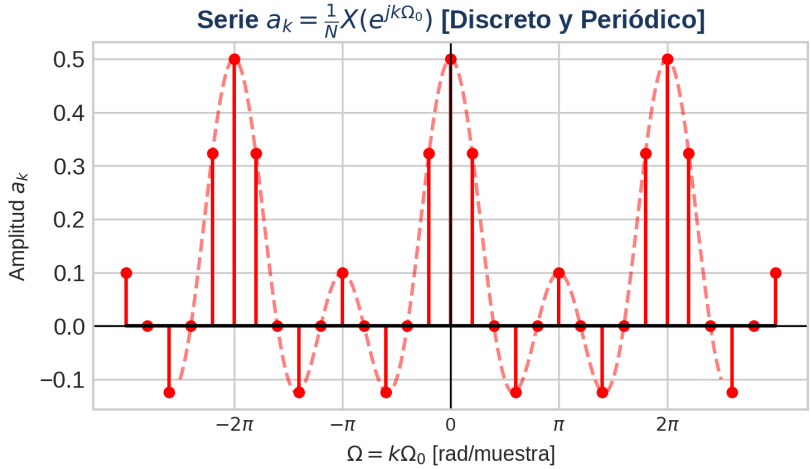
- Transformada (DTFT): $X(e^{j\Omega}) = \frac{\sin(\Omega(N_1+1/2))}{\sin(\Omega/2)}$
  - máximo($\Omega = 0$): $X(e^{j0}) = 2N_1 + 1$
  - cruces por cero en $[-\pi, \pi]$: $\Omega = \pm \frac{2\pi m}{2N_1+1} \quad (m \neq 0)$
- Serie (DTFS): $a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin(k\Omega_0(N_1+1/2))}{\sin(k\Omega_0/2)} \quad (\Omega_0 = \frac{2\pi}{N})$
  - máximo($k = 0$): $a_0 = \frac{2N_1+1}{N}$
  - cruces por cero: $k\Omega_0 = \pm \frac{2\pi m}{2N_1+1}$

Tiempo Discreto: Serie (DTFS) vs. Transformada (DTFT)









Filtros

- Podemos tener filtros en tiempo discreto. Los mismos se denominarán filtros digitales, y son una forma ecónomica y técnicamente eficiente de realizar operaciones de filtrado para señales continuas (previa una etapa de muestreo). Los mismos en general estarán especificados en el campo de la frecuencia a través de una función $H(\Omega)$ adecuada.
- Los problemas asociados a filtros digitales ideales son similares a los correspondientes en los filtros de tiempo continuo. Haremos un análisis más detallado de los mismos más adelante en el curso.
- Los conceptos de distorsión de amplitud y distorsión de fase siguen valiendo para los sistemas de tiempo discreto. También el concepto de retardo de grupo. Veremos un poco más sobre ellos cuando abordemos las técnicas de diseño de filtros digitales.

Repaso...

- Periodo fundamental (T) o (N). Definido para señales periódicas, es el periodo más pequeño con respecto al cual se repite una señal periódica. Para señales periódicas en tiempo continuo el periodo fundamental es T en segundos, mientras que para señales en tiempo discreto el periodo fundamental es N en muestras.
- Frecuencia analógica (f o ω). Representa un número de ocurrencias de un evento repetitivo por unidad de tiempo. Para señales sinusoidales, la frecuencia lineal, f, se mide en ciclos por segundo (o Hz), mientras que la frecuencia angular ($\omega = 2\pi f$), se mide en radianes por segundo.
- Frecuencia fundamental (f_0). Definida para señales periódicas, es el recíproco del periodo fundamental (T). Para señales periódicas de tiempo continuo se denota por $f_0 = \frac{1}{T}$ en ciclos por segundo, mientras que para señales de tiempo discreto se denota por $f_0 = \frac{1}{N}$ en ciclos por muestra.
- Frecuencias armónicas o armónicas. Frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.
- Armónico fundamental ($e^{-j\omega_0}$). El exponencial complejo (o sinusoide) asociado con el período fundamental en un conjunto de exponenciales complejos armónicamente relacionados.

Repaso...

- Condiciones de Dirichlet. Requisitos de deben cumplir las señales para determinar la existencia de sus series de Fourier o de sus transformadas, en tiempo continuo o discreto.
- Serie de Fourier (SF) de tiempo continuo. Expresa una señal periódica de tiempo continuo $x(t)$ como una suma de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) en los armónicos $k\omega_0$ de la frecuencia fundamental ω_0 de la señal. Los factores de escala a_k se denominan coeficientes de la serie de Fourier.
- Transformada de Fourier (TF) de tiempo continuo. Expresa una señal aperiódica de tiempo continuo $x(t)$ como una integral de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) de todas las frecuencias. El factor de escala se denota por $X(\omega)$.
- Serie de Fourier de tiempo discreto (SFTD). Expresa una señal periódica de tiempo discreto $x[n]$ como una suma finita de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) en los armónicos k/N de la frecuencia fundamental $\frac{1}{N}$ de la señal. Los factores de escala se denominan coeficientes de la serie de Fourier, a_k, que a su vez forman una secuencia periódica, de período N.
- Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD). Expresa una señal aperiódica de tiempo discreto $x[n]$ como una integral de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) de todas las frecuencias. El factor de escala se denota por $X(\Omega)$.

Repaso...

- Espectro de amplitud ($X(\omega)$ o $X(\Omega)$). Un gráfico de los coeficientes de la serie de Fourier o la transformada en función de la frecuencia cuando estas cantidades tienen valores reales.
- Espectro de fase ($\angle X(\omega)$ o $\angle X(\Omega)$). Un gráfico de la fase de los coeficientes de la serie de Fourier o de la transformada en función de la frecuencia.
- Espectro de magnitud ($|X(\omega)|$ o $|X(\Omega)|$). Un gráfico de la magnitud de los coeficientes de la serie de Fourier o la transformada en función de la frecuencia.
- ...

Para leer ...

Lectura obligatoria

- Tabla de propiedades de la transformada continua y discreta de Fourier y pares transformados básicos (Oppenheim and Willsky, Tablas 4.1, 4.2, 5.1 y 5.2).
- Apéndice de fracciones simples (Oppenheim and Willsky).
- Aspectos en el dominio del tiempo y la frecuencia de filtros ideales y no ideales (Oppenheim and Willsky, Secciones 6.3 y 6.4).
- Sistemas continuos de primer y segundo orden (Oppenheim and Willsky, Sección 6.5).
- Sistemas discretos de primer y segundo orden (Oppenheim and Willsky, Sección 6.6).
- Ejemplos de análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la frecuencia (Oppenheim and Willsky, Sección 6.7).

Lectura optativa

- Filtrado selectivo en frecuencia con frecuencia central variable (Oppenheim and Willsky, Sección 4.5.1).
- Diagramas de Bode (Oppenheim and Willsky, Sección 6.2.3).
- Transformada discreta de Fourier (Oppenheim and Schafer, Secciones 2.7, 2.8 y 2.9).

Tiempo de consultas

¿Preguntas?