ANÁLISIS MATEMÁTICO III – SEGUNDO CUATRIMESTRE 2024

EXAMEN INTEGRADOR – PRIMERA FECHA – 09/12/2024

RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

---

1. Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ previo estudio de convergencia.

Resolución: Para todo b > 1: $\int_0^{b} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \int_0^{1} \frac{x^2}{1+x^4}dx + \int_1^{b} \frac{x^2}{1+x^2}dx$. La primera integral es la integral de una función continua en un intervalo cerrado y acotado. El integrando de la segunda integral admite la siguiente acotación muy sencilla (nos interesa la acotación en el intervalo de integración, es decir, para $x \geq 1$):

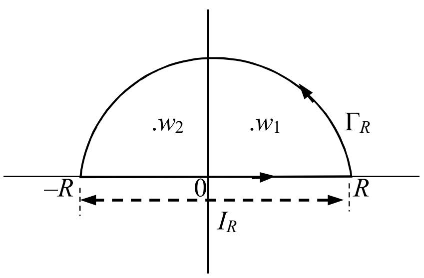
$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

Dado que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ es convergente, por el criterio de comparación para integrales con integrandos positivos, podemos afirmar que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ converge.

Cálculo: Calcularemos $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$ mediante los métodos clásicos del análisis de variable compleja. Consideramos la función $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)(z-w_4)}$, donde

$$w_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}},\ w_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}},\ w_3 = -e^{\frac{\pi}{4}i} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \text{ y } w_4 = -e^{\frac{3\pi}{4}i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

son las cuatro raíces cuartas de -1. Para cada R > 1, consideremos la integral de *f* sobre el siguiente circuito (ya muy popular) y aplicamos el teorema de los residuos:



$$\int_{I_R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i[RES(f,w_1) + RES(f,w_2)] \qquad (*R)$$

Como siempre, el plan es utilizar el hecho de que el segundo miembro de estas integrales no depende de *R*, mientras que la primera integral del primer miembro verifica:

$$\int_{I_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$$

Resta ver que $\underset{R\longrightarrow+\infty}{Lim} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$ (es un ejercicio clásico):

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{R^2.e^{2i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}} Rie^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} \left|\frac{R^2.e^{2i\theta}}{1+R^4e^{4i\theta}} Rie^{i\theta}\right| d\theta =$$

$$= R^3\int_0^{\pi} \left|\frac{1}{1+R^4e^{4i\theta}}\right| d\theta = R^3\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left|R^4e^{4i\theta}-(-1)\right|} \leq R^3\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left\|R^4e^{4i\theta}\right|-\left|-1\right\|} \overset{R>1}{=} \frac{R^3}{R^4-1}\int_0^{\pi} d\theta \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Por lo tanto, tomando límites en (*R) para $R \longrightarrow +\infty$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = 2\pi i[RES(f,w_1)+RES(f,w_2)]$$

El cálculo de estos residuos es sencillo pues se trata de dos polos simples:

$$(z-w_1)f(z) = \frac{z-w_1}{1+z^4}.z^2 \xrightarrow[z\to w_1]{} \frac{1}{4w_1^3}w_1^2 = \frac{1}{4w_1} \overset{|w_1|=1}{=} \frac{\overline{w_1}}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)$$

$$(z-w_2)f(z) = \frac{z-w_2}{1+z^4}.z^2 \xrightarrow[z\to w_1]{} \frac{1}{4w_2^3}w_2^2 = \frac{1}{4w_2} \overset{|w_2|=1}{=} \frac{\overline{w_2}}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(-1-i)$$

(Hemos recurrido a nuestro buen amigo L'Hôpital). Por lo tanto,

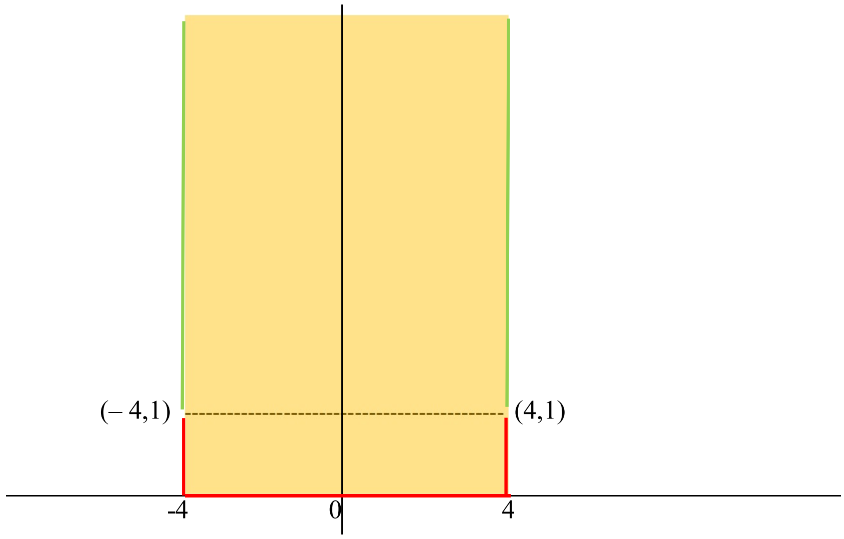
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = 2\pi i[RES(f,w_1)+RES(f,w_2)] = 2\pi i\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i) - \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i)\right) = \frac{\pi i}{2\sqrt{2}}(-2i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

***Respuesta* 1:** $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

---

2. Considerar el problema de temperatura en estado estacionario en una placa plana y homogénea que coincide con el conjunto del plano $A=\left\{(x,y)\in\Re^2 : |x|\le 4\ ,\ y\ge 0\right\}$, con temperatura de valor constante 1 en los puntos del borde de A con ordenada >1 y 0 en los de ordenada <1. Considerando que la constante de difusividad térmica es igual a 1, formularlo en términos de una ecuación diferencial con condiciones de contorno y obtener su solución $u(x,y)$.

Resolución: Se trata del problema de Dirichlet esquematizado en el siguiente gráfico:

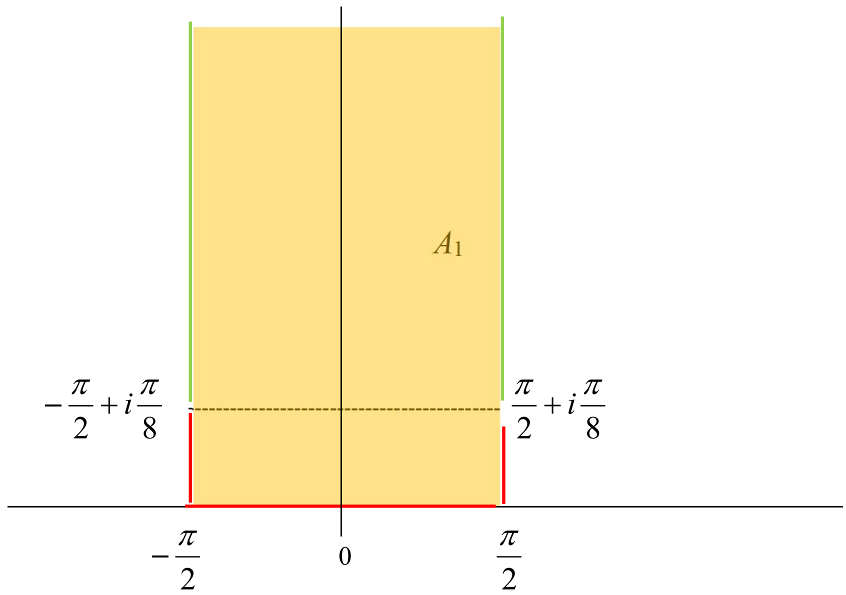


$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \text{ en el interior de la banda} \\ &u = 1 \text{ en las semirrectas verdes} \qquad (*) \\ &u = 0 \text{ en los segmentos rojos} \end{aligned}$$

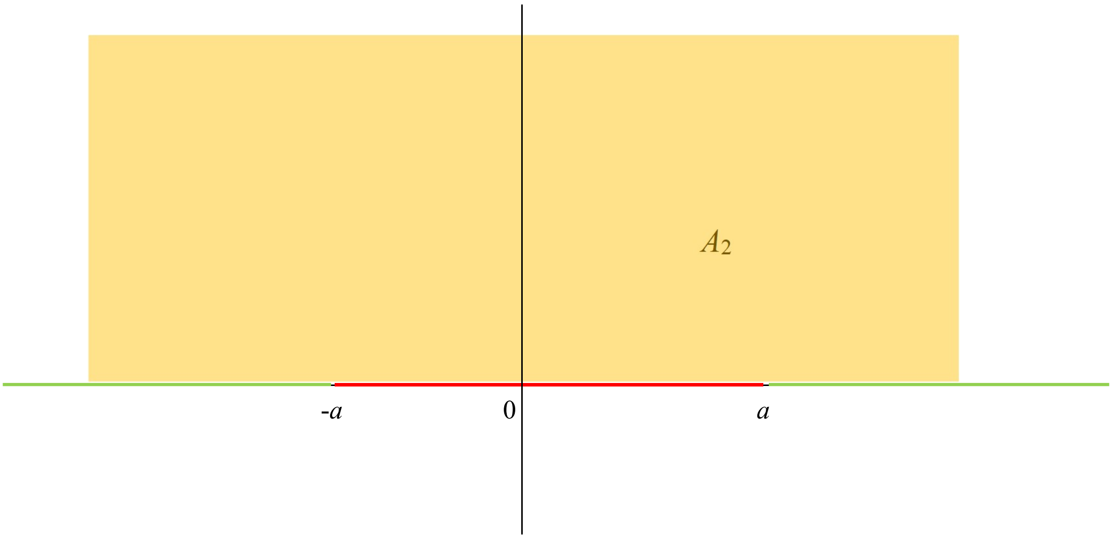
Además, vamos a considerar que u es acotada en A, con lo cual existe una única solución de este problema (el recinto A no es acotado, por lo tanto (*) no tiene solución única, pero sí una única solución acotada).

Para resolver este problema, donde las condiciones de contorno son seccionalmente constantes, podemos utilizar el método de las transformaciones conformes.

Primera transformación: $z\mapsto z_1=\frac{\pi}{8}z$:



Segunda transformación: $z_1 \mapsto z_2 = sen(z_1)$:

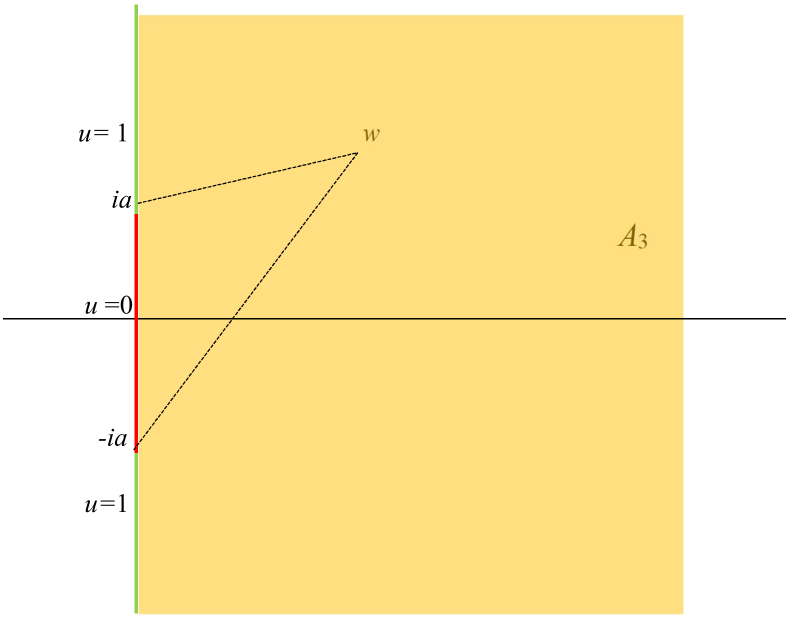


donde

$$a = sen\left(\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{8}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)senh\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cosh\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 1{,}078$$

(obsérvese que $sen\left(-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{8}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)senh\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right) = -a$)

Tercera transformación: $z_2 \mapsto w = -iz_2$:



Resumiendo: $w = -iz_2 = -isen(z_1) = -isen\left(\frac{\pi}{8}z\right)$ y $a = \cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Ahora, buscamos u en la forma $u = A\arg(w-ia) + B\arg(w+ia) + C$ y determinamos las constantes de manera que se verifiquen las condiciones de contorno:

(1) semirrecta verde superior: $A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi}{2} + C = 1$

(2) segmento rojo: $-A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi}{2} + C = 0$

(3) semirrecta verde inferior: $-A\frac{\pi}{2} - B\frac{\pi}{2} + C = 1$

Resolviendo (sumar y restar ecuaciones ayuda….) resultan $A = \frac{1}{\pi}$, $B = -\frac{1}{\pi}$ y $C = 1$. Finalmente, entonces:

$$u = \frac{1}{\pi}\arg(w-ia) - \frac{1}{\pi}\arg(w+ia) + 1 = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(w-ia)}{\operatorname{Re}(w-ia)}\right) - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(w+ia)}{\operatorname{Re}(w+ia)}\right) + 1$$

(por favor, no confundir argumentos con arcotangentes….) Observemos que aquí podemos utilizar la función arcotangente pues los argumentos de $w - ia$ y de $w+ia$ varían entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Se puede completar la cuenta para obtener la forma explícita de u como función de x e y, es decir: de la parte real y de la parte imaginaria de z. Hagamos las cuentitas:

$$w = -iz_2 = -isen(z_1) = -isen\left(\frac{\pi}{8}z\right) = -isen\left(\frac{\pi}{8}x + i\frac{\pi}{8}\right) =$$
$$= -i\left[sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right) - isen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)$$

$$w - ia = \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right) - i\left(sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right) + a\right)$$
$$w + ia = \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right) - i\left(sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right) - a\right)$$

Por lo tanto:

$$u = \frac{1}{\pi}\arctan\left(-\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right) + a}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right) - \frac{1}{\pi}\arctan\left(-\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right) - a}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right) + 1$$

Dado que la función arcotangente es impar y teniendo en cuenta que $a = \cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

***Respuesta* 2**:

$$u(x,y)=-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)+\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)+\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{8}y\right)-\cosh\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)senh\left(\frac{\pi}{8}y\right)}\right)+1$$

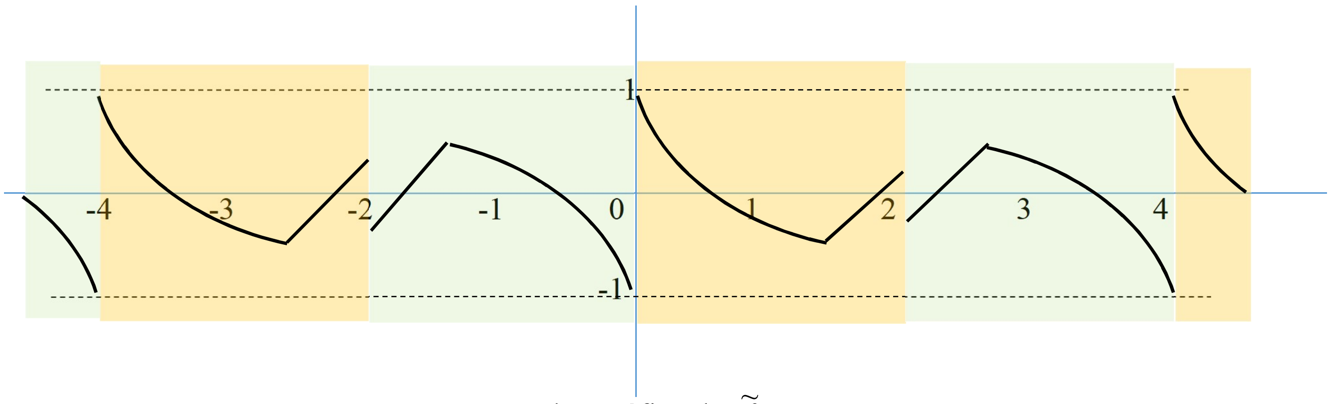
(Se puede comprobar con cierto trabajo que esta función es solución del problema de Dirichlet planteado. Observe que es acotada, por lo tanto es la única solución *acotada* de dicho problema. En particular:

---

3. Sea $f:[0,2]\longrightarrow\Re$ continua y con derivada continua a trozos, con desarrollo seno de Fourier dado por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n^2}sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$. Indicar en qué valores $x\in[0,2]$ la serie converge a *f*(*x*) y en cuáles no. Resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0 & 0<x<2 \quad ,t>0 \\ (ii)\ u(0,t)=u(2,t)=0 & t\geq 0 \\ (iii)\ u(x,0)=f(x) & 0\leq x\leq 2 \\ (iv)\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 & 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

Resolución: La serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n^2}sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ es la serie de Fourier de la extensión impar de *f* con período 4. Indiquemos con $\tilde{f}$ esta extensión.



Idea gráfica de $\tilde{f}$

Esta función es continua a trozos en toda la recta y con derivadas laterales finitas en todo punto. Por lo tanto, verifica las condiciones de Dirichlet, por lo que podemos afirmar que para todo $x \in \Re$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)]$$

En particular, para todo $x \in (0,2)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x^+) + \tilde{f}(x^-)] = \tilde{f}(x) = f(x)$ (pues $\tilde{f}$ es continua en (0,2), por serlo *f*. (Atención: no estamos diciendo que la continuidad de *f* garantice la convergencia de su serie de Fourier en todo punto. Hemos repetido hasta el cansancio que la continuidad no es condición suficiente. Pero f, además de ser continua, tiene derivadas laterales finitas, lo que garantiza la convergencia puntual). Ahora, para $x = 0$ y $x = 2$, obviamente la serie converge a 0, pues todos sus términos se anulan. Por lo tanto, en estos puntos la serie converge a $f(0)$ y $f(2)$ respectivamente sii $f(0) = f(2) = 0$, caso contrario no.

***Respuesta* 3**: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ converge a $f(x)$ para todo $x \in (0,2)$; si $x \in \{0,2\}$, la serie converge a $f(x)$ sii $f(0) = f(2) = 0$.

Observación: Si $f(0) = f(2) = 0$, $\tilde{f}$ resulta continua en toda la recta real. Por lo tanto, si la sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, la serie converge absolutamente (es un ejercicio muy sencillo) y resulta entonces uniformemente convergente a $\tilde{f}$ en toda la recta (Teorema 5.a – Apuntes sobre series de Fourier, página 22).

Resolución del problema: mediante el tradicional método de separación de variables y el principio superposición, se obtiene la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\sqrt{3}\,\frac{n\pi t}{2}\right)$$

Obsérvese que si $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, la convergencia de esta serie es muy bonita.

---

4. Hallar $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\,'(\omega) e^{i\omega t} d\omega = sh(t)\chi_{(-1,1)}(t)$, siendo $\hat{f}$ la transformada de Fourier de *f*. ¿Es única? . Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}\,'(\omega)\right|^2 d\omega$.

Resolución: Como puede leerse en los Apuntes sobre la Transformada de Fourier (apuntes del curso), página 14, propiedad 6, si las funciones $f(x)$ y $xf(x)$ son absolutamente integrables, entonces $\hat{f}$ es derivable, y su derivada es la transformada de Fourier de $-ixf(x)$. Tendríamos, entonces, por el teorema de inversión, que

$$vp\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\,'(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2\pi[-ixf(x)]$$

En nuestro caso, tendríamos que $2\pi[-ixf(x)] = senh(x)1_{(-1,1)}(x)$, es decir:

$$f(x) = \frac{isenh(x)}{2\pi x}1_{(-1,1)}(x)$$

Observación: En $x = 0$ podemos definir $f(0) = \dfrac{i}{2\pi}$ y f resulta continua en este punto; por otra parte, para poder aplicar el teorema de inversión en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, el valor de f debe ser el promedio del salto de discontinuidad, es decir: $f(-1) = f(1) = \dfrac{i}{4\pi}senh(1)$.

Esta función verifica todas las condiciones necesarias para la aplicación de las propiedades mencionadas y por lo tanto satisface las condiciones requeridas en el enunciado. Desde luego que no es única, pues modificando el valor de f en algún punto cualquiera (por ejemplo, en $x = 18$) se obtiene una función con la misma transformada de Fourier que f y por lo tanto satisface la mismas condiciones del enunciado.

Cálculo de $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}'(\omega)\right|^2 d\omega$: Puesto que $-ixf(x)$ es claramente de cuadrado absolutamente integrable, podemos utilizar la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}'(\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left|-ixf(x)\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \left|senh(x)\right|^2 dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} senh(x)^2 dx = \frac{1}{\pi}[\cosh(x)senh(x) - x]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\pi}[\cosh(1)senh(1) - 1]$$

***Respuesta* 4**: $f(x) = \dfrac{isenh(x)}{2\pi x}1_{(-1,1)}(x)$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}'(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}[\cosh(1)senh(1) - 1]$

---

5. Obtener la transformada de Laplace de la solución de la ecuación $xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0$ para todo $x > 0$, con las condiciones iniciales $y(0+) = 1$, $y'(0+) = 0$.

Resolución: Indiquemos con F la transformada de Laplace de y. Entonces (páginas 18 y 21 del Apunte sobre la Transformada de Laplace):

1) la transformada de Laplace de $xy(x)$ es $-F'(s)$
2) la transformada de Laplace de $y'(x)$ es $sF(s) - y(0+) = sF(s) - 1$
3) la transformada de Laplace de $y''(x)$ es $s^2F(s) - sy(0+) - y'(0+) = s^2F(s) - s$
4) la transformada de Laplace de $xy''(x)$ es

$$-[s^2F(s) - sy(0+) - y'(0+)]' = -2sF(s) - s^2F'(s) + y(0+) = -2sF(s) - s^2F'(s) + 1$$

Transformando la ecuación tenemos entonces (siempre y cuando $\mathrm{Re}(s) > 0$):

$$-2sF(s)-s^2F'(s)+1+2sF(s)-2-F'(s)=0$$

Es decir: $(1+s^2)F'(s)+1=0$, $\operatorname{Re}(s)>0$

Para $s=\sigma$ real y positivo, una primitiva de $-\dfrac{1}{1+\sigma^2}$ en $(0,+\infty)$ es $-arctg(\sigma)$. Puesto que $(0,+\infty)$ es conexo, existe una constante c tal que $F(\sigma)=c-arctg(\sigma)$. Puesto que debe verificarse $\underset{\sigma\to+\infty}{Lim}F(\sigma)=0$, necesariamente es $c=\dfrac{\pi}{2}$, es decir: $F(\sigma)=\dfrac{\pi}{2}-arctg(\sigma)$ para todo $\sigma>0$. Dado que F es holomorfa en el semiplano $H=\{s\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(s)>0\}$, existe una única extensión analítica de $arctg(\sigma)=\dfrac{\pi}{2}-F(\sigma)$ a dicho semiplano. Indiquemos con *Arctg* dicha extensión. Tenemos entonces que la transformada de Laplace de *y* es

$F(s)=\dfrac{\pi}{2}-Arctg(s)$.

***Respuesta* 5**: La transformada de Laplace pedida es $F(s)=\dfrac{\pi}{2}-Arctg(s)$

Observación: Podemos obtener información sobre nuestra función *Arctg* de una manera más artesanal: despejando *w* en función de *s* de la ecuación $s=tg(w)$, donde *w* – obviamente - debe pertenecer al dominio de la función tangente.

$$s=\frac{sen(w)}{\cos(w)}=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{i(e^{iw}+e^{-iw})}\Leftrightarrow is=\frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}\Leftrightarrow ise^{2iw}+is=e^{2iw}-1\Leftrightarrow 1+is=(1-is)e^{2iw}\Leftrightarrow e^{2iw}=\frac{1+is}{1-is}$$

Aquí debemos elegir alguno de los infinitos logaritmos posibles. Resulta, para cualquiera de estos logaritmos y en el dominio correspondiente:

$$artg(s)=w=\frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+is}{1-is}\right)$$

Para elegir el logaritmo adecuado para nuestro problema, debemos estudiar primero en qué se transforma el semiplano $H=\{s\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(s)>0\}$ mediante la transformación $s\mapsto\dfrac{1+is}{1-is}$, para elegir el corte logarítmico. Luego, la rama logarítmica correspondiente a ese corte debe elegirse de manera que $\dfrac{1}{2i}\log\left(\dfrac{1+is}{1-is}\right)\xrightarrow[\operatorname{Re}(s)\to+\infty]{}\dfrac{\pi}{2}$ …. Un bonito trabajo.
