

Departamento de Estabilidad

84.02/64.01 ESTABILIDAD I

## **PRINCIPIO DE TRABAJOS VIRTUALES**

Ing. Carolina Pérez Taboada<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> JTP del Dto. de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, UBA

## Índice de contenidos

Fuentes de consulta.....	2
Objetivos.....	3
Trabajos virtuales.....	3
Trabajo de fuerzas y momentos.....	3
Trabajo de una fuerza.....	3
Trabajo de un momento.....	4
Trabajo de un sistema generalizado de fuerzas.....	5
Principio de los Trabajos Virtuales.....	5
Aplicación de PTV a estructuras isoestáticas.....	5
Magnitudes complementarias.....	6
Cinemática plana.....	6
ANEXOS: Ejemplos de cálculo.....	9
Determinación de RVE.....	9
Determinación de esfuerzos en barras de reticulado usando el PTV.....	10
Determinación de Momento flexor.....	12
Determinación de Corte.....	13
Determinación de Normal.....	14

### **Fuentes de consulta**

El presente apunte se ha confeccionado en base a la bibliografía que se detalla a continuación. Para mayor profundidad o detalles, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos, favor de recurrir a las fuentes.

- Pico, Peralta, Ciancio, Montanaro (2013) *Estática*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, UNICEN, pag. 208
- R. C. Hibbeler (2004), *Mecánica Vectorial para Ingenieros – ESTÁTICA*, Pearson Educación, México, pag. 551
- J. L. Mroginski, *Principio de Trabajos Virtuales*, Apuntes de cátedra UNNE, Ingeniería Civil, Corrientes, Argentina.

## Principio de Trabajos Virtuales

### Objetivos

Los objetivos del presente documento son que el estudiante:

- Calcule reacciones de vínculo internos o externos de estructuras isoestáticas planas a partir del Principio de los Trabajos Virtuales
- Identifique las magnitudes complementarias en la ecuación de trabajo
- Logre encontrar un sistema estático adecuado para la incógnita que se desee determinar
- Pueda trazar las elásticas en cadenas abiertas o cerradas de chapas

### Trabajos virtuales

Se presenta en este texto una aplicación del Teorema de los trabajos virtuales, sin demostrarlo, solamente enunciándolo como un principio.

En la práctica, para Estabilidad I, servirá como método para calcular las magnitudes estáticas (RVE e I) a partir de una ecuación de trabajo, como alternativa a las ecuaciones de equilibrio. Se entiende por magnitud estática a una coordenada independiente de fuerza o momento, es decir una sollicitación (ó RVI) o una componente de RVE. Para el alcance de este texto se presenta solamente su aplicación el caso en el plano.

Este método de resolución es útil cuando se identifica de antemano cuál es la sollicitación o reacción de vínculo que se desea conocer, ya que puede obtenerse la incógnita con una sola ecuación, aunque se trate de una cadena de varios cuerpos, abierta o cerrada. Así mismo, si se deseara conocer muchas incógnitas, el método perdería practicidad dado que es necesario establecer un sistema estático y un conjunto de desplazamientos virtuales diferente por cada una de las incógnitas que se desee conocer.

Se comienza con un repaso de las definiciones de trabajo para fuerzas y momentos.

### Trabajo de fuerzas y momentos

#### Trabajo de una fuerza

Dada una partícula  $A$ , que sufre un desplazamiento  $\vec{dr}$  debido a la aplicación de una fuerza  $\vec{F}$ , si la posición inicial de la partícula puede definirse respecto de un origen  $O$  mediante el vector  $\vec{r}$ , según se muestra en la Figura 1, luego del desplazamiento, la partícula pasa a ocupar la posición  $A'$ , definida por el vector  $\vec{r} + \vec{dr}$ .

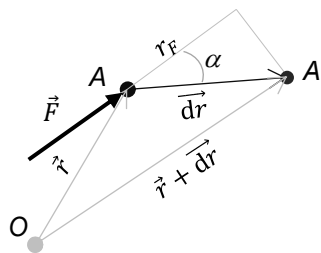


Figura 1. Trabajo de una fuerza

El trabajo  $dL_F$  de la fuerza  $\vec{F}$  correspondiente al desplazamiento  $\vec{dr}$  se define como el producto escalar:

$$dL_F = \vec{F} \cdot \vec{dr} \quad (\text{Eq 1})$$

O lo que es lo mismo:

$$dL_F = |\vec{F}| |\vec{dr}| \cdot \cos(\alpha) = \mathbf{F} \cdot r_F \quad (\text{Eq 2})$$

Donde  $\mathbf{F}$  es el módulo del vector fuerza  $\vec{F}$  y  $r_F$  es la proyección del desplazamiento  $\vec{dr}$  sobre la recta de acción de la fuerza.

El trabajo es positivo cuando la dirección de la fuerza tiene el mismo sentido que la componente del desplazamiento y negativo en el caso contrario.

### Trabajo de un momento

El trabajo  $dL_M$  de un momento  $M$  se define como el producto de la intensidad del momento  $\mathbf{M}$  y el valor de la rotación  $d\theta$  experimentada por el cuerpo por la acción del momento.

$$dL_M = \mathbf{M} \cdot d\theta \quad (\text{Eq 3})$$

Para llegar a esta conclusión es necesario considerar el momento en términos de una cupla y determinar el valor del trabajo de las fuerzas que componen la cupla.

Dado un cuerpo plano sobre el que actúan un par de fuerzas de la misma intensidad y sentido contrario  $\vec{F}$  y  $-\vec{F}$ , separadas una distancia  $r$  perpendicular a la dirección de la fuerza, según se muestra en la Figura 2. Ambas fuerzas conforman una cupla cuya intensidad es  $\mathbf{M} = F r$

Debido a la acción de esta cupla, la chapa experimenta una rotación  $d\theta$ . Los puntos de aplicación de estas fuerzas  $A$  y  $B$ , alejados de un punto de referencia  $O$  una distancia  $r_A$  y  $r_B$  respectivamente, luego de la rotación experimentan corrimientos  $\vec{dr}_A$  y  $\vec{dr}_B$ , pasando a ocupar posiciones  $A'$  y  $B'$ .

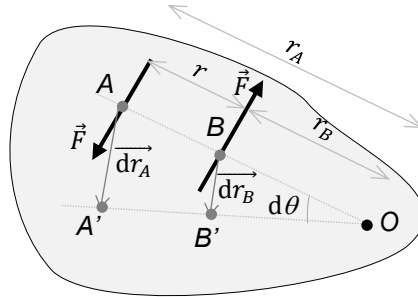


Figura 2. Trabajo de una cupla

Los valores de los corrimientos se pueden expresar en función de la distancia al punto de referencia  $O$  y al giro según:

$$dr_A = r_A \cdot \text{sen}(d\theta) \quad ; \quad dr_B = r_B \cdot \text{sen}(d\theta) \quad (\text{Eq 4})$$

Si la rotación  $\theta$  experimentada es infinitesimal, entonces se puede aproximar el valor de los corrimientos de los puntos de aplicación de las fuerzas según:

$$dr_A \cong r_A \cdot d\theta \quad ; \quad dr_B \cong r_B \cdot d\theta \quad (\text{Eq 5})$$

Se calcula el trabajo de cada una de las fuerzas individualmente, según la definición de trabajo de una fuerza de la Eq 1.

$$dL_A = \mathbf{F} \cdot dr_A \cdot \cos(d\theta) \quad ; \quad dL_B = -\mathbf{F} \cdot dr_B \cdot \cos(d\theta) \quad (\text{Eq 6})$$

El trabajo de la fuerza con punto de aplicación en  $B$  es negativo porque su sentido es opuesto al desplazamiento.

Para  $d\theta$  infinitesimal:

$$\begin{aligned} dL_A &\cong \mathbf{F} \cdot dr_A \cong \mathbf{F} \cdot r_A \cdot d\theta \\ dL_B &\cong -\mathbf{F} \cdot dr_B \cong -\mathbf{F} \cdot r_B \cdot d\theta \end{aligned} \quad (\text{Eq 7})$$

Para obtener el trabajo de la cupla, se suma miembro a miembro las ecuaciones anteriores:

$$dL_M = dL_A + dL_B = \mathbf{F} \cdot r_A \cdot d\theta - \mathbf{F} \cdot r_B \cdot d\theta \quad (\text{Eq 8})$$

Sacando factor común  $\mathbf{F} \cdot d\theta$ :

$$dL_M = \mathbf{F} \cdot d\theta \cdot (r_A - r_B) \quad (\text{Eq 9})$$

De la observación de la Figura 2 se deduce que:

$$r = r_A - r_B \quad (\text{Eq 10})$$

Con lo cual la ecuación Eq 9 queda:

$$dL_M = \mathbf{F} \cdot d\theta \cdot r \quad (\text{Eq 11})$$

Siendo el valor del momento de la cupla  $\mathbf{M} = F r$ , se llega a la ecuación Eq 3, que define el trabajo de un momento  $\mathbf{M} \cdot d\theta$ .

El trabajo de un momento es positivo cuando el sentido del giro coincide con el del momento.

### Trabajo de un sistema generalizado de fuerzas

En el caso de que un cuerpo estuviera sometido a un sistema generalizado de fuerzas, es decir, fuerzas y momentos, el trabajo de cada una de ellas depende de su desplazamiento, que variará según la posición final de cada punto de aplicación de fuerza, de manera que, para obtener el trabajo total, será necesario integrar los trabajos diferenciales de cada fuerza.

$$L = \int dL \quad (\text{Eq 12})$$

Si el sistema de fuerzas fuera discreto, las integrales son sumatorias.

### Principio de los Trabajos Virtuales

El Principio<sup>2</sup> de Trabajos Virtuales establece la igualdad entre el trabajo de las cargas o acciones exteriores y el trabajo de las fuerzas internas en barras, aun cuando una de las variables es virtual. Se puede enunciar basado en las deformaciones virtuales o en las tensiones virtuales. Se utilizará aquí la primera: *“Dado un sistema sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio, llamado sistema estático o equilibrado, si se aplica una deformación virtual, el trabajo de las fuerzas exteriores debido a esa deformación virtual es igual al trabajo interno de deformación”*.

$$\int \delta L_i = \int \delta L_e \quad (\text{Eq 13})$$

La notación utilizada  $\delta$  para los trabajos virtuales indica variación<sup>3</sup>.

Para que esto se cumpla, **la deformación virtual** debe cumplir con las siguientes características:

- Supuesto, no real
- Arbitrario
- Muy pequeño: se confunde tangente con el ángulo
- Compatible con los vínculos
- No modificar las cargas

### Aplicación de PTV a estructuras isoestáticas

En estructuras isoestáticas como las que se analizan en Estabilidad I<sup>4</sup>, se calculan los trabajos virtuales sobre un sistema estático (SE) que es similar a la estructura original, pero con la única diferencia de que se libera la restricción que impone la magnitud a averiguar. Al liberar una única magnitud en un sistema isoestático, es decir  $GL=CV$ , el mismo pasa a ser un mecanismo con un grado de libertad. Este mecanismo permite movimientos rígidos, con lo cual lo que se aplica es un **desplazamiento virtual**, no una deformación. Las fuerzas internas no realizan trabajo, solo lo hacen las fuerzas externas.

<sup>2</sup> En realidad, se trata de un teorema, ya que es posible demostrarlo mediante cálculo variacional. Para el alcance de Estabilidad I, se enunciará como principio.

<sup>3</sup> El cálculo variacional, excede el alcance de este texto.

<sup>4</sup> El método de obtención de magnitudes a través del Principio de los Trabajos Virtuales no es exclusivo para estructuras isoestáticas. En Estabilidad II se aplicará para estructuras hiperestáticas y cuerpos no rígidos que pueden desarrollar variación de energía interna de deformación.

Entonces, para un sistema isoestático cualquiera en equilibrio, el conjunto de los trabajos de todas las acciones sobre la estructura y de todas las reacciones de vínculo externo para un conjunto de desplazamientos virtuales es nulo.

$$\int \delta L_e = 0 \quad (\text{Eq 14})$$

Se trata de encontrar un conjunto de desplazamientos virtuales tales que **solo realice trabajo la magnitud que se quiere determinar**, además de las acciones que son magnitudes conocidas.

Estructura original	Sistema estático	Desplazamiento virtual
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Isoestática<sup>5</sup></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mecanismo de 1GL que deja en evidencia la magnitud a averiguar.</li> <li>• Compatible con los vínculos</li> <li>• En equilibrio</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Supuesto, no real</li> <li>• Arbitrario</li> <li>• Muy pequeño: se confunde tangente con el ángulo</li> <li>• Compatible con los vínculos</li> <li>• No modifica las cargas</li> </ul>

Tabla 1. Condiciones para cada estado de análisis

### Magnitudes complementarias

En la ecuación de trabajo intervienen dos tipos de magnitudes: las magnitudes estáticas y las magnitudes cinemáticas. Si se trata de trabajos virtuales, la parte de la ecuación que es virtual se refiere a las magnitudes cinemáticas. Es decir:

Magnitudes estáticas (reales)	Magnitudes cinemáticas (virtuales)	Trabajo Virtual
$F$ : Fuerza	$\delta d$ : Desplazamiento en la dirección de la fuerza	$F \cdot \delta d$
$M$ : Momento	$\delta \theta$ : Giro en la dirección del momento	$M \cdot \delta \theta$

Tabla 2. Magnitudes complementarias y trabajos virtuales

Las magnitudes estáticas y cinemáticas que intervienen en la ecuación de trabajos virtuales se encuentran aplicadas sobre los diferentes cuerpos de la cadena. Las magnitudes estáticas, que son reales, son las acciones conocidas y las fuerzas o momentos que se desean conocer. Las magnitudes cinemáticas son diferentes para cada cuerpo y para cada punto del cuerpo y se determinan mediante la cinemática plana.

### Cinemática plana

Este texto aplica el PTV en estructuras planas, además de isoestáticas. Los cuerpos planos con cargas en su plano se denominan **chapas**. Aquí se trata la cinemática de cadenas de chapas abiertas y cerradas.

Si se libera un grado de libertad de una cadena de chapas isoestática, los corrimientos de las mismas son movimientos rígidos, por lo tanto las proyecciones de los desplazamientos virtuales para cada cuerpo son líneas rectas.

Es conveniente que el conjunto de desplazamientos virtuales pueda descomponerse en las direcciones de las fuerzas o de fácil descomposición, de forma que los desplazamientos sean fáciles de determinar en el cálculo de los trabajos virtuales. Lo más corriente es proyectar estos desplazamientos en las direcciones horizontal y vertical. A la proyección de todos los elementos sobre la línea de tierra horizontal  $LT_H$  se la suele representar con un apóstrofe, en cambio la vertical  $LT_V$  con dos apóstrofes.

<sup>5</sup> Ídem anterior.

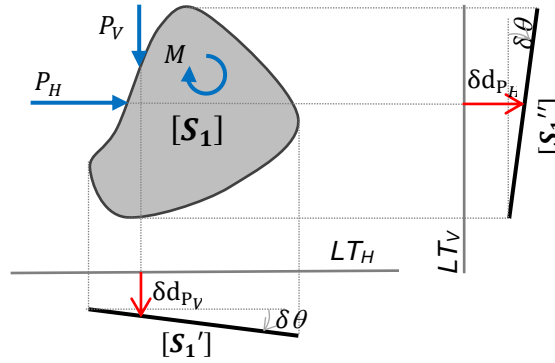


Figura 3. Proyecciones de corrimientos de la chapa  $S_1$

En la proyección en direcciones perpendiculares, los giros de las chapas son iguales y también son perpendiculares las proyecciones de cada chapa. Es decir que si la proyección horizontal de la chapa  $S_1$  forma un ángulo  $\delta\theta$  con la línea de tierra horizontal, en la proyección vertical la chapa  $S_1$  debe formar el mismo ángulo  $\delta\theta$  con la línea de tierra vertical. La ecuación de trabajo es en este caso:

$$\sum L = L_{P_V} + L_{P_H} + L_M = P_V \cdot \delta d_{P_V} + P_H \cdot \delta d_{P_H} + M \cdot \delta\theta = 0 \quad (\text{Eq 15})$$

Al tratarse de corrimientos rígidos, que se proyectan en líneas rectas, es suficiente con hallar dos puntos para trazar las líneas de proyección de cada cuerpo en cada dirección. Los dos puntos que es necesario hallar son el **polo** y la **articulación** de cada chapa.

Cada chapa que compone la cadena abierta o cerrada de 1 GL, tiene un punto en torno del cual es capaz de girar, que se denomina **punto fijo** o **polo**. Los polos pueden ser propios o impropios. Si el polo es un punto propio, su proyección se encuentra sobre la línea de tierra, es decir que no podrá desplazarse, solo girar. Si el polo es impropio la proyección del cuerpo se desplaza paralelo a la línea de tierra, es decir que el cuerpo no gira, solo se desplaza. Los polos se hayan en la intersección de dos direcciones restringidas. Se indican con la letra  $O$  y un subíndice que identifica la chapa a la que pertenece.

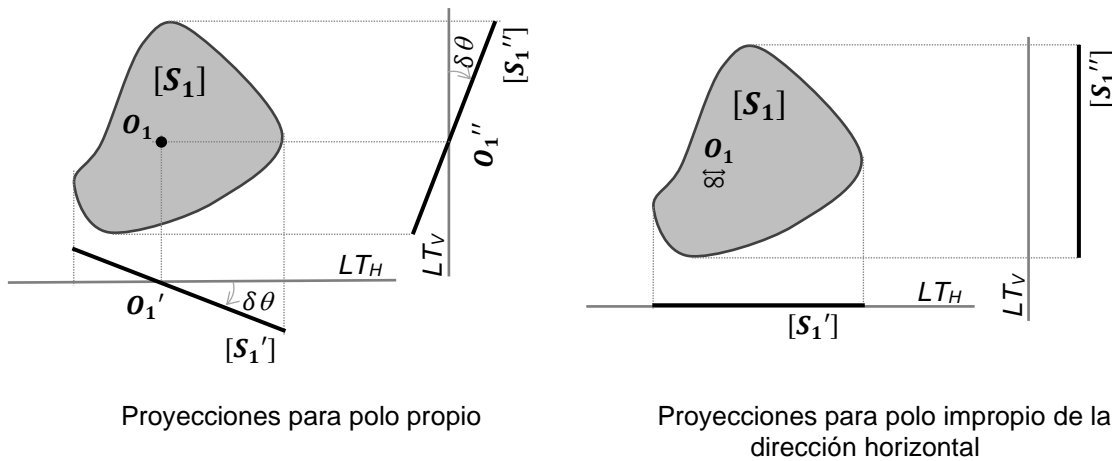


Figura 4. Proyecciones de corrimientos horizontal y vertical de la chapa  $S_1$

Por otra parte una **articulación** entre chapas, es el punto que comparten los cuerpos que se encuentran vinculados mediante la misma, sea esta propia o impropia. La proyección de la articulación tiene una ubicación compartida por los dos cuerpos y puede encontrarse desplazada respecto de la línea de tierra. Si la articulación es propia, entonces está permitido el giro relativo entre dos cuerpos contiguos. Si la articulación es impropia, el giro experimentado por ambos cuerpos debe ser el mismo, por lo cual las proyecciones de sus desplazamientos virtuales serán paralelas.

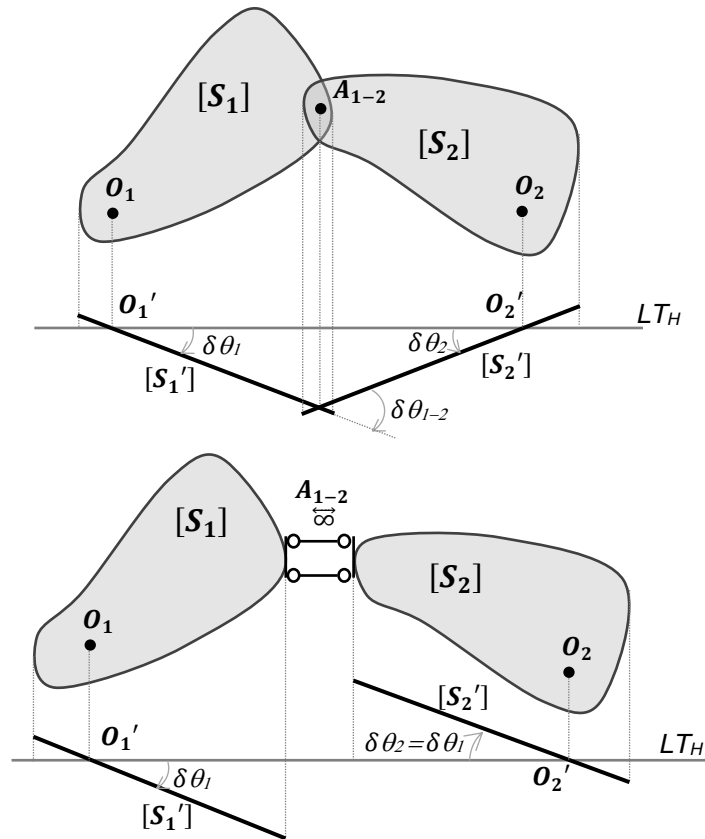


Figura 5. Proyecciones para articulación propia (arriba) e impropia(abajo)<sup>6</sup>

Solamente deben ponerse de manifiesto las magnitudes dinámicas donde exista una magnitud estática que realice trabajo. Es decir, si existen fuerzas actuando sobre una chapa que está fija, entonces esas fuerzas no realizan trabajo. No siempre es necesario dibujar dos proyecciones.

A modo de resumen:

	<b>Polo:</b> punto en torno del cual cada chapa puede girar	<b>Articulación:</b> punto en común entre dos chapas
Propio/a	Proyección sobre la línea de tierra	Ubicación compartida entre ambas chapas. Giro relativo.
Impropio/a	Proyección paralela a la línea de tierra	El giro de una chapa es el mismo que el de la chapa contigua: las chapas contiguas son paralelas. La proyección de la articulación de una y otra chapa no es compartida

Tabla 3. Proyecciones de puntos singulares: polos y articulaciones

<sup>6</sup> No se traza la proyección en vertical por simplicidad de dibujo.



**ANEXOS: Ejemplos de cálculo**

**Determinación de RVE**

Para el siguiente esquema de viga simplemente apoyada con una carga puntual en su tramo, se desea conocer la reacción de vínculo en el apoyo derecho:

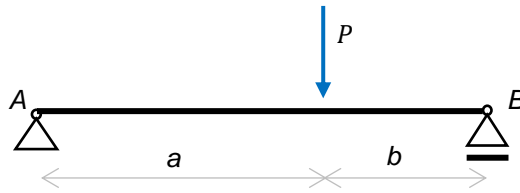


Figura 6. Determinación de  $R_B$  por PTV

Se trata de un solo cuerpo en el plano que tiene 3 GL, y posee 3 CV: un apoyo fijo que restringe 2 GL y un apoyo móvil que restringe 1 GL. Para poner de manifiesto la incógnita plantea el siguiente SE que libera la reacción de vínculo que se desea calcular, de modo que al sistema isoestático se le quita una CV y queda un mecanismo con 1 GL. El polo de la única chapa es el vínculo:

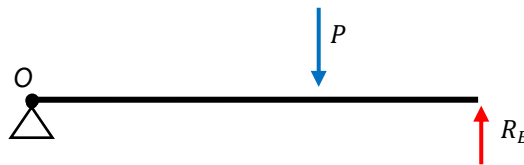


Figura 7. Sistema estático: mecanismo de 1 GL

Arbitrariamente se impone un desplazamiento virtual para la estructura que es pequeño y compatible con los vínculos, como por ejemplo el giro  $\delta\theta$  que se muestra en la siguiente figura:

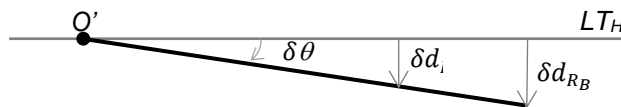


Figura 8. Desplazamiento virtual

El trabajo sobre el SE es la suma del trabajo que realiza la acción  $P$  y el trabajo que realiza la RVE  $R_B$ , que quedó en evidencia al retirar el vínculo móvil. Esto es:

$$\sum L = L_P + L_{R_B} = P \cdot \delta d_p + (-R_B \cdot \delta d_{R_B}) = 0 \quad (\text{Eq 16})$$

El trabajo de la fuerza  $R_B$  es negativo, dado que los sentidos de la fuerza y del desplazamiento son opuestos.

El desplazamiento virtual de la fuerza  $P$  se calcula como  $\delta d_p = \delta\theta \cdot a$ , dado que, como el giro  $\delta\theta$  es muy pequeño, la tangente se confunde con el ángulo. Análogamente, el desplazamiento virtual de la reacción  $R_B$  se calcula como  $\delta d_{R_B} = \delta\theta \cdot (a + b)$ .

La sumatoria de trabajos de las fuerzas externas es, por lo tanto:

$$P \cdot \delta\theta \cdot a - R_B \cdot \delta\theta \cdot (a + b) = 0 \quad (\text{Eq 17})$$

El giro  $\delta\theta$  puede sacarse como factor común en la ecuación.

$$\delta\theta \cdot (P \cdot a - R_B \cdot (a + b)) = 0 \quad (\text{Eq 18})$$

Como  $\delta\theta$  es arbitrario, se elige un número distinto de cero, de modo que es necesario que la parte de la ecuación que multiplica a  $\delta\theta$  sea igual a cero. Esto es:

$$P \cdot a - R_B \cdot (a + b) = 0 \quad (\text{Eq 19})$$

De aquí se puede despejar la incógnita:  $R_B = \frac{P \cdot a}{(a+b)}$

**Determinación de esfuerzos en barras de reticulado usando el PTV**

Se tiene el siguiente modelo de reticulado para el cual se desea conocer solamente el esfuerzo en la barra  $N_{AB}$  destacada en la figura:

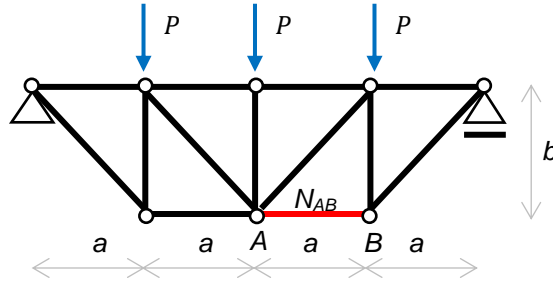


Figura 9. Determinación de  $N_{AB}$  por PTV

El sistema estático elegido para poner de manifiesto la incógnita es:

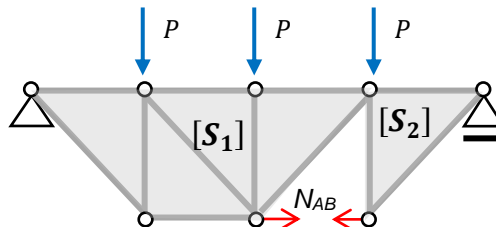


Figura 10. Sistema estático

Cinemáticamente el mecanismo resultante puede considerarse como dos chapas, de 3 GL cada una, unidas entre sí por una articulación que restringe 2 GL. La chapa  $S_1$  tiene un vínculo externo que restringe 2 GL y la chapa  $S_2$  tiene un vínculo externo que restringe 1 GL. Se trata de un mecanismo de 1GL:

Grados de libertad:	$2 \cdot 3 = 6$
Condiciones de vínculo interno:	$2 \cdot 1 = 2$
Condiciones de vínculo externo:	$\frac{2 \cdot 1 + 1 = 3}{6 - 2 - 3 = 1}$
Total de grados de libertad:	

El vínculo externo fijo constituye un polo para la chapa  $S_1$ . Por rigidez, la distancia entre el punto fijo de la chapa  $S_1$  y la articulación entre  $S_1$  y  $S_2$  no puede variar, entonces la dirección que une el polo de la chapa  $S_1$  con la articulación es una dirección restringida para la chapa  $S_2$ . Por su parte  $S_2$  tiene impuesta una restricción de movimiento en la dirección vertical mediante el vínculo externo móvil. El polo de la chapa  $S_2$  se obtiene de la intersección de las dos direcciones restringidas y cae sobre el vínculo externo móvil.

Se parte arbitrariamente de imponer un giro  $\delta\theta_1$  cualquiera a la chapa  $S_1$ , la proyección horizontal de la chapa describe una recta que debe pasar por la proyección del polo  $O_1'$ . La proyección horizontal de la chapa  $S_2$  se obtiene de unir la proyección de su polo  $O_2'$  y la proyección de la articulación  $A_{1-2}'$ . De esta forma queda definido el giro de la chapa  $S_2$ ,  $\delta\theta_2$ . Las proyecciones verticales, a su vez, pasan por las proyecciones de sus polos y son perpendiculares a las horizontales. También en la proyección vertical la chapa  $S_1$  pasa por la proyección del polo  $O_1''$  y forma un ángulo  $\delta\theta_1$  con la vertical. Análogamente para la chapa consiguiente.

Las proyecciones se muestran en la figura:

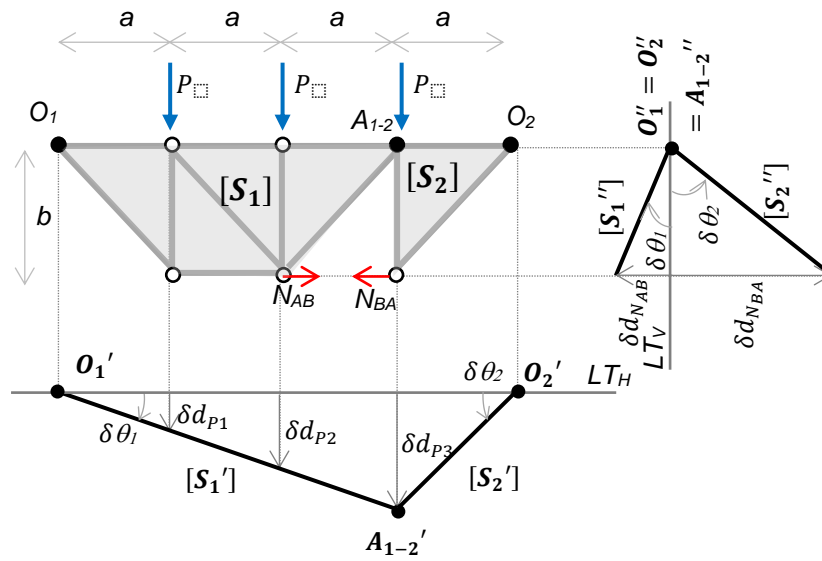


Figura 11. Elásticas

Se deduce de la proyección horizontal la relación entre  $\delta\theta_1$  y  $\delta\theta_2$ . Asumiendo la hipótesis de pequeños giros es posible asegurar que  $\delta\theta_1 \cdot 3a = \delta\theta_2 \cdot a$ . Entonces:

$$\delta\theta_2 = 3 \delta\theta_1 \tag{Eq 20}$$

La ecuación de nulidad de trabajos virtuales incluye los trabajos de las cargas  $P$  y de la sollicitación puesta de manifiesto, formada por las dos fuerzas de igual magnitud y sentido contrario  $N_{AB} = N_{BA}$ . Esto es:

$$\sum L = L_{P_1} + L_{P_2} + L_{P_3} + L_{N_{AB}} + L_{N_{BA}} = 0 \tag{Eq 21}$$

$$P \cdot \delta d_{P_1} + P \cdot \delta d_{P_2} + P \cdot \delta d_{P_3} + (-N_{AB} \cdot \delta d_{N_{AB}}) + (-N_{BA} \cdot \delta d_{N_{BA}}) = 0 \tag{Eq 22}$$

Reemplazando los valores de los desplazamientos virtuales:

$$P \cdot \delta\theta_1 \cdot (a + 2a + 3a) = N_{AB} \cdot (\delta\theta_1 \cdot b + \delta\theta_2 \cdot b) \tag{Eq 23}$$

Reemplazando el valor de  $\delta\theta_2$  puede cancelarse el valor de  $\delta\theta_1$  a ambos lados de la igualdad:

$$P \cdot \cancel{\delta\theta_1} \cdot (a + 2a + 3a) = N_{AB} \cdot \cancel{\delta\theta_1} \cdot (b + 3 \cdot b) \tag{Eq 24}$$

Despejando se obtiene el valor buscado:

$$N_{AB} = 1,5 \cdot P \cdot \frac{a}{b}$$

**Determinación de Momento flexor**

Para el siguiente esquema de viga simplemente apoyada con una carga distribuida, se desea conocer el momento flexor en la sección S:

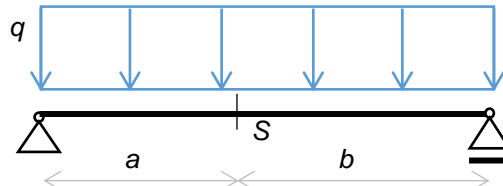


Figura 12. Determinación de  $M_S$  por PTV

Se plantea el siguiente SE que libera el momento mediante una articulación en la sección de la incógnita:

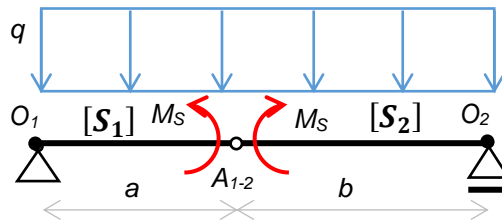


Figura 13. Sistema estático: se agrega una articulación en donde se desea conocer la sollicitación en la sección S. Las incógnitas que se ponen de manifiesto  $M_S$  representan un momento flector positivo

Se traza la cinemática de las chapas solamente en su proyección horizontal, dado que no existen cargas horizontales. Se parte de un giro arbitrario  $\theta_1$  sobre la chapa  $S_1$ . El giro de la chapa  $S_2$  y su proyección quedan definidas por su polo y articulación.

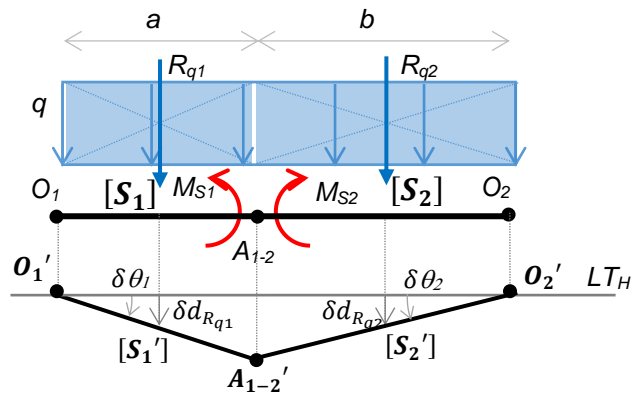


Figura 14. Elástica

La ecuación de trabajos virtuales es:

$$\sum L = L_{R_{q1}} + L_{M_1} + L_{R_{q2}} + L_{M_2} = 0 \tag{Eq 25}$$

$$R_{q1} \cdot \delta d_{R_{q1}} - M_{S1} \cdot \delta \theta_1 + R_{q2} \cdot \delta d_{R_{q2}} - M_{S2} \cdot \delta \theta_2 = 0 \tag{Eq 26}$$

Reemplazando los valores de fuerzas y desplazamientos virtuales según los datos conocidos:

$$q \cdot a \cdot \delta \theta_1 \cdot \frac{a}{2} - M_{S1} \cdot \delta \theta_1 + q \cdot b \cdot \delta \theta_2 \cdot \frac{b}{2} - M_{S2} \cdot \delta \theta_2 = 0 \tag{Eq 27}$$

La relación entre los giros es:

$$\delta\theta_2 = \frac{a}{b} \delta\theta_1 \tag{Eq 28}$$

Reemplazando, la ecuación de trabajos queda:

$$q \cdot a \cdot \delta\theta_1 \cdot \frac{a}{2} - M_{S1} \cdot \delta\theta_1 + q \cdot b \cdot \frac{a}{b} \delta\theta_1 \cdot \frac{b}{2} - M_{S2} \cdot \frac{a}{b} \delta\theta_1 = 0 \tag{Eq 29}$$

De donde se puede despejar la incógnita  $M_{S1} = M_{S2} = M_S$ , y puede cancelarse  $\theta_1$ , a ambos lados de la ecuación:

$$\cancel{\delta\theta_1} \cdot M_S \cdot \left(1 + \frac{a}{b}\right) = \cancel{\delta\theta_1} \cdot \frac{q}{2} \cdot (a^2 + a \cdot b) \tag{Eq 30}$$

Operando y despejando:  $M_S = \frac{q}{2} a \cdot b$

**Determinación de Corte**

Para el siguiente esquema de viga simplemente apoyada con una carga distribuida, se desea conocer el esfuerzo de corte en la sección S:

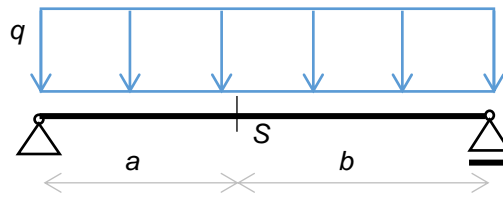


Figura 15. Determinación de  $Q_S$  por PTV

Se plantea el siguiente SE que libera el momento mediante una articulación en la sección de la incógnita:

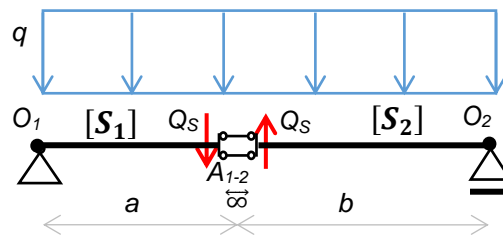


Figura 16. Sistema estático: se agrega el mecanismo de doble biela que libera el momento en la sección S, y se pone de manifiesto un corte  $Q_S$  positivo.

En la proyección horizontal, partiendo de un giro arbitrario  $\theta_1$  de la chapa  $S_1$ , debido a que el mecanismo de la articulación no permite giros relativos, el giro de la chapa  $S_2$  es el mismo  $\theta_1$ .

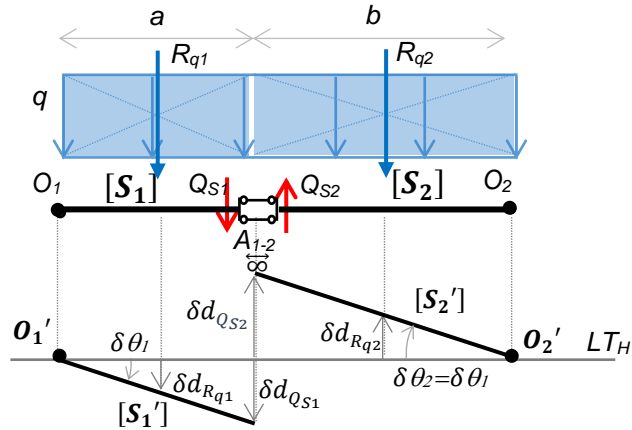


Figura 17. Elástica. Notar que el mecanismo que pone de manifiesto el corte, que se representa con cierta dimensión, es en realidad muy pequeño

La ecuación de trabajos virtuales es:

$$\sum L = L_{Rq1} + L_{Qs1} + L_{Rq2} + L_{Qs2} = 0 \quad (\text{Eq 31})$$

$$R_{q1} \cdot \delta d_{Rq1} + Q_{s1} \cdot \delta d_{Qs1} - R_{q2} \cdot \delta d_{Rq2} + Q_{s2} \cdot \delta d_{Qs2} = 0 \quad (\text{Eq 32})$$

Reemplazando, dado que  $\theta_1 = \theta_2$  y  $Q_{s1} = Q_{s2}$ :

$$q \cdot a \cdot \delta\theta_1 \cdot \frac{a}{2} + Q_s \cdot a \cdot \delta\theta_1 - q \cdot b \cdot \delta\theta_1 \cdot \frac{b}{2} - Q_s \cdot b \cdot \delta\theta_1 = 0 \quad (\text{Eq 33})$$

Operando:

$$\delta\theta_1 \cdot Q_s \cdot (b - a) = \delta\theta_1 \cdot \frac{q}{2} \cdot (a^2 + b^2) \quad (\text{Eq 34})$$

Despejando: 
$$Q_s = \frac{q(a^2 + b^2)}{2(b - a)}$$

### Determinación de Normal

Para el siguiente esquema de viga simplemente apoyada inclinada con una carga distribuida, se desea conocer el esfuerzo normal en la sección S:

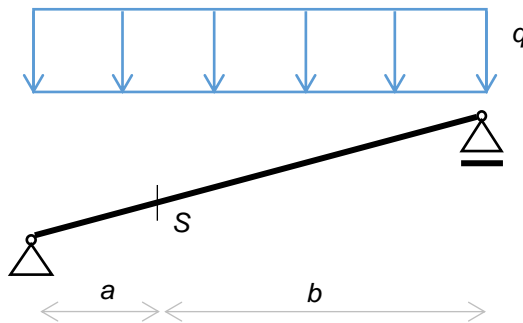


Figura 18. Determinación de  $N_s$  por PTV

Se plantea el siguiente SE que libera el momento mediante una articulación en la sección de la incógnita:

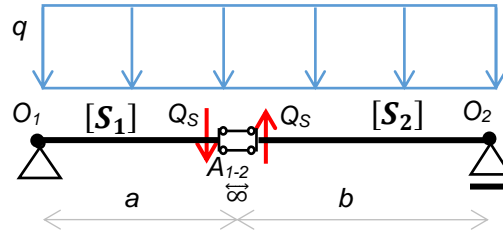


Figura 19. Sistema estático: se agrega el mecanismo de doble biela que libera el corte en la sección S, y se pone de manifiesto un corte  $Q_S$  positivo.

En la proyección horizontal, partiendo de un giro arbitrario  $\theta_1$  de la chapa  $S_1$ , debido a que el mecanismo de la articulación no permite giros relativos, el giro de la chapa  $S_2$  es el mismo  $\theta_1$ .

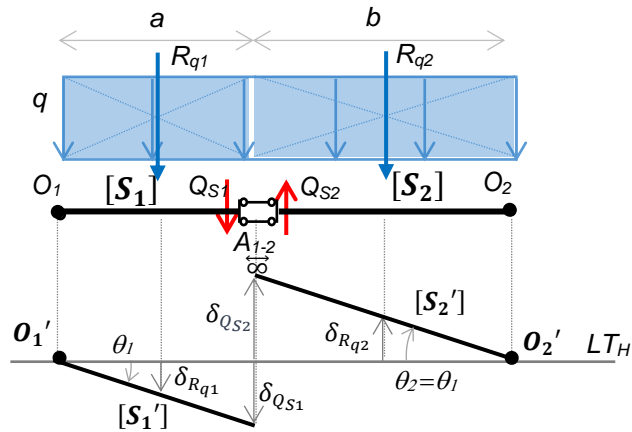


Figura 20. Elástica. Notar que el mecanismo que pone de manifiesto el corte, que se representa con cierta dimensión, es en realidad muy pequeño

La ecuación de trabajos virtuales es:

$$\sum L = L_{Rq1} + L_{Q1} + L_{Rq2} + L_{Q2} = 0 \quad (\text{Eq 35})$$

$$R_{q1} \cdot \delta_{Rq1} + Q_{S1} \cdot \delta_{Q_{S1}} - R_{q2} \cdot \delta_{Rq2} + Q_{S2} \cdot \delta_{Q_{S2}} = 0 \quad (\text{Eq 36})$$

Reemplazando, dado que  $\theta_1 = \theta_2$  y  $Q_{S1} = Q_{S2}$ :

$$q \cdot a \cdot \theta_1 \cdot \frac{a}{2} + Q_S \cdot a \cdot \theta_1 - q \cdot b \cdot \theta_1 \cdot \frac{b}{2} - Q_S \cdot b \cdot \theta_1 = 0 \quad (\text{Eq 37})$$

Operando:

$$\cancel{\theta_1} \cdot Q_S \cdot (b - a) = \cancel{\theta_1} \cdot \frac{q}{2} \cdot (a^2 + b^2) \quad (\text{Eq 38})$$

Despejando: 
$$Q_S = \frac{q(a^2 + b^2)}{2(b - a)}$$