

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Transformada de Fourier de tiempo continuo

Dr. Ing. Pedro D. Arini

Señales y Sistemas
Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

2do. cuatrimestre 2026

Resumen

1 Representación de señales de tiempo continuo

Resumen

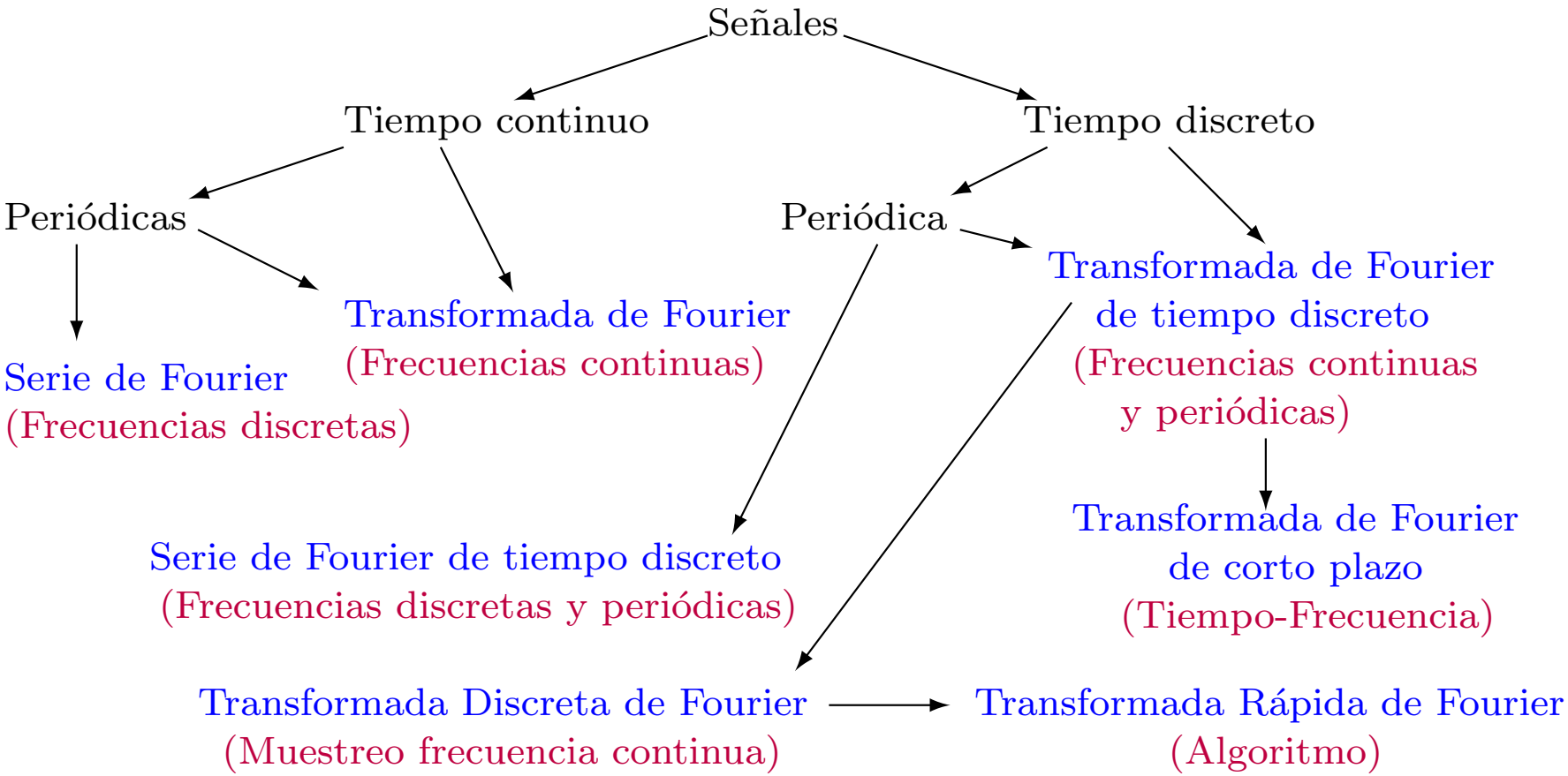
1. Representación de señales de tiempo continuo

2. Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo

Resumen

1. Representación de señales de tiempo continuo
2. Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo
3. Sistemas LTI continuos y la transformada de Fourier

Análisis de Fourier



Transformada de Fourier en tiempo continuo I

Consideremos una señal $x(t)$. Se define la *transformada de Fourier* de $x(t)$ o $X(j\omega) \equiv \mathcal{F}\{x(t)\}$ como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \ \omega \in \mathbb{R}$$

La definición de transformada de Fourier tiene sentido siempre y cuando $X(j\omega)$ esté bien definida!! Es decir la integral debe existir para todo ω y ser finita!! Esto por ejemplo se cumple si $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ se debe interpretar como un *operador* que mapea señales $x(t)$ en un determinado espacio vectorial y entrega señales $X(j\omega)$ en otro espacio vectorial donde podamos obtener caracterizaciones de la señal original.

Será de interés asegurar que dicho operador sea invertible. Esto es que podamos encontrar un operador $\mathcal{F}^{-1}$ que dada la transformada de Fourier $X(j\omega)$ nos permita recuperar la señal original $x(t)$!

Gran parte del análisis de Fourier se ocupa de lograr esto!

Transformada de Fourier en tiempo continuo II

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha > 0$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}dt$$

$$= \frac{-1}{\alpha+j\omega}e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}$$

Como $\alpha > 0 \Longrightarrow e^{-(\alpha+j\omega)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$

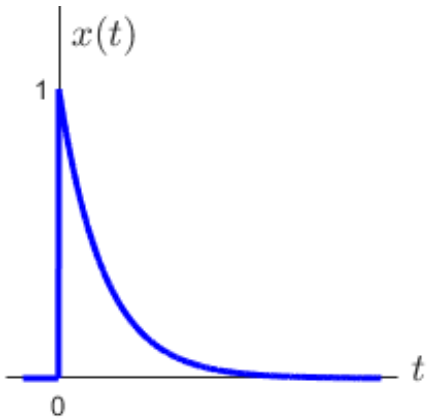
$$X(\omega) = \frac{1}{\alpha+j\omega}$$

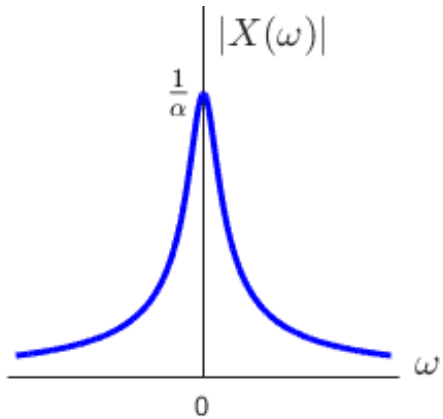
$$= \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

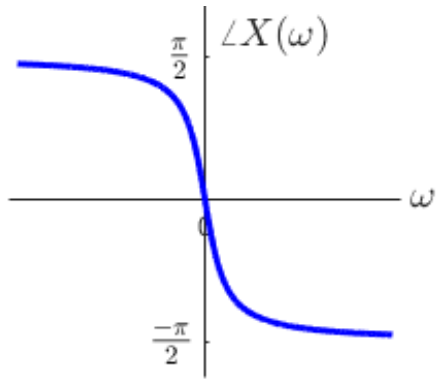
$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}e^{-j\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)}$$

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$\angle X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$







Transformada de Fourier en tiempo continuo III

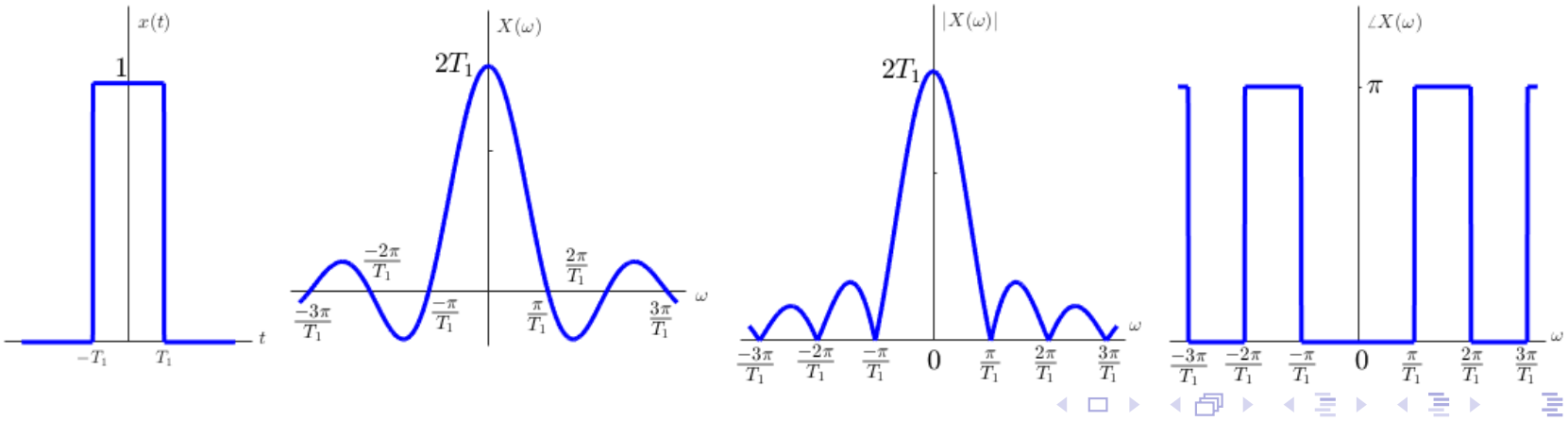
Consideremos el pulso rectangular:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} d\omega$$

$$= -\frac{e^{-j\omega}}{j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$= 2\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega}$$



Antitransformada de Fourier I

La *anti-transformada* de Fourier $\hat{x}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$ se define como:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ t \in \mathbb{R}$$

siempre y cuando la integral tenga sentido y esté bien definida!

Nos gustaría tener $\hat{x}(t) = x(t)\ \forall t$.

Sin ser rigurosos podemos escribir:

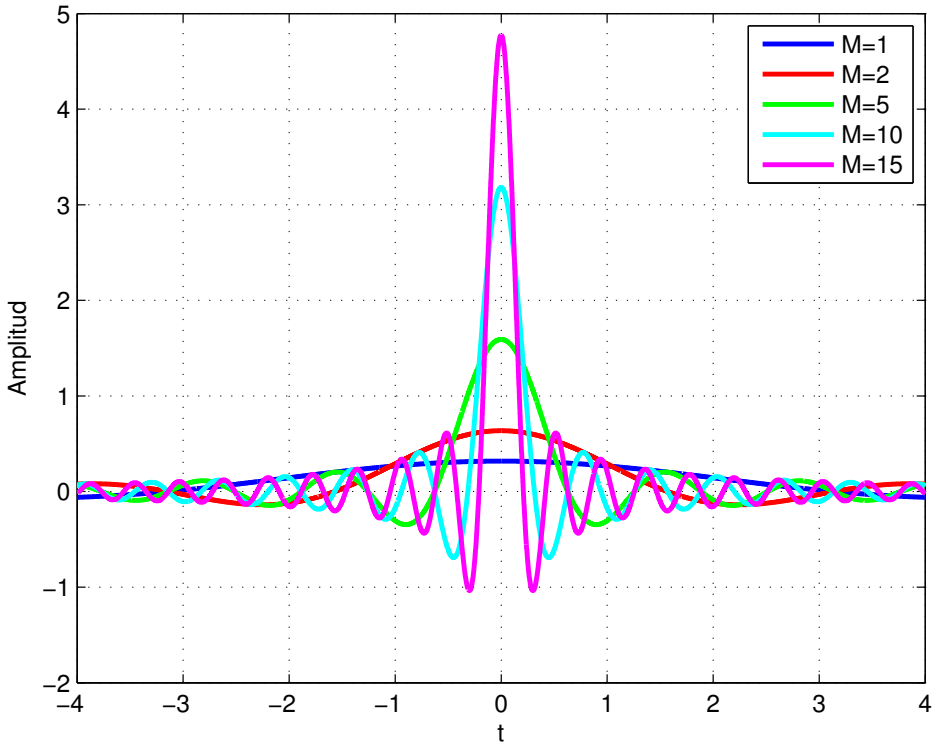
$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-j\omega u}du\right)e^{j\omega t}d\omega \\
&= \lim_{M\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}e^{j\omega(t-u)}d\omega\right)du \\
&= \lim_{M\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\frac{\sin\left(M(t-u)\right)}{\pi(t-u)}du
\end{aligned}$$

Vamos a definir la función *sinc normalizada* como:

$$\text{sinc}(t) \equiv \frac{\sin(\pi t)}{\pi t},\quad \int_{-\infty}^{\infty}\text{sinc}(t)dt = 1 \rightarrow \text{Como integral impropia!!}$$

Antitransformada de Fourier II

$$\hat{x}(t) = \lim_{M \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \frac{M}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{M}{\pi}(t-u)\right) du$$



Vemos que la función $\frac{M}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{M}{\pi}(t-u)\right)$ "converge" a una delta de Dirac posicionada en t cuando $M \to \infty$!

Sin realizar ningún análisis riguroso vemos plausible que $\hat{x}(t) = x(t)$. Lamentablemente esto no es cierto en general! Ni siquiera para funciones continuas en t!

Antitransformada de Fourier III

Un caso donde esto se cumple es cuando las señales $x(t)$ son infinitamente diferenciables y decrecen hacia cero "muy rápido" (espacio de funciones de Schwartz!)

Sin embargo, tenemos un equivalente al teorema de Dirichlet para las series de Fourier:

Teorema

Sea $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$ de variación acotada sobre cualquier intervalo finito de la recta. Entonces vale:

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \frac{M}{\pi} sinc\left(\frac{M}{\pi}(t-u)\right) du = \frac{1}{2}\left[x(t-0^-) + x(t+0^+)\right]$$

Con las hipótesis del teorema tenemos que de la misma forma que la serie de Fourier, en una discontinuidad la anti-transformada de Fourier converge al promedio de los valores de la misma!

Teorema de Plancherel I

Sin embargo, como en el caso de la serie de Fourier, y sin prestar atención a la convergencia puntual de la anti-transformada de Fourier, podemos decir algo más sobre los pares transformada y anti-transformada para señales de energía finita.

Teorema (Plancherel)

Sobre el espacio $L_2(\mathbb{R})$ *el operador* $x(t) \to \mathcal{F}[x(t)]$ *es biyectivo. Es decir, si* $\mathcal{F}[x_1(t)] = \mathcal{F}[x_2(t)]$ *(en el sentido cuadrático) entonces* $x_1(t) = x_2(t)$ *(en el sentido cuadrático). Además para cada* $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ *existe su transformada de Fourier* $X(j\omega) \equiv \mathcal{F}[x(t)]$ *la cual es de energía finita. Así mismo para cada señal* $X(j\omega) \in L_2(\mathbb{R})$ *existe* $x(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)]$ *también de energía finita. Además se cumple la relación de Parseval:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Podemos transformar señales temporales de $L_2(\mathbb{R})$ y volver a recuperarlas antitransformando!! Y además nos mantenemos en el mismo espacio vectorial!!

Teorema de Plancherel II

Algunas consideraciones:

- La "igualdad" entre $x(t)$ y $\mathcal{F}^{-1}\left[X(j\omega)\right]$ se puede interpretar como:

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)-\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right|^2 dt=0$$

  Esto es la energía del error se puede hacer tan pequeña como se quiera (Similar a la serie de Fourier!).
- El operador $\mathcal{F}:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$ define una *isometría* en dicho espacio. Como definiría los productos internos involucrados en el espacio de llegada y el de salida??
- Notar que existe una dualidad interesante entre una señal y su transformada. Sea $x(t)\in L_2(\mathbb{R})$ y $X(j\omega)=\mathcal{F}\left[x(t)\right]$. Entonces lo siguiente es cierto:

$$x(-t)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[X(j\omega)\right],\ x(t)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{R}\left[\mathcal{F}\left[X(j\omega)\right]\right]$$

  donde $\mathcal{R}\left[x(t)\right]=x(-t)$ es el operador *reflexión temporal*. Es claro que esto muestra que:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\cdot\right]=\frac{1}{2\pi}\mathcal{R}\left[\mathcal{F}\left[\cdot\right]\right]=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[\mathcal{R}\left[\cdot\right]\right]$$

- Es posible definir la transformada de Fourier en $L_2\left(\mathbb{R}^N\right)$ con exactamente las mismas propiedades que para el caso con $N=1$:

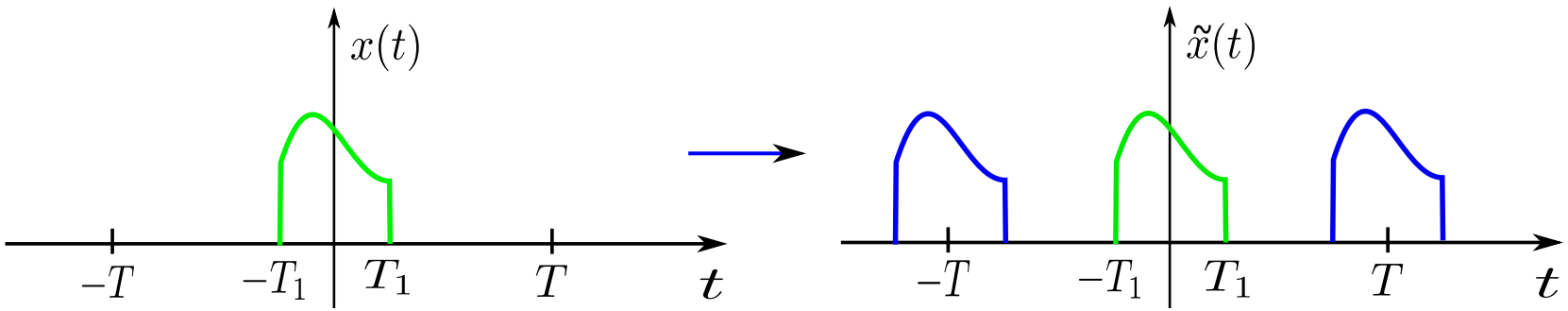
$$X(j\boldsymbol{\omega})=\int_{\mathbb{R}^N}x(\mathbf{t})e^{-j\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}}d\mathbf{t},\ \boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^N$$

$$x(\mathbf{t})=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^N}X(j\boldsymbol{\omega})e^{j\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}}d\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{t}\in\mathbb{R}^N$$

Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier I

Lo anterior fue una introducción formal a la transformada de Fourier. Veamos ahora otra interpretación no rigurosa pero intuitiva. Consideremos una señal $x(t)$ que es cero para $|t| > T_1$. La misma no es periódica.

Sin embargo podemos construir una señal periódica $\tilde{x}(t)$ con periodo $T > 2T_1$, de forma tal que en cada periodo tengamos $x(t)$.



Podemos calcular al serie de Fourier!!

Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier II

Tenemos que:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Pero cuando $|t| < T/2$, tenemos que $\tilde{x}(t) = x(t)$. Además para $|t| > T/2$ tenemos que $x(t) = 0$. Entonces podemos escribir:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Con $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ podemos escribir:

$$a_k = \frac{1}{T} X(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} = \frac{1}{T} X(k\omega_0)$$

Entonces podemos escribir:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier III

Cuando $T \to \infty$ tenemos que $\tilde{x}(t) \to x(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$. Además $\omega_0 \to 0$. El lado derecho de la última ecuación se "convierte" en una integral, muy similar al análisis que hicimos para la convolución en tiempo continuo!:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Mientras por medio de la serie de Fourier podemos representar una señal periódica a través de una superposición de exponenciales con armónicos en un conjunto discreto, a través de la transformada de Fourier podemos representar una señal no periódica como una "superposición" de exponenciales cuyos armónicos forman un continuo!!

Notar que podemos recorrer el camino inverso: partimos de una señal periódica $\tilde{x(t)}$, la cual es igual a $x(t)$ en un período. Es claro que podemos recuperar los coeficientes de Fourier de $\tilde{x}(t)$ a través de un "muestreo" equiespaciado de la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$:

$$a_k = \frac{1}{T} X(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

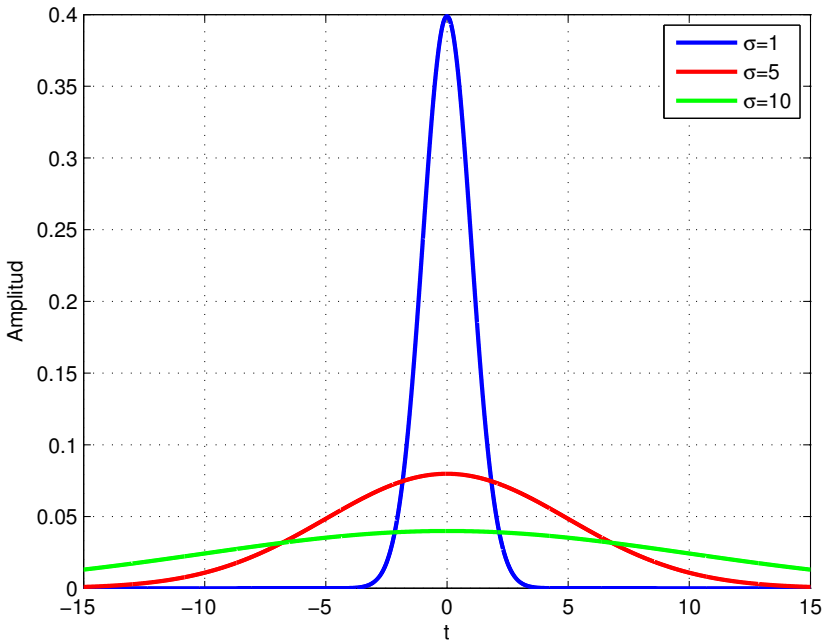
Incertidumbre en tiempo y frecuencia I

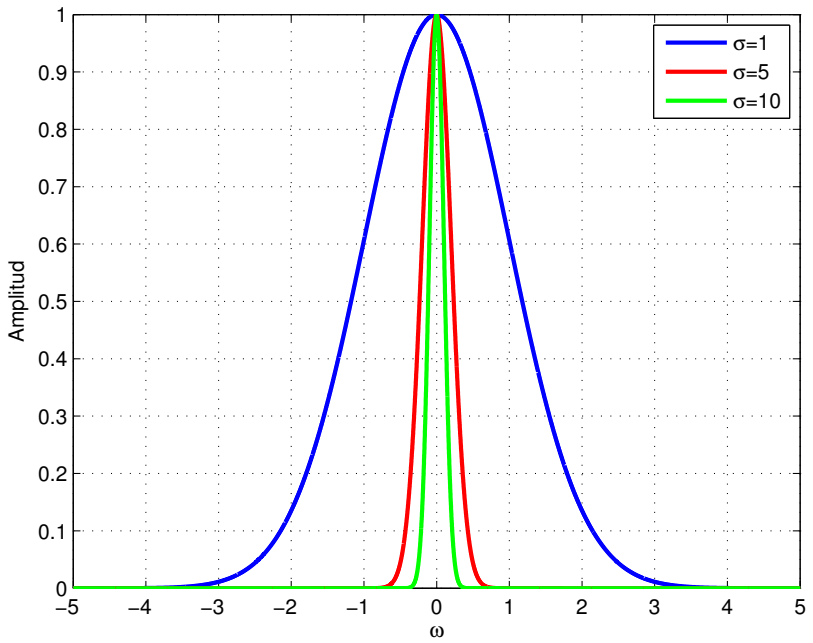
Consideremos la señal gaussiana $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ con $\sigma > 0$. La transformada de Fourier:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{j\omega t} dt = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$$

donde hemos usado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at^2+2bt)} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}}, \quad a > 0$$





Incertidumbre en tiempo y frecuencia II

En todos los ejemplos analizados observamos algo interesante:

- En el caso del pulso cuadrado si aumentamos T_1 el pulso en el tiempo se hace más ancho, mientras que $X(j\omega)$ se contrae, haciéndose el lóbulo principal de la función sinc cada vez más alto.
- En el caso del pulso gaussiano, si aumentamos σ el pulso en el tiempo se hace más ancho mientras que la transformada de Fourier se cada vez más angosta.

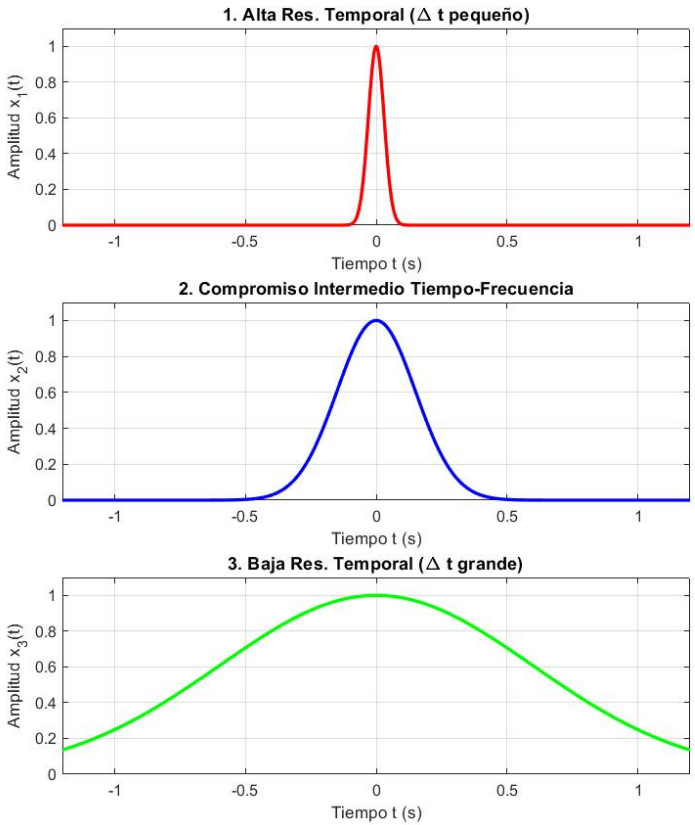
Este comportamiento dual es característico de todo par transformado:

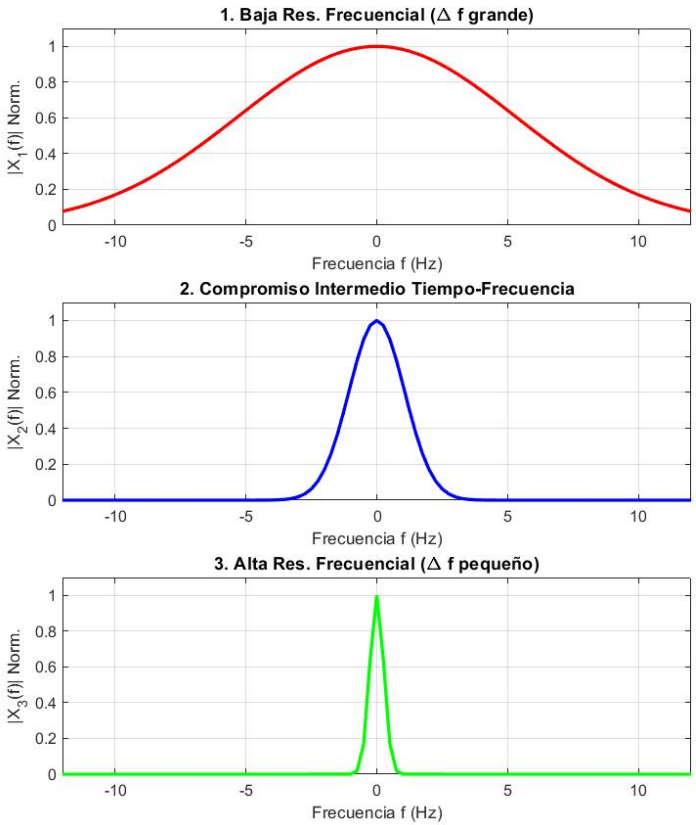
+localización temporal $\leftrightarrow$ - localización espectral

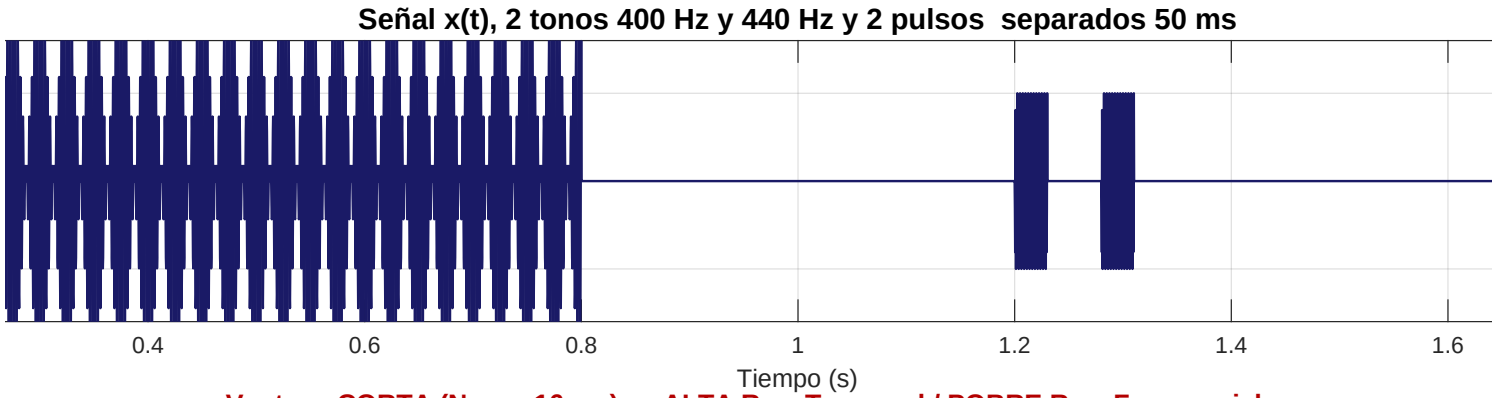
-localización temporal $\leftrightarrow$ + localización espectral

Existe un límite a lo que se puede resolver en tiempo y en frecuencia en forma simultánea: *principio de incertidumbre* (ver ejercicios sugeridos!)

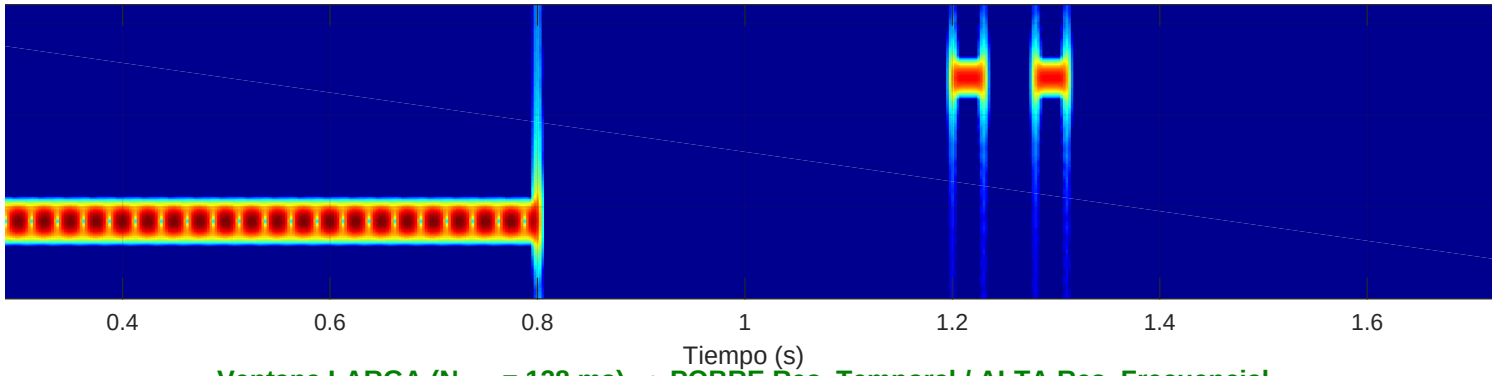
Incertidumbre en tiempo y frecuencia III



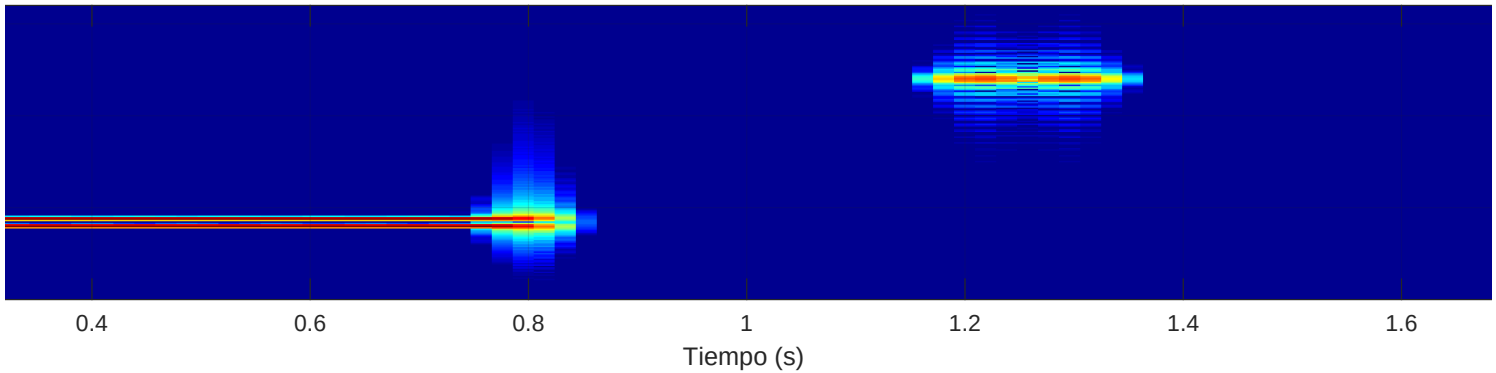




Ventana CORTA (N_{win} = 16 ms) → ALTA Res. Temporal / POBRE Res. Frecuencial



Ventana LARGA (N_{win} = 128 ms) → POBRE Res. Temporal / ALTA Res. Frecuencial



Transformada de Fourier de $\delta(t)$

Consideremos la delta de Dirac $\delta(t)$. Aunque no podemos decir que $\delta(t) \in L_2(\mathbb{R})$ (recordemos que ni siquiera es una función!!), podemos definir su transformada de Fourier en un sentido distribucional:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

Podemos pensar que de alguna forma un impulso unitario tiene contribuciones de todos los armónicos posibles en forma pareja!!

Además podemos escribir:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

Usando el hecho de que $\sin \omega t$ es una función impar y que $\cos \omega t$ es una función par podemos expresar el impulso unitario también como:

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega$$

Transformada de Fourier de exponenciales complejas

Consideremos una señal cuya transformada de Fourier la podemos escribir como $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$. La señal que tiene esta transformada se puede determinar como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

Supongamos entonces que tenemos una señal en el tiempo $x(t)$ que se puede representarse como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Es claro que dicha señal es periódica con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. La transformada de Fourier puede calcularse como (aplicando linealidad, que es una de las propiedad de la transformada de Fourier que veremos a continuación!):

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right] = \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathcal{F}\left[e^{jk\omega_0 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0)$$

La transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de impulsos, cada uno pesado por $2\pi a_k$ donde a_k son los coeficientes de Fourier de la señal!!

#	Propiedad	Señal Tiempo	Transf. de Fourier
1.	**Linealidad**	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
2.	**Desplazamiento Temporal**	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
3.	**Desplazamiento Frecuencial**	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.	**Conjugación**	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
5.	**Simetría (Señales Reales)**	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(-j\omega) = X^*(j\omega)$
6.	**Escalamiento Temporal**	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
7.	**Diferenciación en Tiempo**	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
8.	**Integración en Tiempo**	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
9.	**Diferenciación en Frecuencia**	$-jtx(t)$	$\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
10.	**Dualidad**	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
11.	**Relación de Parseval**	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(j\omega)\rvert^2 d\omega$
12.	**Convolución**	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
13.	**Multiplicación**	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * Y(j\omega)]$

1. Linealidad: Aplicando la ecuación de análisis a la combinación lineal $z(t) = ax(t) + by(t)$:

$$Z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [ax(t) + by(t)]e^{-j\omega t}\,dt = a\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt + b\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Por definición de cada transformada individual: $Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega)$.

2. Desplazamiento Temporal: Para la señal desplazada $x_d(t) = x(t - t_0)$, realizamos el cambio de variable $u = t - t_0 \implies t = u + t_0$ $(dt = du)$:

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega(u+t_0)}\,du$$

Factorizando la constante $e^{-j\omega t_0}$ fuera de la integral:

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega u}\,du = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

Consecuencia física: El desplazamiento temporal no altera el espectro de magnitud $|X(j\omega)|$, únicamente introduce un desfase lineal $-\omega t_0$.

3. Desplazamiento en Frecuencia (Modulación Compleja): Al multiplicar la señal temporal por el fasor $e^{j\omega_0 t}$:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0 t}x(t)]e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,dt = X(j(\omega-\omega_0))$$

4. Conjugación Compleja: Tomando el complejo conjugado de la ecuación de análisis para $x(t)$:

$$X^*(j\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}\,dt$$

Reemplazando ω por $-\omega$, obtenemos:

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}\,dt = \mathcal{F}\{x^*(t)\}$$

5. Simetrías para Señales Reales: Si la señal es puramente real, $x(t) = x^*(t)$, entonces $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$ (**Simetría Hermítica**). De aquí se deduce que:

- Módulo: $|X(-j\omega)| = |X(j\omega)|$ (función **par**).
- Fase: $\angle X(-j\omega) = -\angle X(j\omega)$ (función **impar**).

Descomposición de la Señal

Toda señal $x(t)$ se descompone en su parte par $x_e(t)$ y su parte impar $x_o(t)$:

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}, \quad x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Integral de Análisis Reducida

Sustituyendo $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ en la CTFT y con la relación de Euler:

$$X(j\omega) = 2\int_0^\infty x_e(t)\cos(\omega t)\,dt - 2j\int_0^\infty x_o(t)\sin(\omega t)\,dt$$

Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo

Cualquier señal compleja general $x(t)$ se puede expresar desglosando sus partes reales e imaginarias, pares e impares:

$$x(t) = \mathrm{Re}\{x_e(t)\} + j\mathrm{Im}\{x_e(t)\} + \mathrm{Re}\{x_o(t)\} + j\mathrm{Im}\{x_o(t)\}$$

Table: Correspondencias Tiempo-Frecuencia $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} X(j\omega)$

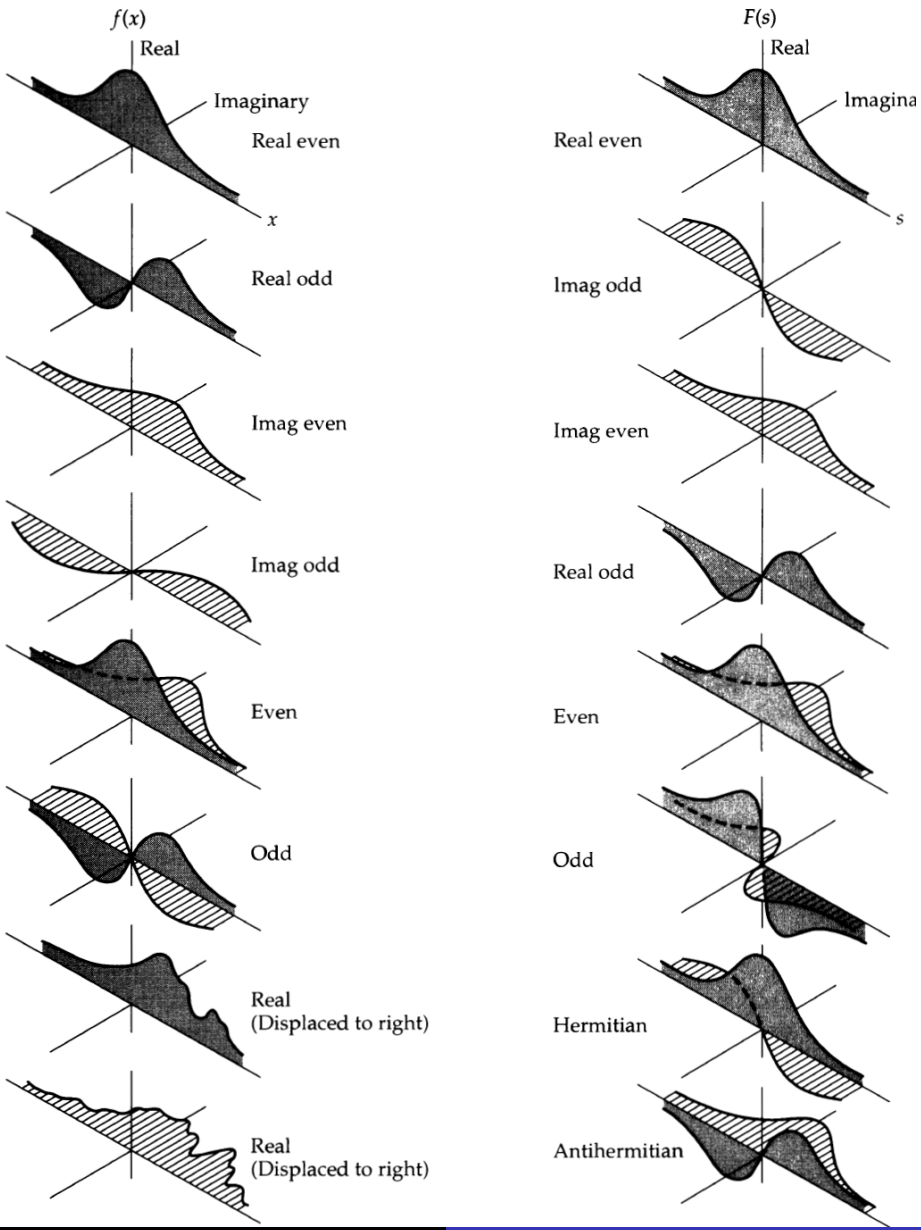
Señal en el Tiempo $x(t)$	**Transformada de Fourier** $X(j\omega)$
Real y par	Real y par
Real e impar	Imaginaria pura e impar
Imaginaria pura y par	Imaginaria pura y par
Compleja y par	Compleja y par
Compleja e impar	Compleja e impar
Real y asimétrica	Compleja y Hermítica $(X(-j\omega) = X^*(j\omega))$
Imaginaria pura y asimétrica	Compleja y Antihermitiana $(X(-j\omega) = -X^*(j\omega))$
Real par + Imaginaria impar	Estrictamente Real
Real impar + Imaginaria par	Estrictamente Imaginaria pura

Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo

Cualquier señal compleja general $x(t)$ se puede expresar desglosando sus partes reales e imaginarias, pares e impares:

$$x(t) = \mathrm{Re}\{x_e(t)\} + j\mathrm{Im}\{x_e(t)\} + \mathrm{Re}\{x_o(t)\} + j\mathrm{Im}\{x_o(t)\}$$

Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo



6. Escalamiento en Tiempo y Frecuencia: Para una constante real $a \neq 0$, la transformada de $x(at)$ se obtiene mediante el cambio de variable $u = at \implies dt = du/a$:

- Si $a > 0$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j(\omega/a)u}\,du = \frac{1}{a}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$.
- Si $a < 0$: los límites de integración se invierten ($+\infty$ a $-\infty$), lo que introduce un signo menos cancelando a: $\frac{1}{-a}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$.

Uniendo ambos casos: $\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$.

7. Diferenciación en el Dominio del Tiempo: Derivando ambos lados de la ecuación de síntesis $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ respecto a t:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{j\omega t}\right)d\omega$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[j\omega X(j\omega)]e^{j\omega t}\,d\omega \implies \mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j\omega X(j\omega)$$

8. Integración en el Dominio del Tiempo: La función de acumulación $g(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ se puede expresar como la convolución $x(t) * u(t)$. Usando la propiedad de convolución y sabiendo que $\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right\} = X(j\omega)\cdot\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

El término impulsivo representa el valor promedio en corriente directa (CD) $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$.

9. Diferenciación en el Dominio de la Frecuencia: Derivando la ecuación de análisis $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ respecto a ω:

$$\frac{d}{d\omega}X(j\omega) = \frac{d}{d\omega}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}e^{-j\omega t}\right)dt$$

$$\frac{d}{d\omega}X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}[-jtx(t)]e^{-j\omega t}\,dt \implies \mathcal{F}\{-jtx(t)\} = \frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$

10. Propiedad de Dualidad: Partimos de la ecuación de síntesis $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$. Evaluando en $t = -\tau$:

$$2\pi x(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{-j\omega\tau}\,d\omega$$

Intercambiando los nombres de las variables mudas $\tau \leftrightarrow t$ y $\omega \leftrightarrow \omega$:

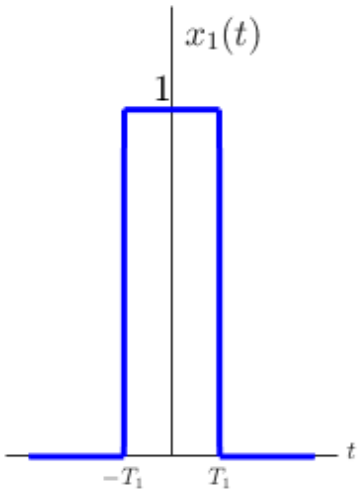
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(jt)e^{-j\omega t}\,dt = 2\pi x(-\omega) \implies \mathcal{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$$

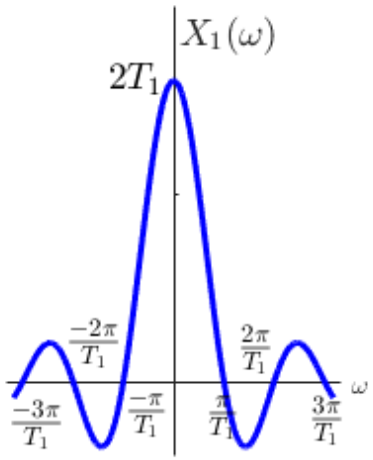
$$x(t) \;:\; X(\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right] \Rightarrow \mathcal{F}\left[X(t)\right] = 2\pi x(-\omega)$$

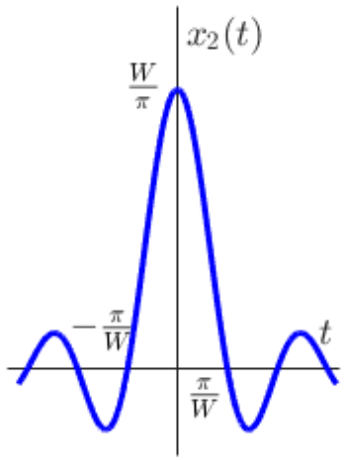
Ejemplo:

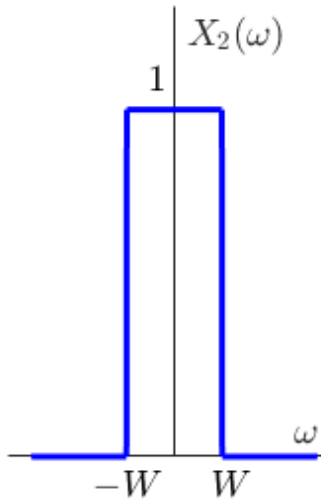
$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow X_1(\omega) = 2\frac{\sin\left(\omega T_1\right)}{\omega}$$

$$x_2(t) = \frac{\sin\left(Wt\right)}{\pi t} \leftrightarrow X_2(\omega) = \begin{cases} 1 & |t| < W \\ 0 & |t| > W \end{cases}$$









11. Teorema de Conservación de la Energía (Parseval / Plancherel): La energía total E_x de una señal integrable de energía finita se expresa en el tiempo como:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) \, dt$$

Sustituyendo $x^*(t)$ mediante la ecuación de síntesis conjugada $x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t} \, d\omega \right] dt$$

Intercambiando el orden de integración (Teorema de Fubini):

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} \, dt \right] d\omega$$

Reconociendo que la integral interna es $X(j\omega)$:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)X(j\omega) \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega$$

Interpretación física: La energía total calculada en el dominio del tiempo es idéntica al área bajo la curva de la **densidad espectral de energía** $|X(j\omega)|^2$ dividida por 2π.

12. Convolución en el Tiempo: Sea $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$. Calculando su transformada:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau \right] e^{-j\omega t}\, dt$$

Intercambiando el orden de integración y factorizando $e^{-j\omega t} = e^{-j\omega\tau}e^{-j\omega(t-\tau)}$:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}\, dt \right] d\tau$$

Por la propiedad de desplazamiento temporal, la integral interna vale $H(j\omega)$:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}H(j\omega)\, d\tau = X(j\omega)H(j\omega)$$

13. Multiplicación (Convolución en Frecuencia): Por la propiedad de dualidad aplicada a la convolución temporal, la multiplicación de dos señales en el tiempo corresponde a la convolución espectral escalada por $1/2\pi$:

$$\mathcal{F}\{x(t)y(t)\} = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * Y(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))\, d\theta$$

Sistemas LTI y transformada de Fourier I

En una clase previa definimos la respuesta en frecuencia de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ como:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

La respuesta en frecuencia de un sistema LTI no es otra cosa que la transformada de Fourier de su respuesta al impulso!!!

Además por la propiedad de convolución sabemos que la respuesta $y(t)$ del sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ a una entrada $x(t)$ puede caracterizarse también como:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

La ecuación anterior caracteriza, así como lo hacía la integral de convolución, en forma completa la acción de un sistema LTI!! Esto es así porque, según lo que discutimos previamente, siempre podemos volver del campo transformado al dominio del tiempo gracias a la invertibilidad de la transformada de Fourier!!

Sistemas LTI y transformada de Fourier II

En lo anterior hemos supuesto que la respuesta en frecuencia existe. Es decir que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso debe estar bien definida. Sin embargo, esto no es un problema para los sistemas LTI estables:

Teorema

La respuesta en frecuencia $H(j\omega)$ de un sistema LTI estable siempre existe.

Proof: Dado que el sistema es estable tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$. Pero entonces podemos escribir:

$$|H(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)e^{-j\omega t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$$

Lo que muestra que la respuesta en frecuencia está bien definida.

Nuestro interés en analizar sistemas LTI mediante la transformada de Fourier siempre estará en aquellos que son estables!! Para analizar sistemas LTI inestables utilizaremos más adelante la transformada de Laplace!!

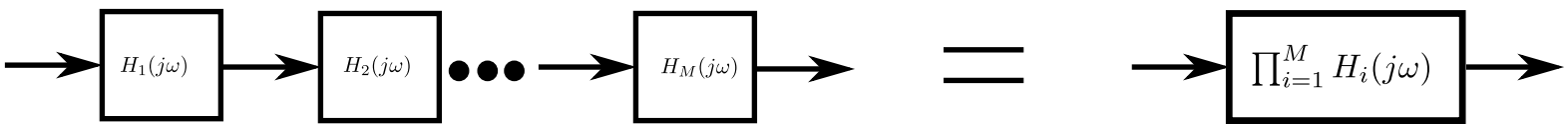
Notar que la ecuación

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

es mucho más simple de interpretar que una integral de convolución. Observando esta ecuación y en particular inspeccionando $H(j\omega)$ podemos obtener información muy valiosa sobre el sistema LTI bajo estudio o expresar en forma muy simple y conveniente muchas de sus propiedades.

Por ejemplo, consideremos la conexión en cascada de M sistemas LTI con respuestas al impulos $h_i(t), \quad i = 1, \ldots, M$. La respuesta total del sistema en cascada es igual a $h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \cdots * h_M(t)$, lo cual es trabajoso de obtener y analizar. Sin embargo gracias a la propiedad de convolución la respuesta en frecuencia total del sistema en cascada se puede obtener como:

$$H(j\omega) = \prod_{i=1}^{M} H_i(j\omega)$$



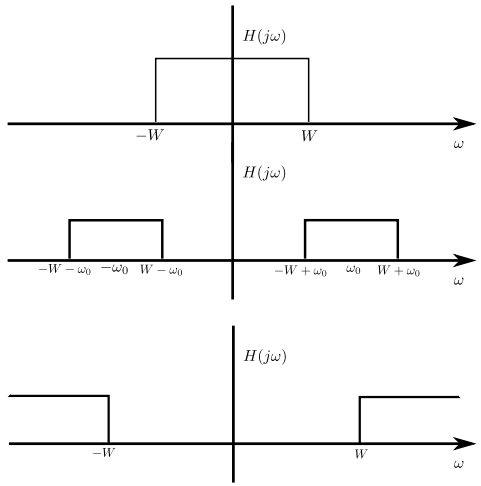
Sistemas LTI y transformada de Fourier IV

Un ejemplo muy importante de sistemas LTI que prácticamente se analizan y diseñan en su totalidad a través de la respuesta en frecuencia son los *filtros selectivos en frecuencia*.

Un filtro selectivo en frecuencia es un sistema LTI que nos permite atenuar, magnificar o directamente eliminar una parte del espectro de una señal a su entrada!

Ejemplos de filtros selectivos en frecuencia:

- Filtros pasa-bajos
- Filtros pasa-banda
- Filtros pasa-altos

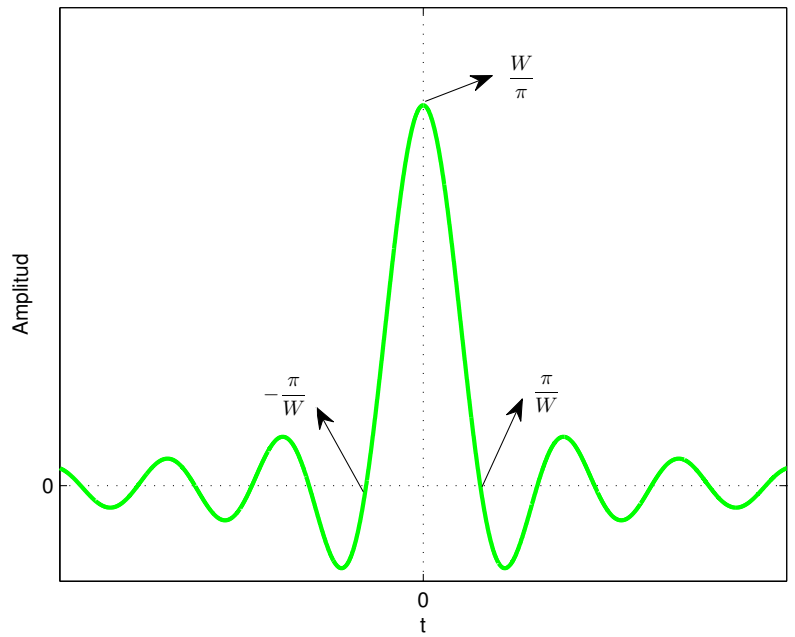


Consideremos el filtro pasa-bajos ideal:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

Vemos que la respuesta al impulso de este sistema es:

$$x(t) = \frac{W}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



Vemos que pueden existir algunos problemas para implementar el filtro pasa-bajos ideal. El sistema es no causal, altamente oscilatorio, etc. En la práctica, la característica ideal se aproximará de forma tal que el sistema cumpla ciertos requisitos, además de la característica en frecuencia deseada.

Sistemas LTI y transformada de Fourier VI

Muchas veces la respuesta en frecuencia se representa en su forma polar:

$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j \arg H(j\omega)}, \ -\pi \leq \arg H(j\omega) < \pi$ También podemos definir la *fase extendida!!!*

La salida de un sistema se puede entonces escribir como:

$$Y(j\omega) = |H(j\omega)||X(j\omega)|e^{j \arg H(j\omega)} e^{j \arg X(j\omega)}$$

con lo cual obtenemos:

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)|$$

$$\arg Y(j\omega) = \arg H(j\omega) + \arg X(j\omega)$$

La magnitud de la respuesta en frecuencia altera la magnitud del espectro de la señal de entrada y la fase de la respuesta en frecuencia produce un *desplazamiento* en fase del espectro de la señal de entrada!! Por estas razones $|H(j\omega)|$ se conoce como *ganancia* del sistema y $\arg H(j\omega)$ se conoce como *desplazamiento de fase* del sistema. Dependiendo de nuestro objetivo estas cantidades pueden introducir cambios útiles en la señal de entrada o efectos indeseables. En ese caso hablamos de *distorsiones!*

Sistemas LTI y transformada de Fourier VII

Es el efecto de la ganancia de un sistema LTI es bastante simple de entender. El efecto de la fase es un poco más interesante para analizar. Pensemos por un momento en el sistema cuya respuesta en frecuencia es:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

Este sistema tiene ganancia unitaria por lo que no introduce niguna distorsión en la amplitud del espectro de la señal de entrada. Esto es $|Y(j\omega)| = |X(j\omega)|$. Sin embargo no podemos afirmar que $x(t) = y(t)$!!

La salida para este sistema se puede expresar fácilmente:

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Si bien es claro que $x(t) \neq y(t)$, la salida de este sistema preserva totalmente la forma de la señal de entrada, introduciendo simplemente un retardo en el tiempo!! Este sistema no presenta *distorsión de fase*!

Notar que el sistema anterior presenta:

$$\arg H(j\omega) = -\omega t_0$$

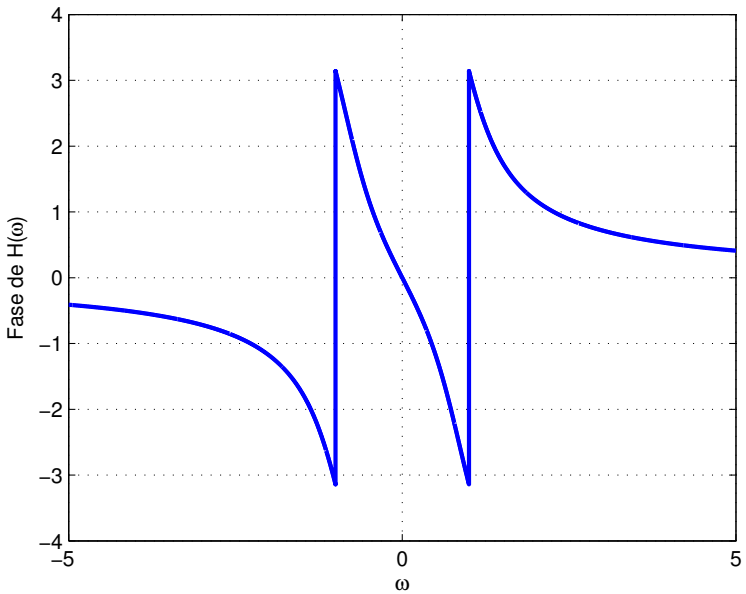
Es decir presenta *fase lineal*!! Los sistemas de fase lineal no tienen *distorsión de fase*!!

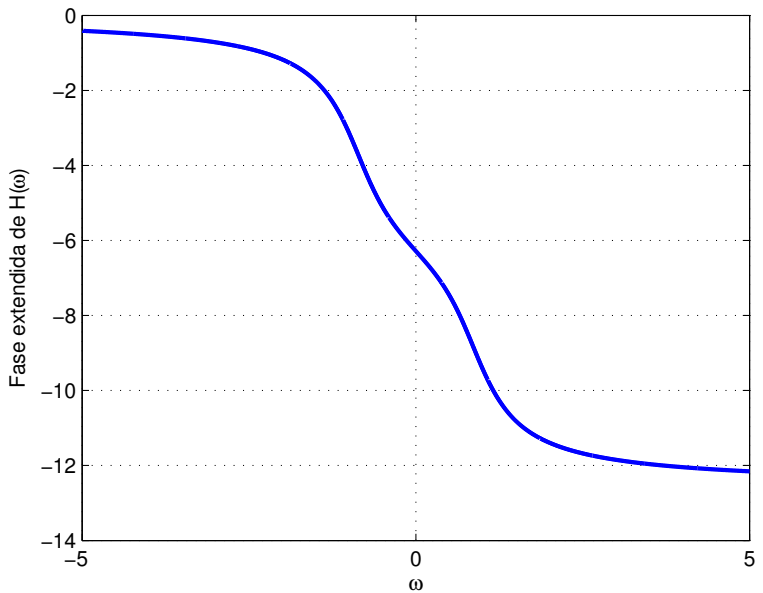
Consideremos ahora un sistema de fase no lineal:

$$H(j\omega) = \frac{1 - j\omega + (j\omega)^2}{1 + j\omega + (j\omega)^2}$$

$$|H(j\omega)| = 1, \ \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\arg H(j\omega) = -2 \arctan \left\{ \frac{\omega}{1 - \omega^2} \right\}, \ \forall \omega \in \mathbb{R}$$





Veamos la respuesta al impulso. Para ello podemos escribir (usando fracciones simples);

$$H(j\omega) = 1 - \frac{1 - j0.577}{j\omega + 0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1 + j0.577}{j\omega + 0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

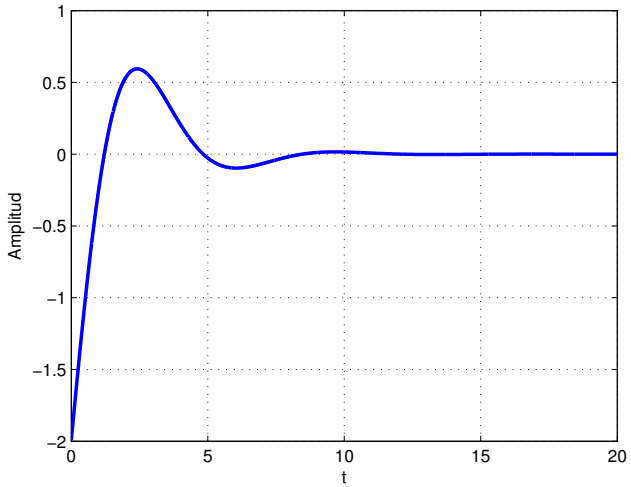
Usando que

$$\mathcal{F}\left[\delta(t)\right] = 1, \ \mathcal{F}\left[e^{-\alpha t}u(t)\right] = \frac{1}{\alpha + j\omega}, \ \Re\{\alpha\} > 0$$

tenemos que la respuesta al impulso se puede escribir:

$$h(t) = \delta(t) - 2.30e^{-0.5t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 0.5237\right)u(t)$$

La respuesta al impulso no es un impulso desplazado! No todas las frecuencias de la señal de entrada (en este caso un impulso unitario y que se encuentran todas en fase!!) se desplazan en una misma cantidad, haciendo que las fases de las mismas a la salida del sistema a un tiempo dado t sean diferentes. Esto da a lugar a interferencias constructivas y destructivas y al ensanchamiento temporal de la señal de salida!! Esto se conoce como *dispersión!*



En el gráfico no incluimos $\delta(t)$!!

Una medida de la dispersión introducida por un sistema se da por medio del *retardo de grupo* (definido para la *fase extendida*):

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg H(j\omega)$$

Obviamente si el sistema es de fase lineal $\tau(\omega) = \text{cte}$. El retardo de grupo permite cuantificar cuanto se adelantan o se atrasan las frecuencias de la señal de entrada a un sistema LTI que se encuentran alrededor de un entorno de frecuencia ω_0!!

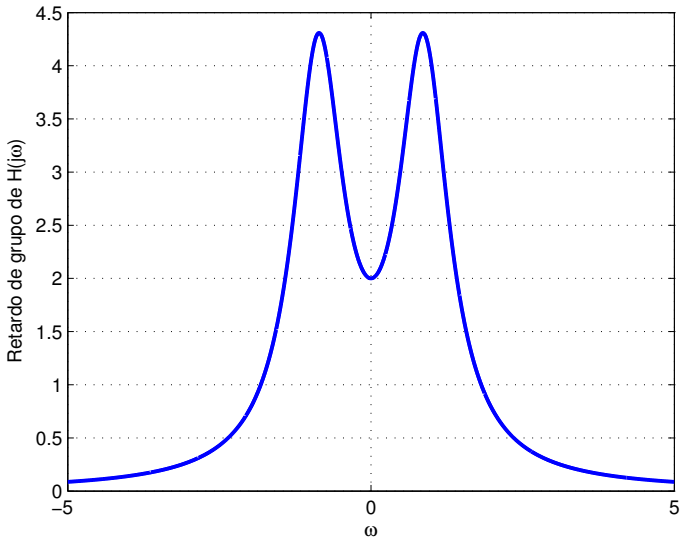
También se define el retraso de fase como :

$$\tau_f(\omega) = -\frac{\arg H(j\omega)}{\omega}$$

Si el sistema es de fase lineal, entonces $\tau_g(\omega) = \tau_f(\omega)$.

Sistemas LTI y transformada de Fourier XII

La transformada de Fourier de la señal de salida tiene fase lineal!! Vemos que todas las frecuencias de la señal de entrada $x(t)$ (cuyo espectro está concentrado alrededor de ω_0) se atrasan a la salida del sistema en una cantidad dada por $\tau(\omega_0)$. Es decir la señal de salida del sistema es básicamente igual a la señal de entrada (salvo un escalaje en amplitud y una fase) retrasada en el tiempo en una cantidad $\tau(\omega_0)$. El retardo de grupo proporciona el retardo sufrido por "un paquete concentrado de frecuencias". Notar que el concepto de retardo de grupo es el mismo que el de *velocidad de grupo* para un "paquete de ondas" (por ejemplo ondas electromagnéticas u ondas de materia!!).



Para el ejemplo que analizamos antes, es fácil ver que el mayor retardo se da para la frecuencia $\frac{\sqrt{3}}{2}$!! Esa oscilación determina de alguna forma las partes más tardías de la respuesta al impulso!!

Ecuaciones diferenciales y transformada de Fourier I

Muchos sistemas LTI causales (con la condición de reposo inicial discutida hace unas clases) van a estar descriptos por una ecuación diferencial con coeficientes constantes:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Si aplicamos el operador $\mathcal{F}[\cdot]$ a ambos lados obtenemos (aplicando linealidad):

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\left[\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right] = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]$$

Usando la propiedad de diferenciación:

$$Y(j\omega) \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k = X(j\omega) \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k$$

Para un sistema LTI tenemos que

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega), \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Ecuaciones diferenciales y transformada de Fourier II

Entonces obtenemos que:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

- Vemos que la respuesta en frecuencia del sistema es un cociente de polinomios, los cuales se obtienen por inspección a través de los coeficientes de la ecuación diferencial!
- De una ecuación diferencial pasamos a una expresión equivalente del sistema totalmente algebraica. Todo queda definido por los coeficientes de los polinomios o por lo que es los mismo por sus raíces. Esto simplifica mucho el análisis de los sistemas LTI!
- Podemos obtener la respuesta al impulso del sistema, en lugar de resolviendo la ecuación diferencial, antitransformando $H(j\omega)$! Para ello, dado que tenemos un cociente de polinomios, puede ser muy útil el método de fracciones simples (ver Apéndice de Oppenheim and Willsky).

Repaso...

- Condiciones de Dirichlet. Requisitos que garantizan que las señales de tiempo continuo presenten convergencia puntual de sus series de Fourier o de sus anti-transformadas. Sólo son condiciones suficientes!
- Serie de Fourier (SF) de tiempo continuo. Expresa una señal periódica de tiempo continuo $x(t)$ como una suma de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) en los armónicos $k\omega_0$ de la frecuencia fundamental ω_0 de la señal. Los factores de escala a_k se denominan coeficientes de la serie de Fourier.
- Transformada de Fourier (TF) de tiempo continuo. Expresa una señal aperiódica de tiempo continuo $x(t)$ como una integral de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) de todas las frecuencias. El factor de escala se denota por $X(\omega)$.
- Serie de Fourier de tiempo discreto (SFTD). Expresa una señal periódica de tiempo discreto $x[n]$ como una suma finita de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) en los armónicos k/N de la frecuencia fundamental $\frac{1}{N}$ de la señal. Los factores de escala se denominan coeficientes de la serie de Fourier, a_k, que a su vez forman una secuencia periódica, de período N.
- Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD). Expresa una señal aperiódica de tiempo discreto $x[n]$ como una integral de exponenciales complejas escaladas (o sinusoides) de todas las frecuencias. El factor de escala se denota por $X(\Omega)$.

Repaso...

- Espectro de amplitud ($X(\omega)$ o $X(\Omega)$). Un gráfico de los coeficientes de la serie de Fourier o la transformada en función de la frecuencia cuando estas cantidades tienen valores reales.
- Espectro de fase ($\angle X(\omega)$ o $\angle X(\Omega)$). Un gráfico de la fase de los coeficientes de la serie de Fourier o de la transformada en función de la frecuencia.
- Espectro de magnitud ($|X(\omega)|$ o $|X(\Omega)|$). Un gráfico de la magnitud de los coeficientes de la serie de Fourier o la transformada en función de la frecuencia.

Temas para leer por cuenta propia

Lectura obligatoria

- Tabla de propiedades de la transformada continua y discreta de Fourier y pares transformados básicos (Oppenheim and Willsky, Tablas 4.1, 4.2, 5.1 y 5.2).
- Apéndice de fracciones simples (Oppenheim and Willsky).
- Aspectos en el dominio del tiempo y la frecuencia de filtros ideales y no ideales (Oppenheim and Willsky, Secciones 6.3 y 6.4).
- Sistemas continuos de primer y segundo orden (Oppenheim and Willsky, Sección 6.5).
- Sistemas discretos de primer y segundo orden (Oppenheim and Willsky, Sección 6.6).
- Ejemplos de análisis de sistemas en el dominio del tiempo y la frecuencia (Oppenheim and Willsky, Sección 6.7).

Lectura optativa

- Filtrado selectivo en frecuencia con frecuencia central variable (Oppenheim and Willsky, Sección 4.5.1).
- Diagramas de Bode (Oppenheim and Willsky, Sección 6.2.3).
- Transformada discreta de Fourier (Oppenheim and Schafer, Secciones 2.7, 2.8 y 2.9).

Algunos ejercicios I

1. Ejercicios 4.10, 4.12, 4.14., 4.15, 4.16, 4.21 de Oppenheim and Willsky.
2. Ejercicios 4.40, 4.47, 4.51, 4.53 de Oppenheim and Willsky.
3. Demostrar que un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia es cero en un intervalo finito o infinito no es invertible.
4. Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo usando dualidad:

$$\mathcal{F}\left[-jtx(t)\right] = \frac{dX(j\omega)}{d\omega}, \quad \mathcal{F}\left[-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t)\right] = \int_{-\infty}^{\omega} X(j\nu)d\nu$$

5. Una forma precisa de cuantificar el problema de la localización simultánea en tiempo y frecuencia de un par transformado es a través del *principio de incertidumbre*. El mismo dice que:

$$D(x(t))D(X(j\omega)) \geq \frac{1}{2}$$

donde $D(f(t))$ es la *dispersión* de la señal $f(t)$ definida como:

$$D(f(t)) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2|f(t)|^2dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2dt}$$

Probar que la igualdad se alcanza cuando $x(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}}e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}$, lo que muestra que los pulsos gaussianos tienen la mejor localización simultánea en tiempo y frecuencia.

Algunos ejercicios II

6. Ejercicios 5.8, 5.9, 5.12, 5.21, 5.22, 5.23, 5.26, 5.32, 5.36 de Oppenheim and Willsky.
7. Ejercicios 5.37, 5.40, 5.46, 5.47 de Oppenheim and Willsky.

Tiempo de consultas

¿Preguntas?