# RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

**EJERCICIO 1:** Recordemos el Teorema de Liouville: Si $h:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ es una función entera ( = holomorfa en todo el plano complejo) y acotada ( = existe una constante real $K\geq 0$ tal que para todo $z\in\mathbb{C}$ se verifica $|h(z)|\leq K$ ), entonces es constante. Un corolario inmediato es que si $h:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ es entera y existe (y es finito) $\lambda=\underset{z\to\infty}{Lim}|h(z)|$, entonces $h$ es constante y por lo tanto, para todo $z\in\mathbb{C}:|h(z)|=\lambda$. Recordemos por qué. Por definición de límite, dado un número real positivo cualquiera $\varepsilon$, existe un número real positivo $r_\varepsilon$ tal que para todo $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z|\geq r_\varepsilon$ se verifica $||h(z)|-\lambda|<\varepsilon$. En particular, para $\varepsilon=1$, existe $r_1>0$ para el cual se verifica $||h(z)|-\lambda|<1$ para todo $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z|\geq r_1$, es decir $-1\leq|h(z)|-\lambda\leq 1$; entonces, para todo $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z|\geq r_1$ es $|h(z)|\leq 1+\lambda$ (observe que por la hipótesis $\lambda=\underset{z\to\infty}{Lim}|h(z)|$, $\lambda$ es necesariamente un número real no negativo). Por otra parte, por ser $h$ holomorfa en $\mathbb{C}$ es continua y por lo tanto existe $M=\max\{|f(z)|:|z|\leq r_1\}$ (uno de los teoremas maravillosos de Weierstrass). Entonces, el número $K=\max\{1+\lambda,M\}$ es cota superior de $|h(z)|$ en todo el plano complejo. Por lo tanto, por el teorema de Liouville, $h$ es constante y la igualdad $|h(z)|=\lambda$ para todo $z\in\mathbb{C}$ se deduce trivialmente.

Ahora, el ejercicio 1: por ser $f$ entera, la función $h:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $h(z)=e^{f(z)-z^2}$ es entera y verifica $|h(z)|=e^{\mathrm{Re}(f(z)-z^2)}$. Por hipótesis y por la continuidad de la función exponencial, es $\lim\limits_{z\to\infty}|h(z)|=e^3$. Por el corolario precedente, $h$ es constante en $\mathbb{C}$ y para todo $z\in\mathbb{C}:|h(z)|=e^3$. Por lo tanto, $f(z)-z^2$ es constante (si no lo fuera, $h$ no sería constante: si un elefantito $\alpha$ se mueve, entonces $e^\alpha$ no se puede quedar quieta). Indiquemos $a+ib$ esta constante, es decir: $f(z)-z^2=a+ib$ para todo $z\in\mathbb{C}$. Por una de las hipótesis dadas, es decir $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{Re}(f(z)-z^2)=3$, se deduce que $a$ = 3. Por lo tanto tenemos que para todo $z\in\mathbb{C}$ es $f(z)=$ $=z^2+3+ib$ para alguna constante real $b$. Ahora, de la condición $|f(1)-1|=5$ se deduce que $|3+ib|=5$, es decir: $b\in\{-4,4\}$.

Por lo tanto: las dos únicas funciones que verifican las hipótesis del enunciado son $f_1(z)=z^2+3+4i$ y $f_2(z)=z^2+3-4i$.

---

**EJERCICIO 2:** Para cada par de números reales positivos $\varepsilon$ y $b$ tales que $0<\varepsilon<1<b$:

$$\int_{\varepsilon}^{b}\frac{x^{3\gamma}}{1+x^2}dx=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{x^{3\gamma}}{1+x^2}dx+\int_{1}^{b}\frac{x^{3\gamma}}{1+x^2}dx \quad . \tag{2.1}$$

Debemos determinar los valores reales de $\gamma$ para los cuales existen los límites

$$\text{(A)} \quad \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{x^{3\gamma}}{1+x^2}dx \qquad \text{y} \qquad \text{(B)} \quad \lim_{b\longrightarrow +\infty}\int_{1}^{b}\frac{x^{3\gamma}}{1+x^2}dx \quad . \tag{2.2}$$

Para $\gamma\geq 0$, el integrando de (A) es una función continua en el intervalo [0 , 1] y por lo tanto esta integral es un una integral propia. Respecto de (B), dado que el integrando es positivo, podemos utilizar el criterio de comparación asintótica con $\dfrac{1}{x^{2-3\gamma}}$:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{\dfrac{x^{3\gamma}}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x^{2-3\gamma}}}\right)=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1 \quad . \tag{2.3}$$

Dado que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{2-3\gamma}}dx$ converge sii $2-3\gamma>1$, concluimos que la integral (B) converge sii $\gamma<\dfrac{1}{3}$.

Para $\gamma<0$, la integral (B) converge, pues acabamos de probar que converge sii $\gamma<\dfrac{1}{3}$. Veamos qué pasa con (A) en el caso $\gamma<0$. Una de las formas de verlo (obviamente no es la única) es hacer primero el cambio de variables $x=\dfrac{1}{t}$ y $b=\dfrac{1}{\varepsilon}$:

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{x^{3\gamma}}{1+x^2}dx=\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{1}\frac{t^{-3\gamma}}{1+t^{-2}}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)=\int_{1}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{t^{-3\gamma}}{t^2+1}dt=\int_{1}^{b}\frac{t^{-3\gamma}}{t^2+1}dt \quad . \tag{2.4}$$

Dado que $\varepsilon\longrightarrow 0^+$ sii $b\longrightarrow +\infty$, y dado que $-3\gamma>0$, por el mismo criterio de comparación asintótica utilizado previamente resulta que (4) converge sii $-3\gamma<1$, es decir sii $-\dfrac{1}{3}<\gamma$ (recordemos que estamos considerando el caso $\gamma<0$).

***Resumiendo:*** la integral $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{3\gamma}}{1+x^2}dx$ converge sii $-\dfrac{1}{3}<\gamma<\dfrac{1}{3}$.

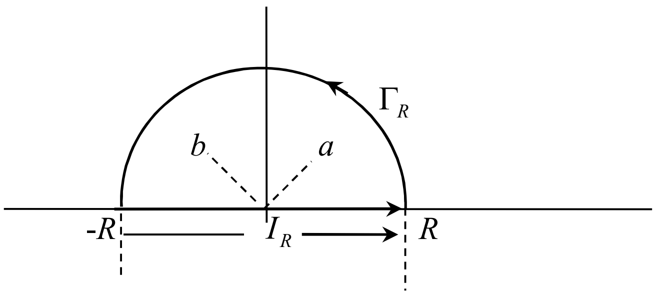
Cálculo para $\gamma = \frac{1}{6}$: $\int_0^{+\infty} \frac{x^{3\gamma}}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}dx$ . Una forma de calcular esta integral (no la única, aclaramos nuevamente), es hacer el cambio de variable $x = t^2$ :

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b^2} \frac{t}{1+t^4} 2t dt = 2 \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b^2} \frac{t^2}{1+t^4}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt \quad . \tag{2.5}$$

Ahora, el cálculo es ya un clásico: consideremos la función

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2}{z^4 - i^2} = \frac{z^2}{(z^2-i)(z^2+i)} = \frac{z^2}{(z-a)(z+a)(z-b)(z+b)} \, ,$$

holomorfa en $C - \{a, -a, b, -b\}$, donde $a$, $-a$, $b$ y $-b$ son las cuatro raíces cuartas de $-1$: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ y $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$




Para cada $R > 1$, consideremos el circuito simple positivo $J_R \cup \Gamma_R$ indicado en la figura, donde $J_R = \{x \in \Re : -R \le x \le R\}$ y $\Gamma_R = \{R.e^{i\theta} : 0 \le \theta \le \pi\}$. Tenemos, para cada $R > 1$ (Teorema de los residuos):

$$\int_{J_R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i [res(f,a) + res(f,b)] = 2\pi i \left[ \frac{a^2}{2a(a-b)(a+b)} + \frac{b^2}{(b-a)(b+a)2b} \right] =$$

$$= \pi i \left[ \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{b^2-a^2} \right] = \pi i \frac{a-b}{a^2-b^2} = \pi i \frac{1}{a+b} = \pi i \frac{1}{\frac{2i}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Por otra parte, $\int_{J_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{t^2}{1+t^4}dt \xrightarrow[R \to +\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt$ y además:

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| \le \int_{\Gamma_R} |f(z)||dz| = \int_{\Gamma_R} \frac{|z|^2}{|1+z^4|}|dz| = \int_0^{\pi} \frac{R^2}{|1+R^4 e^{i4\theta}|} |iRe^{i\theta} d\theta| =$$

$$= R^3 \int_0^{\pi} \frac{1}{|R^4 e^{i4\theta}+1|} d\theta \le R^3 \int_0^{\pi} \frac{1}{||R^4 e^{i4\theta}|-1|} d\theta = R^3 \int_0^{\pi} \frac{1}{R^4-1} d\theta = \frac{\pi R^3}{R^4-1} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

***Observación***: Recuérdese que estamos considerando $R > 1$, y por lo tanto se tiene la desigualdad $\left|1+R^4 e^{i4\theta}\right| \geq \left|\left|1\right| - \left|R^4 e^{i4\theta}\right|\right| = \left|1-R^4\right| = R^4 - 1$, válida para todo $\theta$.

Finalmente, tenemos el resultado: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}dx \overset{(2.5)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

---

**EJERCICIO 3**: Se trata del problema

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \Delta u(x,y) = 0 && ,\ 0 < x < 1\,,\ y > 0 \\
&(ii)\ \frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,y)}{\partial x} = 0 && ,\ y > 0 \\
&(iii)\ \ u(x,0) = f(x) && ,\ 0 < x < 1
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

que admite una única solución acotada (esta es la condición por la que se pregunta en el enunciado). Separando variables y aplicando el principio de superposición a las condiciones ($i$) y ($ii$), la solución acotada es de la forma

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) e^{-n\pi y} \quad . \tag{3.2}$$

*Observación*: Las soluciones de ($i$) de la forma $\cos(n\pi x)e^{n\pi y}$ se descartan por no ser acotadas.

Los coeficientes de la serie (3.2) se determinan a partir de la condición ($iii$):

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = f(x) \tag{3.3}$$

Claramente, estos coeficientes son los coeficientes de Fourier de la extensión 2-periódica par de $f$, que indicamos con $\widetilde{f}$:

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \widetilde{f}(t)\cos(n\pi t)dt = 2\int_0^1 \widetilde{f}(t)\cos(n\pi t)dt = 2\int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)dt \tag{3.4}$$

Para que todo esto funcione bien, la función $f$ debe ser seccionalmente continua y verificar las condiciones de Dirichlet en el intervalo [0 , 1] (existencia de derivadas laterales en cada punto de este intervalo). Estas condiciones implican la igualdad (3.3) en los puntos de continuidad de $f$. Si $x$ es un punto de discontinuidad de *f*, se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$. Además, por el Lema de Riemann, tenemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y entonces la convergencia de la serie (3.2), para $y > 0$, es maravillosa. Esto se puede ver sin demasiada sutileza utilizando una cota superior de la sucesión $(|a_n|)_n$: sea $K > 0$ tal que para todo $n \geq 0: |a_n| \leq K$ (que esta sucesión es acotada es consecuencia de $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). Entonces, para todo entero positivo *m*:

$$\sum_{n=0}^{m} |a_n||\cos(n\pi x)||e^{-n\pi y}| \leq \sum_{n=0}^{m} Ke^{-n\pi y} \leq K\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi y} \overset{(*)}{=} K\frac{1}{1-e^{-\pi y}}$$

Esta desigualdad, válida para todo entero positivo *m* y todo real $y > 0$, implica la convergencia absoluta y uniforme de la serie (3.2) en cada rectángulo $[0,1]\times[\delta, Y]$ contenido en $[0,1]\times[0,+\infty)$. Además, prueba que para todo $y > 0$:

$$|u(x,y)| \leq K\frac{1}{1-e^{-\pi y}}\,.$$

Es decir: no solamente resulta que *u* es acotada sino que $\lim_{y\to+\infty} u(x,y) = 0$. (*No se pide este último análisis*)

($*$) para $y > 0$ es $0 < e^{-\pi y} < 1$ y por lo tanto la serie geométrica converge.

---

**EJERCICIO 4**: Una aclaración inicial: no se pide calcular la transformada de Fourier de *f*.

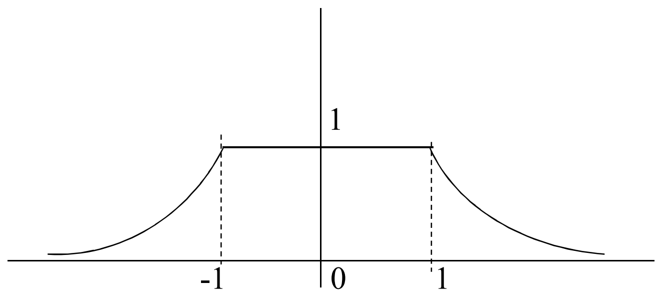



**Gráfico de *f***

Esta función admite transformada de Fourier por ser absolutamente integrable:

$$\int_0^b |f(x)|dx \overset{b>1}{=} \int_0^1 dx + \int_1^b \frac{dx}{x^2} = 1 + \left(-\frac{1}{x}\right)_{x=1}^{x=b} = 2 - \frac{1}{b} \xrightarrow[b\to+\infty]{} 2$$

(por ser *f* real, positiva y par se deduce inmediatamente que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 4$). Ahora, la integrabilidad de $|f|^2$ se deduce directamente del criterio de comparación para la convergencia de integrales impropias con integrandos positivos y de la desigualdad $|f(x)|^2 \le |f(x)|$, (válida en este caso, pues $|f(x)| \le 1$ para todo $x \in \Re$ ).También se puede verificar directamente:

$$\int_0^b |f(x)|^2 dx \overset{b>1}{=} 1 + \int_1^b \frac{dx}{x^4} = 1 + \left(-\frac{1}{3x^3}\right)_{x=1}^{x=b} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3b^3} \xrightarrow[b\to+\infty]{} \frac{4}{3}$$

Por lo tanto (*f* es par):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 2\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{8}{3}$$

Finalmente, por la identidad de Parseval (válida en este caso pues $f \in L^1(\Re) \cap L^2(\Re)$ ):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{16}{3}\pi$$

Ahora bien, por ser *f* par, su transformada de Fourier también (propiedad muy sencilla de verificar) y por lo tanto

$$\int_0^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{8}{3}\pi$$

---

**EJERCICIO 5**: La función $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ es una primitiva de *f* en $[0,+\infty)$ tal que $g(0^+) = 0$. Por lo tanto, $L(f)(s) = L(g')(s) = sL(g)(s) - g(0^+) = sL(g)(s)$. Se deduce que si $s \ne 0$: $L(g)(s) = \frac{1}{s}L(f)(s)$. Por lo tanto, aplicando la transformada de Laplace a la ecuación $f(t) + g(t) = H(t) - H(t-1)$ tenemos

$$L(f)(s) + \frac{1}{s}L(f)(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

Haciendo cuentas: $L(f)(s) = \frac{s}{s+1}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}\right) = \frac{1}{s+1} - \frac{e^{-s}}{s+1}$ y entonces

$$f(t) = e^{-t}H(t) - e^{-(t-1)}H(t-1)$$

---