Apellido y Nombres: ..........................................................................................

DNI: ................................ Padrón: ................................ Código Asignatura: ............

Cursada. Cuatrimestre: ................. Año: ................... Profesor: ..............................

Correo electrónico: ..........................................................................................

**Análisis Matemático III.**
**Examen Integrador. Quinta fecha. 3 de marzo de 2023.**

*Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios*

**Ejercicio 1.** Se tiene una placa plana y homogénea que coincide con el semicírculo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1,\ y>0\}$ tal que la temperatura es de $0^oC$ en su frontera recta y de $10^oC$ en su frontera curva. La constante de difusividad térmica en la placa es igual a 1. Plantear un problema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que modele la distribución estacionaria de temperatura en la situación descripta y hallar la solución expresada en función de las variables $x, y$.

**Ejercicio 2.** Para cada una de las siguientes funciones definidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$f(x)=\operatorname{sen}(x^2-\pi^2) \qquad f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-\pi^2) & -\pi \leqslant x<0 \\ \operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2}) & 0\leqslant x<\pi \end{cases}$$

decidir si su serie trigonométrica de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$ converge puntualmente. En caso afirmativo, indicar a qué converge en cada $x \in \mathbb{R}$ y analizar si la convergencia es uniforme.

**Ejercicio 3.** Resolver;

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+4x & 0<x<L, t>0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0 & t\geqslant 0 \\ u(x,0)=0 & 0\leqslant x\leqslant L \\ u_t(x,0)=1 & 0\leqslant x\leqslant L \end{cases}$$

PRIMITIVAS PARA 12 EN PIZARRÓN ✓

**Ejercicio 4.** Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t \operatorname{sen} t}{1+t^2}dt$. Explicar cómo calcular dicha integral aplicando: (i) teoría de residuos, (ii) la transformada de Fourier de $ae^{-b|x|}$. Calcularla mediante alguno de los dos métodos.

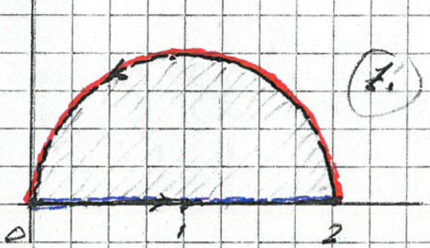
**Ejercicio 5.** Resolver para $t \geqslant 0$ el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, utilizando transformada de Laplace.

$$\begin{cases} -x' + 2y' - 3x + 6y = 0 \\ x' + y' + 4x + 3y = 11 \end{cases}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x(0^+) = y(0^+) = 0$.

1)


$Z \longmapsto Z_1 = 1 + Z$




CONTROL: $(Z_1 - 1)(\bar{Z}_1 - 1) = 1$

$\Leftrightarrow Z\bar{Z} - Z - \bar{Z} + 1 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} = 0$

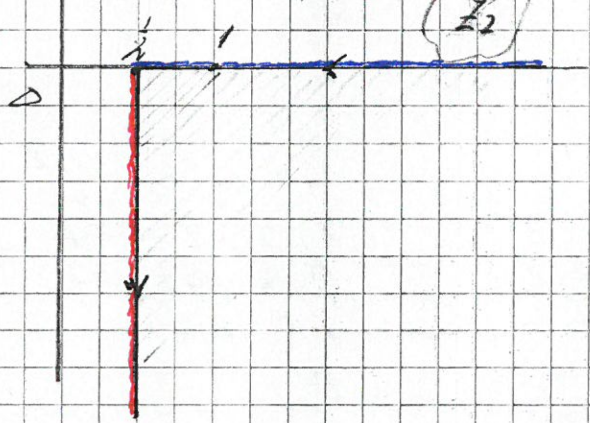
$\Leftrightarrow 1 - \bar{w} - w = 0$

$\Leftrightarrow \bar{w} + w = 1$

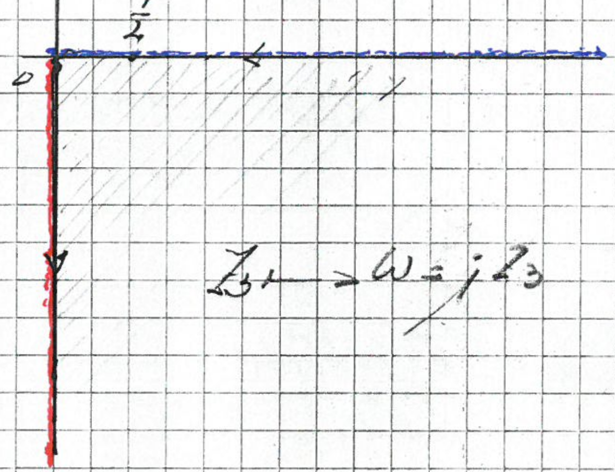
$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(w) = 1$ ✓

NORMAL: $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ ✓

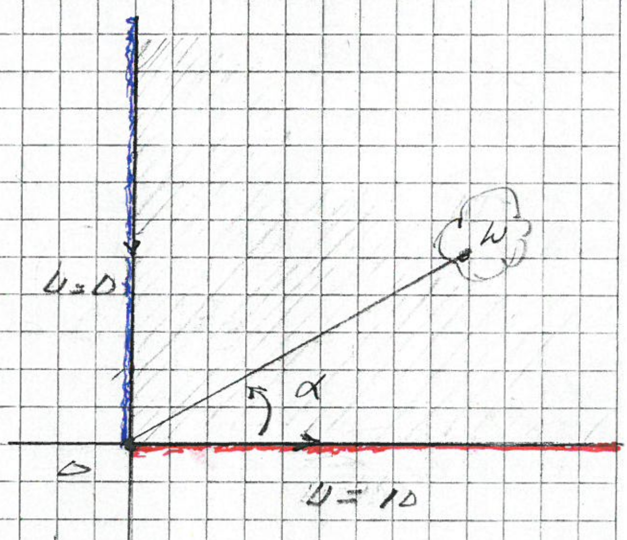
$Z_2 = \frac{1}{Z_1}$




$Z_2 \longmapsto Z_3 = Z_2 - \frac{1}{2}$




$Z_3 \longmapsto W = j Z_3$




OBS: ESTA ÚLTIMA TRANSFORMAGON NO ES NECESARIA.

$\alpha = \mathrm{ARG}(w)$

$$W = i\,Z_3 = i\left(Z_2 - \frac{1}{2}\right) = i\left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{2}\right) = i\left(\frac{1}{Z+1} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= i\,\frac{2-1-Z}{2(Z+1)} = \frac{i}{2}\,\frac{1-Z}{1+Z}$$

$$U = A + B\,\mathrm{ARG}(W)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (I) & A + B\cdot 0 = 10 \\ (II) & A + B\,\frac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} A = 10 \\ B = -\frac{20}{\pi} \end{array}$$

$$\boxed{U = 10 - \frac{20}{\pi}\,\mathrm{ARG}(W)}$$

$Z = X + Yi$

$$W = \frac{i}{2}\,\frac{1-Z}{1+Z} = \frac{i}{2}\,\frac{(1-Z)(1+\bar{Z})}{|1+Z|^2} = \frac{i}{2}\,\frac{1+\bar{Z}-Z-\overbrace{Z\bar{Z}}^{|Z|^2}}{|1+Z|^2} =$$

$$= \frac{i}{2}\,\frac{1+\cancel{X}-Yi-\cancel{X}-Yi-(X^2+Y^2)}{(X+1)^2+Y^2} =$$

$$= \frac{i}{2}\,\frac{1-(X^2+Y^2)-2Yi}{(X+1)^2+Y^2} = \frac{Y}{(X+1)^2+Y^2} + i\,\frac{1}{2}\,\frac{1-(X^2+Y^2)}{(X+1)^2+Y^2}$$

$$\mathrm{ARG}(W) = \mathrm{ARG}\,\frac{\frac{1}{2}\left[1-(X^2+Y^2)\right]}{Y} = \boxed{\mathrm{ARG}\left[\frac{1-(X^2+Y^2)}{2Y}\right]}$$

$$\boxed{U(X,Y) = 10 - \frac{20}{\pi}\,\mathrm{ARG}\left[\frac{1-(X^2+Y^2)}{2Y}\right]}$$

3

OBS 1: DADO QUE EN EL SEMICÍRCULO ES $\frac{1-(X^2+Y^2)}{2Y} > 0$

Y QUE PARA TODO $\alpha > 0$ ES

$$\operatorname{ARTG}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{ARTG}(\alpha)$$

ES:

$$U(X,Y) = 10 - \frac{20}{\pi}\operatorname{ARTG}\left\{\frac{1-(X^2+Y^2)}{2Y}\right\} =$$

$$= 10 - \frac{20}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \operatorname{ARTG}\left[\frac{2Y}{1-(X^2+Y^2)}\right]\right\} =$$

$$= \boxed{\frac{20}{\pi}\operatorname{ARTG}\left[\frac{2Y}{1-(X^2+Y^2)}\right]}$$

VERIFICACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO.-

(A) $1-(X^2+Y^2) > 0 \Rightarrow \lim_{Y \to 0^+} \frac{20}{\pi}\operatorname{ARTG}\left[\frac{2Y}{1-(X^2+Y^2)}\right] = 0$ ✓

(B) $Y > 0 \Rightarrow \lim_{(X^2+Y^2) \to 1^-} \frac{20}{\pi}\operatorname{ARTG}\left[\frac{2Y}{1-(X^2+Y^2)}\right] = \frac{20}{\pi}\frac{\pi}{2} = 10$ ✓

2 | EN $[-\pi,\pi]$:

(A) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2-\pi^2) = \operatorname{sen}[(x-\pi)(x+\pi)] =$

$= \operatorname{sen}(x^2)\cos(\pi^2) + \cos(x^2)\operatorname{sen}(\pi^2)$.

• $f$ NO ES PERIÓDICA: SI TUVIERA ALGÚN PERÍODO $P>0$, PARA TODO $x$ SERÍA $f(x+P) = f(x)$, ES DECIR:

$$\operatorname{sen}(x^2-\pi^2) = \operatorname{sen}[(x+P)^2-\pi^2] =$$
$$= \operatorname{sen}(x^2-\pi^2+2xP+P^2)$$
$$= \operatorname{sen}(x^2-\pi^2)\cos(2xP+P^2)$$
$$+ \cos(x^2-\pi^2)\operatorname{sen}(2xP+P^2)$$

TENDRÍA QUE SER $\cos(2xP+P^2) = 1$ Y $\operatorname{sen}(2xP+P^2) = 0$ PARA TODO $x$, ES DECIR, $P=0$ (ABSURDO)

• SEA $\tilde{f}$ LA EXTENSIÓN $2\pi$-PERIÓDICA DE $f$:

OBS (INNECESARIA): $\sin(x^2-\pi^2)=0$ SII $x=\sqrt{\pi^2+k\pi}$ Ó $x=-\sqrt{x^2+k\pi}$, DONDE $k\in\mathbb{Z}$. DEBE VERIFICAR $\pi^2+k\pi\geq 0$ ES DECIR: $k\geq-\pi$. POR OTRA PARTE, LOS CEROS DE $f$ EN $[0,\pi]$ DEBEN VERIFICAR $\sqrt{\pi^2+k\pi}\leq\pi$, ES DECIR: $0\leq\pi^2+k\pi\leq\pi^2$ ; $-\pi\leq k\leq 0$, LO QUE IMPLICA $k\in\{0,-1,-2,-3\}$. LOS CEROS DE $f$ EN $[0,\pi]$ SON, ENTONCES:

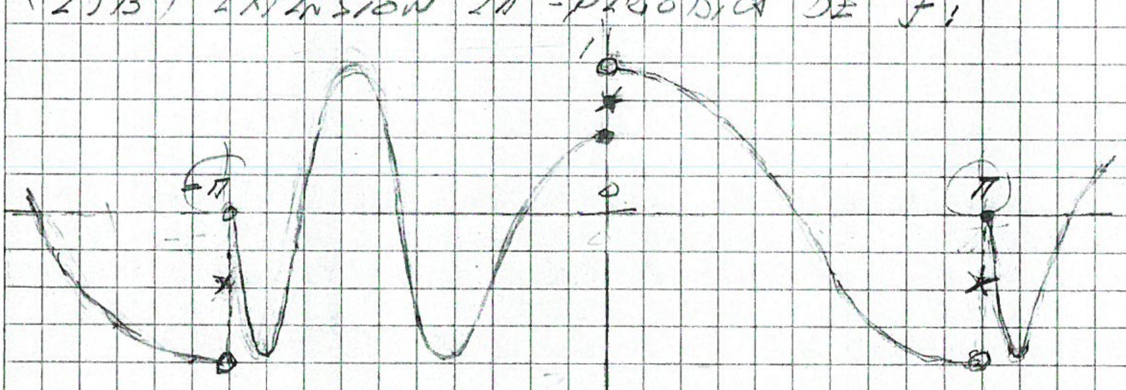
$$\sqrt{\pi(\pi-3)}\approx 0.66,\ \sqrt{\pi(\pi-2)}\approx 1.90,\ \sqrt{\pi(\pi-1)}\approx 2.60,\ \pi.$$

---

CONVERGENCIA PUNTUAL: $\tilde{f}$ ES CONTINUA Y VERIFICA LAS CONDICIONES DE DIRICHLET EN TODO PUNTO DE $\mathbb{R}$. POR LO TANTO LA SERIE DE FOURIER DE $f$ CONVERGE PUNTUALMENTE A $\tilde{f}$ EN TODO $\mathbb{R}$.

CONVERGENCIA UNIFORME: $\tilde{f}$ ES CONTINUA Y ADEMÁS $\tilde{f}'$ ES SECCIONALMENTE CONTINUA. POR TEOREMA 5.6 DEL «APUNTE SOBRE SERIES DE FOURIER», PODEMOS ASEGURAR QUE LA SERIE DE FOURIER DE $f$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A $\tilde{f}$ EN $\mathbb{R}$.

(2) B) EXTENSION $2\pi$-PERIODICA DE $f$:




$f(x) = \sin(x^2 - \pi^2)$ | $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

LA SERIE DE FOURIER DE $f$ CONVERGE PUNTUALMENTE A

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left[\tilde{f}(x^-) + \tilde{f}(x^+)\right]$$

EN CADA $x \in \mathbb{R}$, PUES VERIFICA LAS CONDICIONES DE DIRICHLET

LA CONVERGENCIA NO PUEDE SER UNIFORME, PUES $\tilde{f}$ NO ES CONTINUA ($0, \pi, \ldots$)

7 bis

$\lambda = 4$

3) $(I)_u \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \lambda x \quad , \quad 0 < x < L, \ t > 0$

$(II)_u \quad u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0$

$(III)_u \quad u(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq L$

$(IV)_u \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq L$

---

$v(x,t) \stackrel{DEF}{=} u(x,t) + \frac{\lambda}{6} x^3 - \frac{\lambda}{6} L^2 x$ (VER OBS. 1)

$(I)_v \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda x \stackrel{(I)_u}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

$(II)_v \begin{cases} v(0,t) = u(0,t) = 0 \\ v(L,t) = u(L,t) + \frac{\lambda L^3}{6} - \frac{\lambda L^3}{6} = 0 \end{cases}$

$(III)_v \quad v(x,0) = u(x,0) + \frac{\lambda}{6} x^3 - \frac{\lambda}{6} L^2 x = \boxed{\frac{\lambda}{6} x^3 - \frac{\lambda}{6} L^2 x}$

$(IV)_v \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \boxed{1}$

OBS. 1 EL TÉRMINO $\frac{\lambda}{6} x^3 - \frac{\lambda}{6} L^2 x$ SE OBTIENE DETERMINANDO LOS COEFICIENTES DE $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ DE MANERA QUE SE SIMPLIFIQUEN LAS ECUACIONES PARA $v(x,t) = u(x,t) + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

PASANDO EN LIMPIO:

$(I)_v \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) \qquad 0<x<L, \; t>0$

$(II)_v \quad v(0,t) = v(L,t) = 0 \qquad t \geq 0$

$(III)_v \quad v(x,0) = \frac{\lambda}{6}x^3 - \frac{\lambda L^2}{6}x \qquad 0 \leq x \leq L$

$(IV)_v \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 1 \qquad 0 \leq x \leq L.$

---

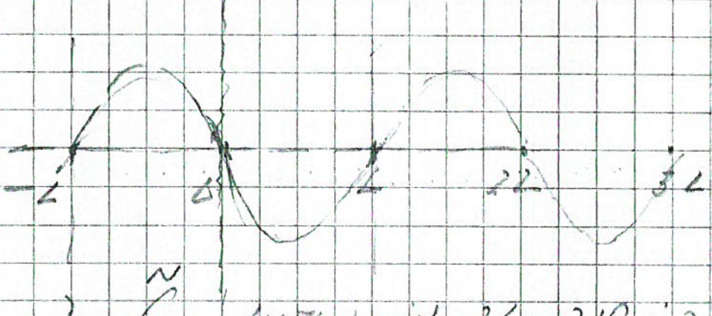
$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right]$$

} VERIFICA $(I)_v$ (SUPONIENDO UNA CONVERGENCIA "FUERTE") y $(II)_v$.

AHORA:

$$(III)_v \quad v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \overset{\text{IGUALDAD}}{=} \frac{\lambda}{6}x^3 - \frac{\lambda}{6}L^2 x$$

∴ LOS COEFICIENTES $A_1, A_2, A_3, \ldots$ SON LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE LA EXTENSIÓN 2L-PERIÓDICA IMPAR DE $f(x) = \frac{\lambda}{6}x^3 - \frac{\lambda}{6}L^2 x = \frac{\lambda}{6}x(x^2-1)$, $0 \leq x \leq L$.




} $\tilde{f}$ = EXTENSIÓN 2L-PERIÓDICA IMPAR DE $f$

ES PAR: $\forall\, n \geq 1$

$$A_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^{L} f^{N}(\theta) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{f^{N}(\theta) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\theta\right)}_{par} d\theta =$$

$$= \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f^{N}(\theta) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{2}{L} \int_{0}^{L} \frac{\lambda}{6} \left(\theta^3 - L^2\theta\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{\lambda}{3L} \int_{0}^{L} \left(\theta^3 - L^2\theta\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\theta\right) d\theta = \frac{2\lambda L^3 (-1)^n}{n^3\pi^3}$$

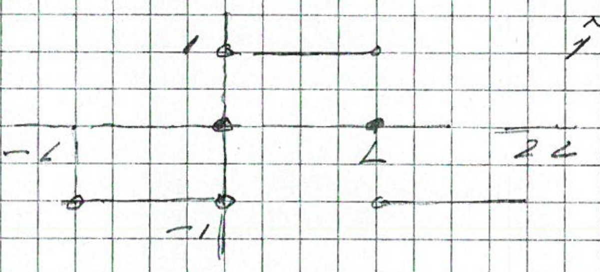
(VER CÁLCULO NA PÁGINA 11)

(IV) $\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = 1 \quad 0 \le x \le L$

$\therefore$ Los coeficientes $B_1 \frac{\pi}{L}, B_2 \frac{2\pi}{L}, B_3 \frac{3\pi}{L}, \dots$ son

los coeficientes de Fourier de la extensión 2L-periódica

impar de 1 $(0 \le x \le L)$:




$\therefore \forall n \ge 1$:

$$B_n \frac{n\pi}{L} = \frac{2}{2L} \int_{-L}^{L} \underbrace{\tilde{1}(\theta) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\theta\right)}_{par} d\theta =$$

$$= \frac{2}{L} \int_{0}^{L} \tilde{1}(\theta) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{2}{L} \int_{0}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\theta\right) d\theta = \frac{2}{L} \left[ -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) \right]_0^L =$$

$$= \frac{2}{L} \cdot \frac{-L}{n\pi} \cdot \{ -\cos(n\pi) + 1 \} =$$

$$= \frac{-2}{n\pi} \{ -(-1)^n + 1 \} = \frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}$$

$$\therefore B_n = \frac{L}{n\pi} \cdot \frac{2}{n\pi} [1-(-1)^n] = \boxed{\frac{2L}{n^2\pi^2} [1-(-1)^n]}$$

∴ LA SOLUCIÓN ES

$$U(X,T) = V(X,T) - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{6}L^2 X = \qquad \boxed{1 = 4}$$

$$= -\frac{1}{6}X^3 + \frac{N L^2}{6}X + \sum_{N=1}^{\infty} \operatorname{SEN}\left(\frac{N\pi}{L}X\right)\left\{A_N \cos\left(\frac{N\pi T}{L}\right) + B_N \operatorname{SEN}\left(\frac{N\pi}{L}T\right)\right\}$$

DONDE $\quad B_N = \frac{2L}{N\pi^2}\{1-(-1)^N\}$ $\qquad \frac{2L^3(-1)^N}{N^3\pi^3}$

$$Y \quad A_N = \frac{1}{3L}\int_0^L (\theta^3 - L^2\theta)\operatorname{SEN}\left(\frac{N\pi\theta}{L}\right)d\theta \overset{(*)}{=} \frac{1}{3L}\cdot\frac{6L^4(-1)^N}{N^3\pi^3}$$

(*): CÁLCULO: UNA PRIMITIVA DEL INTEGRANDO ES (VER PAG. 12).-

$$h(\theta) = -\frac{P(\theta)\cos(\beta\theta)}{\beta} + \frac{P'(\theta)\operatorname{SEN}(\beta\theta)}{\beta^2} + \frac{P''(\theta)\cos(\beta\theta)}{\beta^3} - \frac{P'''\operatorname{SIN}(\beta\theta)}{\beta^4},$$

DONDE $P(\theta) = \theta^3 - L^2\theta$ Y $\beta = \frac{N\pi}{L}$, ES DECIR.-

$$h(\theta) = -\frac{(\theta^3 - L^2\theta)}{\beta}\cos(\beta\theta) + \frac{3\theta^2 - L^2}{\beta^2}\operatorname{SEN}(\beta\theta) +$$

$$+ \frac{6\theta}{\beta^3}\cos(\beta\theta) - \frac{6}{\beta^4}\operatorname{SEN}(\beta\theta).$$

$$\therefore h(L) - \underbrace{h(0)}_{=0} = 0 + \frac{2L^2}{\beta^2}\operatorname{SEN}(\beta L) + \frac{6L}{\beta^3}\cos(\beta L) - \frac{6}{\beta^4}\operatorname{SEN}(\beta L) =$$

$$= \frac{2L^2 \cdot L^2}{N^2\pi^2}\underbrace{\operatorname{SEN}\left(\frac{N\pi}{L}\cdot L\right)}_{=0} + \frac{6L\cdot L^3}{N^3\pi^3}\cos\left(\frac{N\pi L}{L}\right) - \frac{6\cdot L^4}{N^4\pi^4}\underbrace{\operatorname{SEN}\left(\frac{N\pi}{L}\cdot L\right)}_{=0}$$

$$= \frac{6L^4}{N^3\pi^3}\cos(N\pi) = \frac{6L^4}{N^3\pi^3}(-1)^N$$

## ALGUNAS PRIMITIVAS:

SEA $P(x)$ UN POLINOMIO DE GRADO $\leq 3$. ENTONCES, PARA TODO $\alpha \in \mathbb{C}$ NO NULO:

CONSTANTE ↓

$$P(x)e^{\alpha x} = \frac{d}{dx}\left\{\left[\frac{P(x)}{\alpha} - \frac{P'(x)}{\alpha^2} + \frac{P''(x)}{\alpha^3} - \frac{P'''}{\alpha^4}\right]e^{\alpha x}\right\}$$

(VERIFICACIÓN)

$$= \left[\frac{P'}{\alpha} - \frac{P''}{\alpha^2} + \frac{P'''}{\alpha^3} - 0\right]e^{\alpha x} + \alpha\left[\frac{P}{\alpha} - \frac{P'}{\alpha^2} + \frac{P''}{\alpha^3} - \frac{P'''}{\alpha^4}\right]e^{\alpha x}$$

$$= \left\{\cancel{\frac{P'}{\alpha}} - \cancel{\frac{P''}{\alpha^2}} + \cancel{\frac{P'''}{\alpha^3}} + P - \cancel{\frac{P'}{\alpha}} + \cancel{\frac{P''}{\alpha^2}} - \cancel{\frac{P'''}{\alpha^3}}\right\}e^{\alpha x} \quad \checkmark$$

---

SE DEDUCE (HACIENDO CUENTAS) QUE SI $P(x)$ Y $Q(x)$ SON POLINOMIOS DE GRADO $\leq 3$ (ALGUNO PUEDE SER NULO), ENTONCES PARA TODO $\beta \in \mathbb{R}$ UNA PRIMITIVA DE $P(x)\,\mathrm{sen}(\beta x) + Q(x)\cos(\beta x)$ ES:

CONSTANTE ↓

$$f(x) = -\frac{P(x)\cos(\beta x)}{\beta} + \frac{P'(x)\,\mathrm{sen}(\beta x)}{\beta^2} + \frac{P''(x)\cos(\beta x)}{\beta^3} - \frac{P'''\,\mathrm{sen}(\beta x)}{\beta^4} + \frac{Q(x)\,\mathrm{sen}(\beta x)}{\beta} + \frac{Q'(x)\cos(\beta x)}{\beta^2} - \frac{Q''(x)\,\mathrm{sen}(\beta x)}{\beta^3} - \frac{Q'''\cos(\beta x)}{\beta^4}$$

↑ CONSTANTE

(CUENTAS VERIFICADAS)

4) LA INTEGRAL $\int_0^{+\infty} \frac{X\sin(X)}{1+X^2}\,dX$ CONVERGE.

CRITERIO DE DIRICHLET APLICADO A $\int_1^{\infty} \frac{X\sin(X)}{1+X^2}\,dX$:

(I) $\alpha(X) = \frac{X}{1+X^2}$ ES POSITIVA Y DECRECIENTE EN $[1,+\infty)$,

PUES $\alpha'(X) = \frac{1+X^2-2X^2}{(1+X^2)} = \frac{1-X^2}{(1+X^2)^2} < 0$ PARA TODO

$X>1$.

(II) $\lim_{X\to+\infty} \alpha(X) = 0$

(III) $\forall\, b>1$: $\left|\int_1^b \sin(X)\,dX\right| = |\cos(b)-\cos(1)| \le 2$

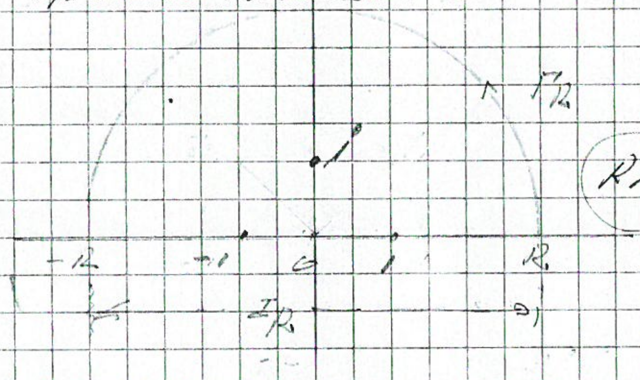
$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{X\sin(X)}{1+X^2}\,dX = \underbrace{\int_0^1 \frac{X\sin(X)}{1+X^2}\,dX}_{\text{CONTINUA}} + \int_1^{\infty} \frac{X\sin(X)}{1+X^2}\,dX$

CONVERGE. (PAGINA 9 DEL APUNTE SOBRE INTEGRALES IMPROPIAS)

OBS: LA CONVERGENCIA NO ES ABSOLUTA. ESTO PUEDE VERSE OBSERVANDO LA INTEGRAL $\int_0^{\infty} \frac{Xe^{iX}}{1+X^2}\,dX$, QUE NO CONVERGE ABSOLUTAMENTE PUES

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{Xe^{iX}}{1+X^2}\right| dX = \int_0^{\infty} \frac{X}{1+X^2}\,dX = \lim_{b\to\infty} \ln\left(\sqrt{1+b^2}\right) = +\infty$$

CÁLCULO DE $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^2}\,dx$ MEDIANTE RESIDUOS:




$R>1$

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{1+z^2} = \frac{z e^{iz}}{(z-i)(z+i)}$$

$\forall R>1$:

$$\int_{I_R} f + \int_{\Gamma_R} f = 2\pi i \cdot \mathrm{RES}(f, i)$$

$$(1) \quad \int_{I_R} f = \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \underbrace{\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{x\cos(x)}{1+x^2}\,dx}_{\text{IMPAR}}}_{=0} + i \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^2}\,dx}_{\text{PAR}}$$

$$= 2i \int_0^R \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^2}\,dx \xrightarrow{\quad} 2i \int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^2}\,dx$$

$$(2) \quad \left| \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} |f(z)|\,|dz| = \quad \begin{array}{|l} z = Re^{i\theta} \\ dz = iRe^{i\theta}\,d\theta \end{array}$$

$$= \int_0^{\pi} \left| \frac{Re^{i\theta}\, e^{i[R\cos(\theta) + iR\,\mathrm{sen}(\theta)]}}{1+R^2 e^{2i\theta}} \right| \left| iRe^{i\theta} \right| d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{R\, e^{-R\,\mathrm{sen}(\theta)}}{|1+R^2 e^{2i\theta}|}\, R\,d\theta = R^2 \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\,\mathrm{sen}(\theta)}}{|1+R^2 e^{2i\theta}|}\,d\theta \leq$$

(*)
$$\leq R^2 \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\sin(\theta)}}{R^2-1}\, d\theta = \frac{R^2}{R^2-1} \int_0^{\pi} e^{-R\sin(\theta)}\, d\theta \leq$$

LEMA DE JORDAN

$$\leq \frac{R^2}{R^2-1} \cdot \frac{\pi}{R} = \frac{R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$\therefore$

$$\cancel{2i} \int_0^{\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^2}\, dx = \cancel{2\pi i}\, \operatorname{RES}(f, i)$$

$(*)\ |R^2 e^{2i\theta}+1| = |R^2 e^{2i\theta}-(-1)| \geq \big|\,|R^2 e^{2i\theta}| - |-1|\,\big| =$

$= |R^2-1|$. HEMOS UTILIZADO ESTA DESIGUALDAD

A-VECES: $\big|\,|a|-|b|\,\big| \leq |a-b|$ PARA TODOS $a, b$ EN $\mathbb{C}$.

CÁLCULO DE $\alpha$

$$(z-i)f(z) = \frac{z e^{iz}}{z+i} \xrightarrow[z\to i]{} \frac{i}{2i} e^{-1} = \frac{e^{-1}}{2}$$

$$\therefore \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2e}}$$

(ii) CÁLCULO MEDIANTE LA T.F. DE $f(x) = e^{-|x|}$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\omega x}\, dx +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} = \left. \frac{e^{(1-i\omega)x}}{1-i\omega} \right|_{x \to -\infty}^{x=0} + \left. \frac{e^{-(1+i\omega)x}}{-(1+i\omega)} \right|_{x=0}^{x \to +\infty}$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} - 0 + 0 - \frac{1}{-(1+i\omega)} = \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{1-i\omega} =$$

$$= \frac{1-i\omega+1+i\omega}{(1+i\omega)(1-i\omega)} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{OBS: } \lim\limits_{x \to -\infty} e^{(1-i\omega)x} = 0 \quad \text{PUES } \left|e^{(1-i\omega)x}\right| = e^{x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-(1+i\omega)x} = 0 \quad \text{PUES } \left|e^{-(1+i\omega)x}\right| = e^{-x} \end{array} \right.$$

$\therefore \hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ . APLICANDO EL TEOREMA DE INVERSIÓN (SE VERIFICAN LAS HIPÓTESIS DEL TEOREMA):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} (\text{VP}) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \text{ , ES DECIR:}$$

$$e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{i\omega x}}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1+\omega^2} d\omega$$

$\therefore \forall x > 0:$

$$e^{-x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1+\omega^2} d\omega$$

DERIVANDO RESPECTO DE $x$ (ESTE PASO ES DELICADO...):

$$-e^{-x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega e^{i\omega x}}{1+\omega^2} d\omega$$

PARA $x = 1$:

$$-e^{-1} = \frac{i}{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\omega \cos(\omega)}{1+\omega^2}}_{\text{IMPAR}}}_{=0} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\omega \sin(\omega)}{1+\omega^2}}_{\text{PAR}} d\omega$$

$$\therefore \pi e^{-1} = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{\omega \sin(\omega)}{1+\omega^2} d\omega$$

OBTENEMOS

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{\omega \sin(\omega)}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2e}}$$

5) $\begin{cases} -x' + 2y' - 3x + 6y = 0 & x(0^+) = 0 \\ x' + y' + 4x + 3y = 11 & y(0^+) = 0 \end{cases}$

$\downarrow \mathcal{L}$

$$(I) \quad -sX(s) + \underbrace{x(0^+)}_{=0} + 2sY(s) - \underbrace{y(0^+)}_{=0} - 3X(s) + 6Y(s) = 0$$

$$(II) \quad sX(s) - \underbrace{x(0^+)}_{=0} + sY(s) - \underbrace{y(0^+)}_{=0} + 4X(s) + 3Y(s) = \frac{11}{s}$$

$$(I) \quad -(s+3)X(s) + 2(s+3)Y(s) = 0$$

$$(II) \quad (s+4)X(s) + (s+3)Y(s) = \frac{11}{s}$$

PARA $s \neq -3$ :

$$(I) \quad -X(s) + 2Y(s) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{X(s) = 2Y(s)}$$

$$(II) \quad (s+4)X(s) + (s+3)Y(s) = \frac{11}{s}$$

$$\Rightarrow \quad (s+4)2Y(s) + (s+3)Y(s) = \frac{11}{s}$$

$$[2(s+4) + s+3]\,Y(s) = \frac{11}{s}$$

$$(3s+11)Y(s) = \frac{11}{s}$$

$$Y(s) = \frac{11}{s(3s+11)} = \frac{1}{s} - \frac{3}{3s+11}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{11}{3}}$$

$\therefore \quad y(t) = H(t) - e^{-\frac{11}{3}t} H(t) = \left[1 - e^{-\frac{11}{3}t}\right] H(t)$

(verifica $y(0^+) = 0$)

Ahora, de $X(s) = 2Y(s)$ tenemos

$$\boxed{x(t) = 2\,\underbrace{\left[1 - e^{-\frac{11}{3}t}\right] H(t)}_{y(t)}}$$

Comprobación: $\forall\, t > 0$:

i) $-x' + 2y' - 3x + 6y = -2y' + 2y' - 6y + 6y = 0$ ✓

ii) $x' + y' + 4x + 3y = 2y' + y' + 8y + 3y =$

$= 3y' + 11y = +3 \cdot \frac{11}{3} e^{-\frac{11}{3}t} + 11\left(1 - e^{-\frac{11}{3}t}\right) =$

$= +11 e^{-\frac{11}{3}t} + 11 - 11 e^{-\frac{11}{3}t} = 11$ ✓