

Apellido y Nombres:
 DNI: Padrón: Código Asignatura:
 Cursada. Cuatrimestre: Año: Profesor:
 Correo electrónico:

Análisis Matemático III.

Examen Integrador. Primera fecha. 9 de diciembre de 2024.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$, previo estudio de convergencia.

Ejercicio 2. Considerar el problema de la temperatura en estado estacionario en una placa plana y homogénea que coincide con el conjunto del plano dado por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 4, y \geq 0\}$$

y con temperatura de valor 1 en los puntos de la frontera de A que satisfacen $y > 1$ y cero en los que $y < 1$. Considerando que la constante de difusividad térmica es igual a 1, formularlo en términos de una ecuación diferencial con condiciones de contorno y obtener la solución $u(x, y)$.

Ejercicio 3. Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, continua y con derivada continua a trozos, con desarrollo seno de Fourier dado por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$.

Indicar en qué valores de $x \in [0, 2]$, la serie coincide con la función y en cuáles no. Resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0, t) = u(2, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq 2 \\ u_t(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

incluyendo, si es necesario, hipótesis adicionales sobre f .

Ejercicio 4. Hallar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(w) e^{iwt} dw = \operatorname{sh} t \mathbb{1}_{(-1,1)}(t)$, siendo $\hat{f}(w)$

la transformada de Fourier de f . Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}'(w)|^2 dw$.

Ejercicio 5. Obtener la transformada de Laplace de la solución de la ecuación:

$$xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0 \quad \forall x > 0$$

con condiciones iniciales $y(0^+) = 1, y'(0^+) = 0$.