Apellido y Nombres: ....,,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Segunda fecha. 11 de julio de 2023.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Hallar todas las funciones enteras f tales que $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{Re}(f(z) - z^2) = 3$ y $|f(1) - 1| = 5$.

Ejercicio 2. Determinar para qué valores de $\gamma \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{3\gamma}}{1+x^2}\, dx$ es convergente.

Calcular la integral para el caso $\gamma = 1/6$.

Ejercicio 3. Plantear el problema de la distribución de la temperatura en estado estacionario en la semifranja $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y > 0\}$ con los lados verticales perfectamente aislados y el lado inferior con temperatura $f(x)$ en cada $x \in (0, 1)$. ¿Qué condición adicional garantiza unicidad de solución? Resolver el problema para tal caso, bajo las hipótesis necesarias sobre f.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Probar que existe $\hat{f}$, la transformada de Fourier de f. Determinar si f es cuadrado integrable y calcular el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega$.

Ejercicio 5. Hallar $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(t) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau = H(t) - H(t-1) \quad \forall t \geqslant 0$$

siendo H la función de Heaviside. Señalar claramente las propiedades que utiliza e indicando las hipótesis bajo las cuales son válidas.