Serie y Transformada de Fourier

Señales y Sistemas

2do cuatrimestres 2026

Análisis Periódico y Aperiódico

El análisis de Fourier nos permite descomponer señales en componentes armónicas complejas, dependiendo de la naturaleza de la señal utilizamos ...

Series de Fourier (Tiempo Continuo):

- Se aplican a señales **periódicas** (duración infinita).
- Descomponen la señal en una sumatoria de exponenciales complejas con frecuencias discretas $\omega = k\omega_0$.
- El espectro resultante es de **líneas discretas** (coeficientes a_k).

Transformada de Fourier (Tiempo Continuo):

- Se aplican a señales **aperiódicas** (de energía finita).
- Se concibe la señal aperiódica como el límite de una señal periódica cuando el periodo $T \to \infty$.
- Las exponenciales complejas ocurren en una sucesión continua de frecuencias $\omega \in \mathbb{R}$.
- El espectro resultante es una **función continua** $X(j\omega)$.

Onda Cuadrada Periódica

Consideremos la señal periódica continua $x(t)$ (onda cuadrada simétrica) con periodo fundamental T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$, definida sobre un periodo completo como:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

Buscamos calcular sus coeficientes espectrales complejos a_k mediante la ecuación de análisis:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Sustituyendo los límites donde la señal es no nula:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} (1) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Para $k = 0$, evaluamos el promedio:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot dt = \frac{2T_1}{T}$$

Coeficientes a_k

Para $k \neq 0$, integramos la exponencial compleja:

$$a_k = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right]_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{jk\omega_0 T}\left(e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}\right)$$

Haciendo uso de la relación de Euler para el seno, $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$:

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T}\left(\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right) = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

Dado que $\omega_0 T = 2\pi$, sustituimos en el denominador:

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k(2\pi)} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

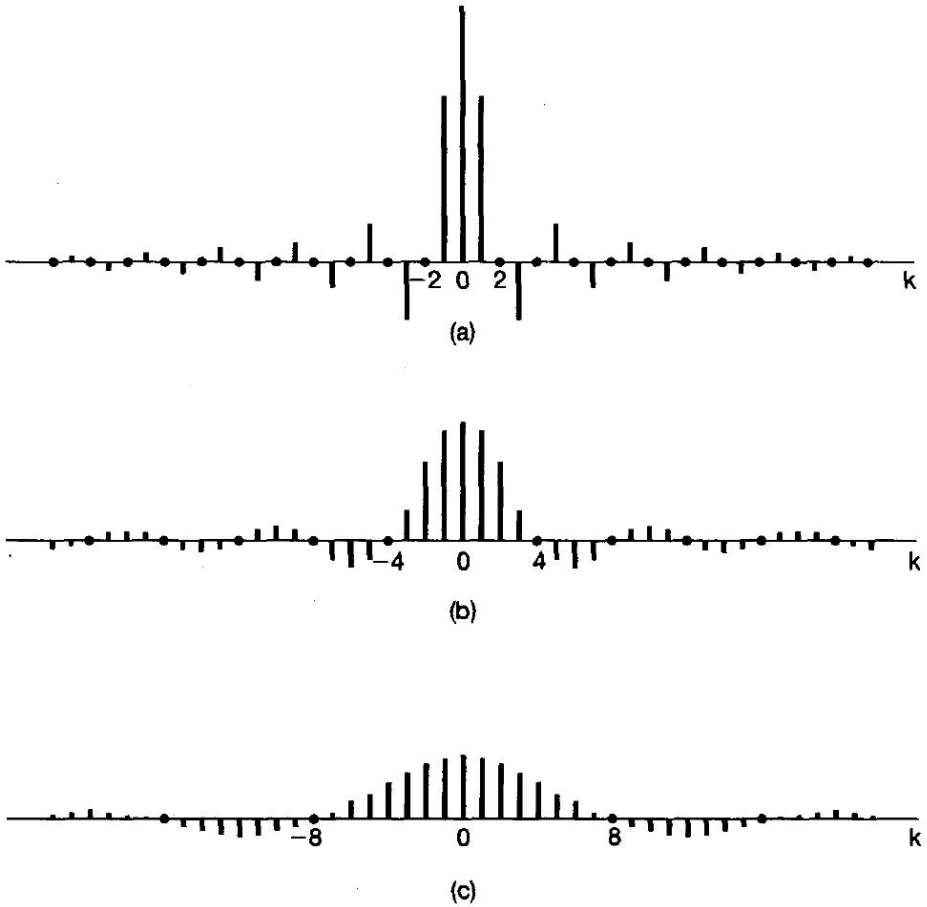
Si definimos la relación de ciclo de trabajo como $T = 4T_1$ (es decir, $T_1 = T/4$ y $\omega_0 T_1 = \pi/2$):

$$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \implies a_0 = \frac{2(T/4)}{T} = \frac{1}{2}$$

El espectro resultante consiste en líneas discretas espaciadas por $\omega_0 = 2\pi/T$, cuya envolvente es una función de tipo continua sinc.

Espectro de Líneas Discretas

espectro de coeficientes de Fourier Ta_k (o a_k) para diferentes valores de periodo T con T_1 fijo :



a medida que T aumenta, la frecuencia fundamental ω_0 disminuye y las líneas espectrales se vuelven más densas, muestreando la envolvente con mayor resolución.

Representación de Señales Aperiódicas

Consideremos ahora un pulso aperiódico rectangular de duración finita $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

Para desarrollar una representación espectral para esta señal aperiódica, construimos una señal periódica auxiliar $\tilde{x}(t)$ de periodo T, tal que un periodo coincida exactamente con $x(t)$ para $T > 2T_1$:

$$\tilde{x}(t) = x(t) \quad \text{para } |t| < T/2$$

Calculamos los coeficientes de Fourier a_k de esta señal periódica:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Como la señal aperiódica $x(t) = 0$ para $|t| > T/2$, podemos extender el intervalo de integración a la recta real infinita $[-\infty, \infty]$:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Deducción

Definimos la envolvente continua $X(j\omega)$ de los coeficientes multiplicados por T como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \quad \text{(Ecuación de Análisis)}$$

Comparando los coeficientes de Fourier a_k con esta envolvente continua, vemos que:

$$a_k = \frac{1}{T}X(jk\omega_0)$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación de síntesis para la señal periódica $\tilde{x}(t)$:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

Dado que $1/T = \omega_0/2\pi$:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0$$

si el periodo $T \to \infty$, la señal periódica se convierte en el pulso aperiódico ($\tilde{x}(t) \to x(t)$), la frecuencia fundamental se reduce a un diferencial ($\omega_0 \to d\omega$), el término armónico discreto se vuelve continuo ($k\omega_0 \to \omega$), y la sumatoria converge a la Integral de Fourier:

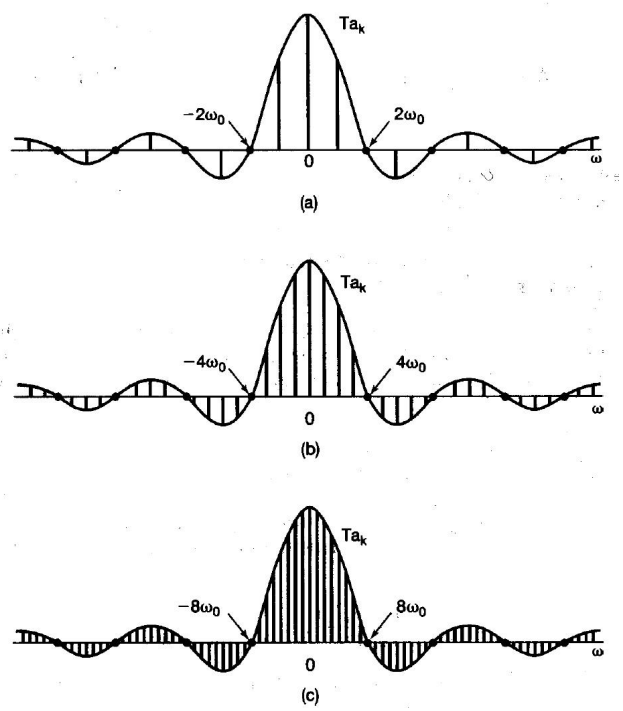
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \quad \text{(Ecuación de Síntesis)}$$

Espectro Continuo y la Función Sinc

Calculando directamente la transformada de Fourier del pulso rectangular aperiódico $x(t)$:

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} (1)e^{-j\omega t}\, dt = \frac{e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}}{-j\omega} = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$

Sinc normalizada $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$ obtenemos: $X(j\omega) = 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$



el espectro deja de ser discreto y es una envolvente continua

Comparando

La siguiente tabla consolida la comparación matemática e intuitiva entre ambos análisis:

Propiedad	**(Series)**	**(Transformada)**
Tipo de Señal	Periódica (Onda cuadrada)	Aperiódica (Pulso rectangular)
Periodo T	Finito ($\omega_0 = 2\pi/T$)	Infinito ($T \to \infty$, $\omega \in \mathbb{R}$)
Espectro	Discreto (Líneas de Fourier)	Continuo (Densidad espectral)
Ecuación de Análisis	$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$	$X(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$
Ecuación de Síntesis	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$
Relación Espectral	$a_k = \frac{1}{T}X(jk\omega_0)$	Muestras de $X(j\omega)$ escaladas
Significado Físico	Potencia en armónicos	Densidad de energía en frecuencias

Conclusión: El análisis de la Transformada de Fourier es la evolución natural de las Series de Fourier. Al hacer el periodo de infinitamente grande ($T \to \infty$), las líneas armónicas se aproximan entre si hasta unirse en un espectro continuo. El pulso rectangular aperiódico contiene todas las frecuencias imaginables, distribuidas según la función continua sinc.