

Departamento de Estabilidad

84.02/64.01 ESTABILIDAD I

## **CUERPOS RÍGIDOS VINCULADOS**

Por: Ing. Carolina Pérez Taboada<sup>1</sup>

Con la colaboración de Ing. Luis Fernando Parente<sup>2</sup>  
Srta Camila Wang<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup> JTP del Dto. de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, UBA

<sup>2</sup> JTP del Dto. de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, UBA

<sup>3</sup> Colaboradora en Dto. de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, UBA

## Índice de contenidos

Fuentes de consulta .....	2
Objetivos .....	3
Equilibrio y vinculación .....	3
Equilibrio de un cuerpo rígido .....	3
Diagrama de cuerpo libre .....	3
Cuerpo rígido vinculado .....	4
Grados de libertad .....	4
Vinculaciones .....	4
Vínculos externos .....	5
Reacción de vínculo (RV) .....	5
Estructuras .....	5
Chapas .....	5
Bielas .....	6
Vinculación de estructuras .....	6
Cadenas de chapas y pórticos .....	6
Vínculos internos .....	7
Análisis cinemático .....	7
Elemento estructural único .....	8
Cadenas abiertas en el plano .....	9
Cadenas cerradas en el plano .....	14
A modo de resumen .....	15
Anexos .....	17
Equilibrio de una partícula .....	17

### Fuentes de consulta

El presente apunte se ha confeccionado en base a la bibliografía que se detalla a continuación. Para mayor profundidad o detalles, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos, favor de recurrir a las fuentes.

- E. D. Fliess (1970) *Estabilidad – 1º curso*, Enrique D. Fliess, Buenos Aires, Argentina, Editorial Kapeluz, página 261
- R. C. Hibbeler (2004) *Mecánica vectorial para ingenieros - Estática*, México, Pearson Educación, página 193
- Pico, Peralta, Ciancio, Montanaro (2013) *Estática*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, UNICEN

## Cuerpos rígidos vinculados

### Objetivos

Los objetivos del presente documento son que el estudiante:

- Comprenda el concepto grados de libertad de un cuerpo y su vinculación, sepa distinguir el vínculo de la condición de vínculo y las reacciones de vínculo, tanto en el plano como en el espacio.
- Sepa realizar un análisis cinemático en cadenas abiertas y cerradas de cuerpos, estableciendo las condiciones necesarias y suficientes para la isoestaticidad y sepa identificar las vinculaciones aparentes.
- Pueda plantear el equilibrio de un cuerpo rígido, poner de manifiesto las reacciones en los vínculos externos e internos y pueda realizar un diagrama de cuerpo libre.
- Logre calcular las reacciones de vínculo interno en cadenas abiertas y cerradas de cuerpos.

### Equilibrio y vinculación

#### Equilibrio de un cuerpo rígido<sup>4</sup>

Se ha definido “cuerpo” como una sucesión de puntos materiales vinculados entre sí por fuerzas cohesivas. Se tiene un cuerpo rígido sometido a la acción de un sistema de fuerzas. Si el cuerpo está en reposo se sabe que el sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio. Esto es: se cumplen las ecuaciones de equilibrio.

Equilibrio de un cuerpo en el plano:

$$\begin{aligned} \vec{R} = \sum F_i = 0 & \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} & \text{(Eq 1)} \end{aligned}$$

Equilibrio de un cuerpo en el espacio:

$$\begin{aligned} \vec{R} = \sum F_i = 0 & \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} & \text{(Eq 2)} \\ \vec{M} = \sum M_i = 0 & \quad \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} & \text{(Eq 3)} \end{aligned}$$

#### Diagrama de cuerpo libre

La aplicación exitosa de las ecuaciones de equilibrio requiere de una especificación completa de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. A la representación del sistema de fuerzas completo actuante sobre un esquema del cuerpo o partícula se le llama diagrama de cuerpo libre (DCL).

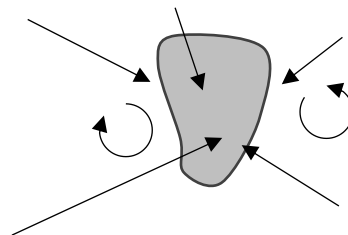


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre (DCL)

<sup>4</sup> Ecuaciones de equilibrio de una partícula en Anexos

Sobre este croquis es necesario mostrar todas las fuerzas y los momentos actuantes sobre el cuerpo, para que puedan ser correctamente considerados en las ecuaciones de equilibrio. Esto incluye fuerzas activas y fuerzas reactivas.

- Fuerzas activas: tienden a poner en movimiento el cuerpo
- Fuerzas reactivas: tienden a mantener el estado de reposo del cuerpo

### **Cuerpo rígido vinculado**

Si un cuerpo, que está sometido a la acción de un sistema de fuerzas generalizadas<sup>5</sup>, se encuentra en equilibrio, se puede distinguir una parte de las fuerzas como las acciones sobre el cuerpo (fuerzas activas) y otra parte como la vinculación del cuerpo a la tierra (fuerzas reactivas), sea directamente o mediante otro cuerpo. Se cumple que la resultante de fuerzas activas debe ser opuesta a la resultante de fuerzas reactivas.

### **Grados de libertad**

Los grados de libertad (GL) de un cuerpo representan las posibilidades de movimiento independiente. Es decir, el número de coordenadas libres que posee.

Las ecuaciones escalares de equilibrio definen el estado de reposo en coordenadas independientes. Por lo tanto, la cantidad de ecuaciones escalares de equilibrio coincide con los grados de libertad de un cuerpo. De acuerdo con las ecuaciones de equilibrio detalladas anteriormente:

Plano	Espacio
3 GL	6 GL

Tabla 1. Grados de libertad de un cuerpo

### **Vinculaciones**

Para que un cuerpo se mantenga en reposo independientemente de las acciones sobre las que el mismo actúen, es necesario imponer al menos la misma cantidad de restricciones al movimiento que grados de libertad posea, cuidando que las restricciones correspondan a movimientos independientes. A estas restricciones al movimiento en coordenadas independientes se le llaman condiciones de vínculo (CV).

Si la cantidad de condiciones de vínculo en coordenadas independientes impuestas es mayor o igual a los grados de libertad, el cuerpo se encontrará en reposo independientemente de las acciones. Para ello no deben existir diferentes condiciones de vínculo que impongan restricciones sobre el mismo movimiento.

---

<sup>5</sup> “fuerzas generalizadas” se refiere a fuerzas y momentos. Cuando se dice “fuerzas activas” y “fuerzas reactivas” también es referido a fuerzas generalizadas.

**Vínculos externos**

Se llama vínculo o soporte a toda condición geométrica que limite la posibilidad de movimiento de un cuerpo. Si se trata de vínculos externos son dispositivos fijos a tierra.

Existen distintos tipos de vínculos externos según las restricciones que son capaces de imponer. La cantidad de grados de libertad que es capaz de restringir determina la “especie”. A saber:




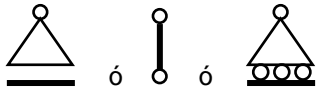



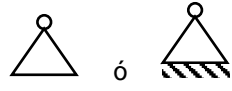











Especie	Representación	Nombre	Desplazamientos posibles		
					
De 1ra especie		Apoyo simple o móvil			
De 2da especie		Apoyo fijo o articulación			
		Carrito guiado			
De 3ra especie		Empotramiento			

Tabla 2. Vínculos externos en el plano

**Reacción de vínculo (RV)**

En los vínculos, cada restricción en coordenada independiente se puede reemplazar por una fuerza o momento en esa dirección, llamadas reacciones de vínculo.

Si un vínculo previene la traslación de un cuerpo en una dirección dada, entonces una fuerza es desarrollada sobre el cuerpo en esa dirección. Igualmente, si el vínculo impide una rotación, sobre el cuerpo se ejerce un momento.

Las reacciones en los vínculos dependen de las acciones a las cuales esté sometido el cuerpo. Para un estado de cargas determinado (sistema de fuerzas activas), el juego de reacciones de vínculo (sistema de fuerzas reactivas) será **único** para vinculación **isoestática**, concepto que se extiende más adelante en este documento.

En los diagramas de cuerpo libre no deben representarse los vínculos si se ponen de manifiesto las fuerzas que representan sus reacciones.

**Estructuras**

Las estructuras son cuerpos, o elementos estructurales, unidos entre sí de manera que pueden soportar las acciones que actúan sobre ellos.

Los elementos estructurales pueden clasificarse según su geometría en:

- Volumétricos: las tres dimensiones son comparables
- Superficiales: una dimensión es menor que las otras dos
- Lineales: una dimensión es preponderante sobre las otras dos, también llamados barras.

En Estabilidad I estudiaremos estructuras formadas por **barras**. Si bien en la realidad pueden ser volumétricos o superficiales, la mayor parte de los elementos estructurales son de una configuración tal que admiten un plano de simetría y, en su plano, pueden modelarse mediante barras. El alcance de esta materia se limita a aquellas estructuras cuya geometría permite la modelación mediante barras.

**Chapas**

Elementos estructurales que por su geometría pueden ser modelados en un plano, con vinculación y cargas pertenecientes al mismo plano de la estructura.

Bajo la hipótesis de rigidez de los cuerpos, se asume invariable la distancia entre dos puntos del mismo cuerpo bajo la acción de una fuerza. Es posible entonces reemplazar el elemento plano chapa por líneas que unan los puntos singulares, esto es: puntos de vinculación y donde están aplicadas las fuerzas, y así trabajar con estructuras de barras<sup>6</sup>.



Figura 2. Sustitución de chapa por una estructura de barras

### **Bielas**

Elementos de barra de eje recto con los dos extremos articulados. La biela limita el movimiento en la dirección de su eje.



Figura 3. Biela

Configuran asimismo un elemento de vinculación externa de primera especie, plano o espacial, cuando uno de sus extremos está vinculado a tierra y el otro a un cuerpo.

### **Vinculación de estructuras**

#### **Cadenas de chapas y pórticos<sup>7</sup>**

Las cadenas de chapas son estructuras planas formadas por la vinculación entre chapas. Como se mencionara anteriormente, las chapas pueden reemplazarse por barras.

Pórticos planos o espaciales son estructuras formadas por barras de eje recto o curvilíneo.

- A los elementos cuyo eje es horizontal los llamaremos vigas o dinteles.
- A los elementos de eje vertical los llamaremos columnas.
- A los elementos de eje inclinado los llamaremos tensor o puntal, según se encuentre sometido a tracción o compresión respectivamente.

<sup>6</sup> Esta sustitución es admisible para el cálculo de las RVE. Para el cálculo de las RVI, éste solo se realizará en estructuras formadas por barras.

<sup>7</sup> En Estabilidad I se resolverán únicamente estructuras de un solo cuerpo en el espacio, salvo casos particularmente simples.

**Vínculos internos**

A los vínculos entre elementos estructurales, a diferencia de los vínculos a tierra, se les llama vínculos internos. Existen diferentes tipos de vínculos internos según el movimiento relativo permitido entre los elementos implicados. Por lo general permiten solamente un grado de libertad relativo.

Para visualizar más fácilmente el movimiento relativo que permiten, se asume que de las dos partes involucradas, una se encuentra fija.




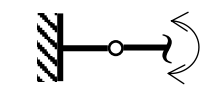
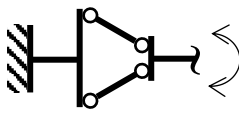
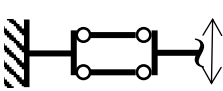
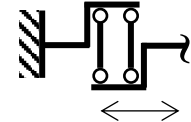
Representación	Nombre	Desplazamientos posibles		
				
	Articulación (propia)	✗	✗	✓
	Articulación propia (en el punto de intersección de las bielas)	✗	✗	✓
	Bielas paralelas o articulación impropia en la dirección del eje de las bielas	✓	✗	✗
	Bielas paralelas o articulación impropia en la dirección del eje de las bielas	✗	✓	✗

Tabla 3. Vínculos internos en el plano

**Grados de vinculación de una estructura**

Cuando la cantidad de condiciones de vínculo impuestas a la cadena de cuerpos es igual a sus grados de libertad, y se cumple que la cadena es cinemáticamente invariable, la vinculación se llama **isoestática**. En este caso las ecuaciones de la estática, Eq. 1 para el plano y Eq.2 y 3 para el espacio, son suficientes para determinar el conjunto de reacciones de vínculo externo en equilibrio con sistema de fuerzas activas.

Si la cantidad de condiciones de vínculo es superior a los grados de libertad, la vinculación se llama **hiperestática**. A la cantidad de condiciones de vínculo que supere los grados de libertad se le llama grado de hiperestaticidad. En este caso las ecuaciones de la estática no alcanzan para resolver la estructura.

Si en cambio la cantidad de condiciones de vínculo es menor a los grados de libertad, el cuerpo tendrá igual cantidad de posibilidades de movimiento como grados de libertad sin restringir, tornándose en un mecanismo y la vinculación se llama **hipoestática**.

Hiperestática	Isoestática	Hipoestática (mecanismo)
$GL < CV$	$GL = CV + CI$	$GL > CV$

Tabla 4. Grados de vinculación

Las estructuras que se proyectan para mantenerse en reposo pueden ser o bien isoestáticas o bien hiperestáticas. Muchas veces se opta por utilizar grados de hiperestaticidad como medida de seguridad por redundancia, es decir: se utilizan mayor cantidad de vínculos o elementos estructurales

que los estrictamente necesarios, de manera que, si alguno fallase, la estructura no colapsaría. Para las estructuras hiperestáticas, las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para su resolución, se dice que son estáticamente indefinidas, aunque cinemáticamente estables. Existen, sin embargo, casos en los que los grados de libertad son menores que las condiciones de vínculo y sin embargo son cinemáticamente inestables. La resolución de las estructuras hiperestáticas se verá en Estabilidad II y III.

También podrían darse casos de estructuras hipoestáticas que, para casos particulares de carga, pueden resolverse, es decir: alcanzan las ecuaciones de la estática.

En Estabilidad I se estudiarán solamente estructuras isoestáticas o estáticamente definidas. La resolución de estas se realiza a través de las ecuaciones escalares del equilibrio.

### Análisis cinemático

Para que una estructura sea **cinemáticamente invariable**, es decir que frente a cualquier sistema de fuerzas que actúe sobre la misma ésta permanecerá en reposo, es necesario que la cantidad de condiciones de vínculo sea por lo menos igual a la cantidad de grados de libertad, como se muestra en la Tabla 4. Sin embargo, esta condición necesaria no es suficiente ya que distintas restricciones pueden estar impidiendo el mismo grado de libertad. A esta situación se le denomina **vinculación aparente**.

Se debe verificar que las condiciones de vínculo impuestas, efectivamente logren inmovilizar la estructura.

Se llama **análisis cinemático** a la doble verificación:

- Condición necesaria, pero no suficiente,  $GL = CV$
- Verificación de inexistencia de vinculación aparente.

El análisis cinemático es independiente del estado de cargas que afecte al sistema.

### Elemento estructural único

En el plano un cuerpo posee 3 grados de libertad. Para fijarlo a tierra es necesario imponer 3 condiciones de vínculo, cuidando que cada una impida un movimiento independiente.

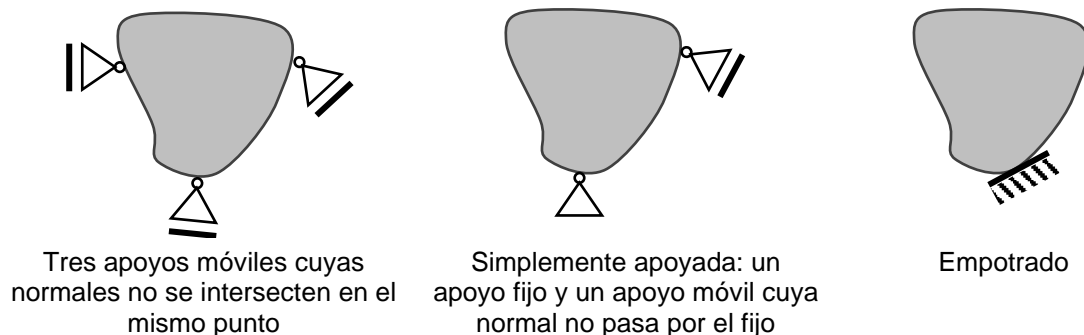


Figura 4. Vinculación externa de un cuerpo en el plano

Para determinar cuáles son las reacciones en los vínculos es suficiente con plantear las 3 ecuaciones de equilibrio de un cuerpo en el plano (Eq. 3).

Un cuerpo en el espacio posee 6 grados de libertad. Para fijarlo se imponen 6 restricciones independientes al movimiento.



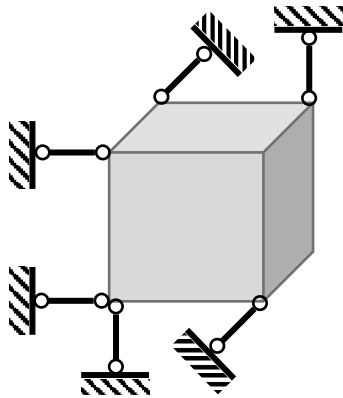
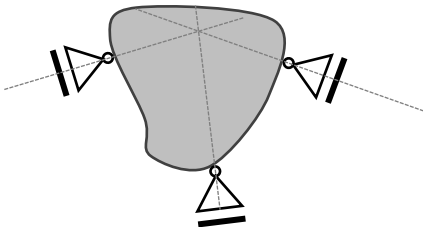


Figura 5. Ejemplo de vinculación externa de un cuerpo en el espacio

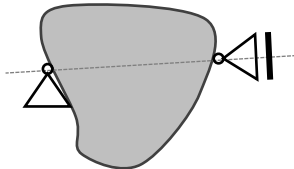
Vinculación aparente

Cuando distintos vínculos externos impiden el mismo movimiento.

En el plano:



Si las normales se intersectan en un punto, el cuerpo puede girar entorno del mismo



Si la normal del apoyo móvil pasa por el apoyo fijo, el cuerpo puede girar en torno del apoyo fijo

Tabla 5. Vinculación aparente de un cuerpo en el plano

O en el espacio, si encontramos una recta que corte las 6 bielas, existe vinculación aparente.

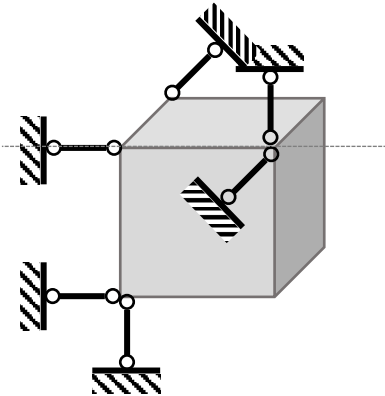


Figura 6. Ejemplo de vinculación aparente de un cuerpo en el espacio: el cuerpo puede girar entorno del eje horizontal

**Cadenas abiertas en el plano**

Cuando un cuerpo está vinculado a otro, ambos ven restringidas sus posibilidades de movimiento. Por lo tanto, la cantidad de grados de libertad de un sistema compuesto por dos o más cuerpos, no es la suma directa de los grados de libertad de cada cuerpo, sino que es necesario restarle la cantidad de grados de libertad que restringen los vínculos internos. Se explicará lo antedicho mediante el caso más básico de cadena de cuerpos en el plano: el arco de tres articulaciones.

Arco de 3 articulaciones

Un cuerpo en el plano posee 3 grados de libertad, que son la roto traslación. Si se fija el cuerpo mediante un vínculo fijo, de 2da especie, éste le restringe 2 grados de libertad. El cuerpo fijado a tierra mediante un vínculo fijo tiene un grado de libertad, que es la rotación en torno de la articulación del vínculo.



Cuerpo libre en el plano: 3 GL, es decir roto traslación

Cuerpo fijado mediante un vínculo fijo: 1 GL, es decir rotación en torno de la articulación

Figura 7. Vinculaciones en un solo cuerpo

Se considera ahora que, contiguo al primer cuerpo, que llamaremos 1, fijado mediante una articulación, existe otro cuerpo, que llamaremos 2, fijado de la misma manera. En ese caso ambos cuerpos pueden girar cada uno en torno de las articulaciones a las que se encuentran fijados a tierra.

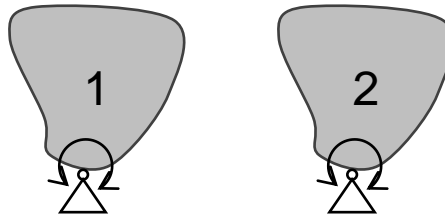


Figura 8. Dos cuerpos fijados con un vínculo fijo cada uno. En total 2 GL, es decir rotación de cada uno entorno de su articulación

Si se vincula el cuerpo 1 al cuerpo 2 mediante una articulación  $A_{1-2}$  entre ellos, entonces ambos cuerpos quedan fijos. Teniendo en cuenta la hipótesis de rigidez, la distancia  $d_1$  es invariable y un giro del cuerpo 1 en torno a su apoyo fijo arrastraría a la articulación  $A_{1-2}$  en la dirección  $\delta_1$ , perpendicular a  $d_1$ <sup>8</sup>. Realizando el mismo razonamiento para el cuerpo 2, se puede ver que el único desplazamiento posible para la articulación  $A_{1-2}$ , separada del apoyo fijo una distancia  $d_2$  invariable, sería en dirección  $\delta_2$ , debido a un giro de esta chapa entorno a su apoyo fijo. Observamos, entonces, que  $A_{1-2}$  tiene dos restricciones de desplazamientos que no son compatibles entre sí, por lo tanto la articulación constituye un punto fijo de la cadena, que junto con los puntos fijos impuestos por las restricciones externas inmovilizan la cadena. Se llega a la conclusión de que la estructura así vinculada es cinemáticamente invariable.

A esta configuración se le llama arco de 3 articulaciones.

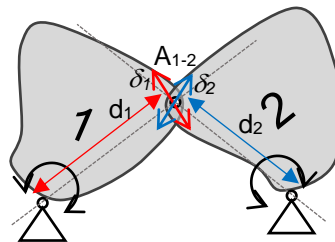


Figura 9. Arco de 3 articulaciones no alineadas: estructura cinemáticamente invariable  $\Rightarrow$  estructura isoestática

<sup>8</sup> Notar que el giro para pequeños movimientos se traduce en una traslación en la dirección de la tangente del arco descrito por la articulación que vincula los cuerpos con centro en el vínculo externo.

Haciendo un balance de grados de libertad de la cadena, se tienen dos cuerpos en el plano, que tienen 3 grados de libertad cada uno. Los vínculos externos imponen 2 condiciones de vínculo cada uno. El vínculo interno restringe 2 grados de libertad. Se cumple que la cantidad de grados de libertad igual a la cantidad de condiciones de vínculo impuestas.

Cantidad de cuerpos = 2

Grados de libertad	Condiciones de vínculo	
	Condiciones de vínculo externas	Condiciones de vínculo internas
$2 \times 3 = 6$	$2 + 2 = 4$	$2 \times 1 = 2$
6	$4 + 2 = 6$	

Balance:  $GL = CV$

Para que se trate de una estructura cinemáticamente invariable es necesario que las articulaciones no se encuentren alineadas, dado que de lo contrario, el giro permitido por la restricción externa de uno de los cuerpos, será el mismo movimiento permitido por el vínculo externo del otro cuerpo y lo que es un caso de vinculación aparente.

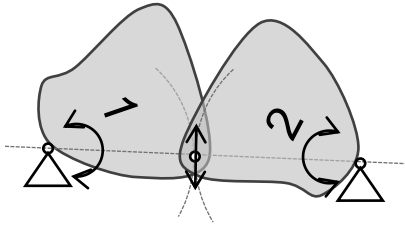


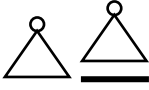

Figura 10. Arco de 3 articulaciones alineadas: vinculación aparente. Ambos cuerpos pueden girar en torno de las articulaciones externas

Otras cadenas de 2 cuerpos en el plano

Para cadenas de 2 chapas la cantidad de vínculos internos es 1: el vínculo que une ambas chapas. Los vínculos internos restringen dos grados de libertad cada uno. Teniendo en cuenta esto, las posibilidades de vinculación que cumplen con la condición  $GL = CV$ , son todas aquellas combinaciones que sumen 4 condiciones de vínculo externo entre ambas, incluido el arco de 3 articulaciones.

A saber:

$CVE_{\text{cuerpo 1}} + CVE_{\text{cuerpo 2}}$	Vínculos en cuerpo 1	Vínculos en cuerpo 2
2 + 2		
3 + 1		

		
Tabla 6. Vinculaciones posibles para cadenas isoestáticas de dos chapas		

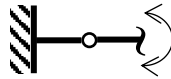
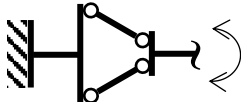
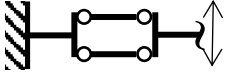
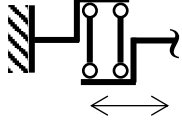
Sin embargo, la condición  $GL = CV$  no es suficiente para afirmar que la estructura es isoestática. Es necesario realizar un análisis cinemático para detectar si existe vinculación aparente.

#### Reacciones en los vínculos

Dado un estado de cargas conocido actuando sobre una estructura, los vínculos desarrollan reacciones para mantener a la estructura en equilibrio. Si el objetivo es conocer esas reacciones se debe plantear el equilibrio de la estructura, poniendo de manifiesto tanto las acciones que actúan sobre la estructura como las reacciones en los vínculos.

La cantidad de condiciones de vínculo en cadenas de 2 chapas son 4. Se ve entonces que las ecuaciones de equilibrio global en el plano (Eq, 1) no son suficientes. Se debe recurrir además a ecuaciones de equilibrio relativo. Esto es: **si la estructura está en equilibrio, entonces sus partes también se encuentran en equilibrio**. Se asume entonces el equilibrio de una parte de la estructura, asumiendo que la otra se encuentra fija.

Debe considerarse que no existen fuerzas o momentos que, reducidos al vínculo interno, tengan una componente coincidente con la dirección que el vínculo permite el movimiento. Es decir: si el vínculo es una articulación, el movimiento que permite es el giro de un cuerpo respecto del otro. Debe verificarse que todas las cargas actuantes en un cuerpo no realicen un momento en torno de ese punto, ya que si ese momento existiera el giro se materializaría. Análogamente, si el vínculo interno permite el movimiento en un determinado eje, no deben existir componentes de fuerza paralelos a ese eje a un lado o al otro del vínculo.

Vínculo interno	Ecuación de equilibrio interno
	$\sum M_{\text{cuerpo a derecha}} = 0$
	$\sum M_{\text{cuerpo a derecha}} = 0$
	$\sum F_V \text{ cuerpo a derecha} = 0$
	$\sum F_H \text{ cuerpo a derecha} = 0$
Tabla 7. Vínculos internos y ecuaciones de equilibrio relativo.	

Es importante notar que, independientemente de dónde esté ubicado el vínculo entre dos cuerpos, las fuerzas y momentos involucrados en la ecuación de equilibrio relativo son los actuantes en el cuerpo que se asume podría moverse respecto del otro. Este puede ser el caso en que la articulación propia no está ubicada entre ambos cuerpos sino sobre uno de ellos. En ese caso las fuerzas involucradas son las que están aplicadas sobre el cuerpo de la derecha, aunque haya fuerzas aplicadas a izquierda de la articulación.

Las ecuaciones de equilibrio relativo plantean el equilibrio hacia un lado o hacia el otro. Pueden también plantearse ecuaciones de equilibrio relativo hacia ambos lados de un vínculo interno, en reemplazo de la ecuación de equilibrio global correspondiente a ese grado de libertad.

Cadenas abiertas de n cuerpos en el plano

Dada una cadena abierta de  $n$  cuerpos en el plano, la cantidad de grados de libertad totales son 3 GL por chapa.

$$GL = 3 \cdot n \tag{Eq 4}$$

Asumiendo que cada cuerpo está vinculado al subsiguiente mediante un vínculo interno, la cantidad de los mismos será igual a la cantidad de cuerpos menos uno.

$$VI = n - 1 \tag{Eq 5}$$

Si cada vínculo interno restringe 2 grados de libertad, la cantidad de condiciones de vínculo interno es igual a dos veces la cantidad de vínculos Internos.

$$CVI = 2 \cdot (n - 1) \tag{Eq 6}$$

Se deben igualar los grados de libertad a la totalidad de las condiciones de vínculo, esto es la suma de las condiciones de vínculo externos e internos:

$$GL = CV = CVI + CVE \tag{Eq 7}$$

Se puede despejar la cantidad de condiciones de vínculo externo.

$$CVE = GL - CVI = 3n - 2(n - 1) \tag{Eq 8}$$

Por lo tanto, para cadenas abiertas de  $n$  cuerpos, es necesario que:

$$CVE = n + 2 \tag{Eq 9}$$

Como esta condición es necesaria, pero no suficiente, debe verificarse además que no existe vinculación aparente para afirmar que la estructura es cinemáticamente invariable.

Estas condiciones de vínculo deben estar repartidas entre los cuerpos de la cadena, de forma que todos los cuerpos se encuentren fijos. En la Tabla 6, se detallaron las posibles combinaciones de condiciones de vínculo por cuerpo para cadena de 2 cuerpos. Para cadenas más numerosas las combinaciones se multiplican. Notar que un mismo cuerpo no debería tener restringidas más de las 3 condiciones de vínculo necesarias para fijarlo. Por lo tanto, más de 3 CVE aplicadas en el mismo cuerpo implican necesariamente vinculación aparente.

A medida que la cadena se hace más larga, la cantidad de incógnitas que representan las reacciones en los vínculos se hace mayor, según la ecuación Eq 11. Por lo tanto se deberá aumentar la cantidad de ecuaciones parciales para poder obtener un sistema de igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas.

Esto es:

Cuerpos de la cadena abierta en el plano	Reacciones de vínculo incógnita	Ecuaciones de equilibrio global	Ecuaciones de equilibrio relativo
1	3	3	0
2	4	3	1
3	5	3	2
4	6	3	3
$n$	$n + 2$	3	$n - 1$

Tabla 8. Cantidad de ecuaciones globales y parciales en cadenas de cuerpos en el plano

Se agrega una ecuación de equilibrio relativo por cada vínculo entre cuerpos.

### Cadenas cerradas en el plano

Si las cadenas de cuerpos forman una estructura cerrada, cada cuerpo se vincula con dos cuerpos.

La cantidad de grados de libertad totales en cadenas cerradas es la misma que para cadenas abiertas, que son 3 GL por chapa:

$$GL = 3 \cdot n \quad (\text{Eq 10})$$

Como cada cuerpo se vincula con dos cuerpos, entonces la cantidad de vínculos para la cadena es igual a la cantidad de cuerpos. Cada vínculo interno que restringe 2 grados de libertad, la cantidad de vínculos internos será igual a la cantidad de chapas menos uno.

$$VI = n \quad (\text{Eq 11})$$

La cantidad de condiciones de vínculo interno es igual a dos veces la cantidad de vínculos, que es igual a la cantidad de cuerpos.

$$CVI = 2 \cdot n \quad (\text{Eq 12})$$

Despejando la cantidad de condiciones de vínculo externo de la condición  $GL = CV$ :

$$CVE = GL - CVI = 3n - 2n \quad (\text{Eq 13})$$

Por lo tanto, para cadenas cerradas de  $n$  cuerpos isoestáticas, es necesario, pero no suficiente, que condiciones de vínculo externo sean iguales a la cantidad de cuerpos:

$$CVE = n \quad (\text{Eq 14})$$

### Cadenas cerradas de 3 cuerpos

Para formar una cadena cerrada de cuerpos es necesario contar con al menos 3 cuerpos. Este es el caso del triángulo, que forma una figura indeformable.

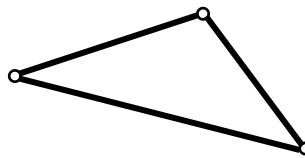


Figura 11. Triángulo plano indeformable

La cantidad de condiciones de vínculo externo es igual a la cantidad de cuerpos. En el caso de cadenas de tres cuerpos, sus condiciones de vínculo externo son tres, de forma que se comporta igual que un único cuerpo. De esta manera, para conocer las reacciones de vínculo externo para una cadena cerrada de 3 cuerpos plana, basta con plantear las ecuaciones de equilibrio en el plano Eq. 1.

Si la forma de los cuerpos fuera tal que las 3 articulaciones que los vinculan quedaran alineadas, estaríamos frente al caso de vinculación aparente.

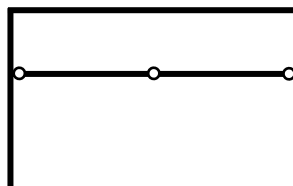


Figura 12. Ejemplo de vinculación aparente en cadenas cerradas de 3 cuerpos en el plano

Cadenas cerradas de n cuerpos en el plano<sup>9</sup>

Si la cadena está formada por más de 3 cuerpos, entonces las ecuaciones de equilibrio global ya no serán suficientes para determinar los valores de las reacciones de vínculo, dado un estado de cargas actuante sobre la estructura.

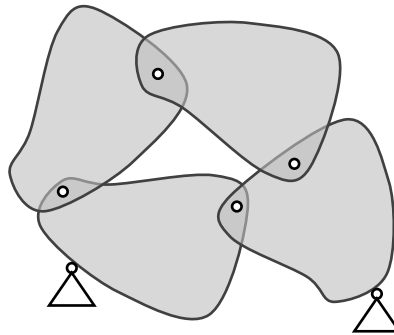


Figura 13. Cadena de cerrada de 4 cuerpos

Será necesario utilizar las ecuaciones de equilibrio relativo. Sin embargo, en una cadena cerrada no pueden identificarse dos partes unidas mediante un vínculo, ya que cada cuerpo se encuentra unido al subsiguiente de manera directa a través del vínculo entre ellos y de manera indirecta a través de la cadena que desemboca en mismo cuerpo subsiguiente.

Es necesario entonces **abrir** la cadena cerrada, poniendo de manifiesto los vínculos internos, que también son incógnitas. De esta manera, si bien se agregan incógnitas al sistema de ecuaciones, pueden utilizarse las ecuaciones de equilibrio relativo en todos los vínculos.

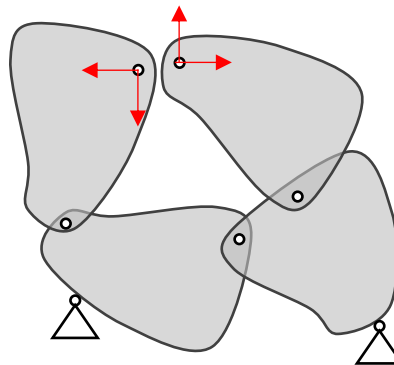


Figura 14. Para la resolución, es necesario abrir la cadena poniendo de manifiesto las reacciones de vínculo internos<sup>10</sup>.

Para simplicidad de cálculos es conveniente abrir la cadena en un vínculo interno, de forma que como el vínculo permite un grado de libertad, la cantidad de incógnitas que se agregan son las dos que restringe.

Una vez abierta la cadena, el procedimiento de resolución es el mismo que en el tratamiento de cadenas abiertas en el plano.

### A modo de resumen

- En Estabilidad I se estudian estructuras de barras isoestáticas.
- Grados de libertad de un cuerpo representan las posibilidades de movimiento independiente. Es decir el número de coordenadas libres que posee.
- Condiciones de vínculo: restricciones al movimiento en coordenadas independientes.
- Reacciones de vínculo: en los vínculos, cada restricción en coordenada independiente se puede reemplazar por una fuerza o momento en esa dirección.
- Condiciones de vinculación:

<sup>9</sup> Por lo general, en Estabilidad I no se resolverán cadenas de más de 4 cuerpos.

<sup>10</sup> Notar que el equilibrio se plantea en la configuración geométrica inicial, sin abrir

Hiperestática	Isoestática	Hipoestática (mecanismo)
$GL < CV$	$GL = CV$ + CI	$GL > CV$

- Cinemáticamente invariable o estable: Frente a cualquier sistema de fuerzas que actúe sobre la estructura ésta permanecerá en reposo
- Análisis isoestaticidad: doble verificación:
  - Condición necesaria, pero no suficiente,  $GL \leq CV$
  - Verificación de inexistencia de vinculación aparente.
- La cantidad de grados de libertad de un cuerpo en el plano es 3 y en el espacio es 6.
- La cantidad de condiciones de vínculo externo necesarios, pero no suficientes, de una cadena abierta de  $n$  cuerpos isoestática en el plano es  $CVE = n + 2$ .
- Para resolver cadenas abiertas de 2 cuerpos o más es necesario plantear ecuaciones de equilibrio relativo, además de las ecuaciones de equilibrio global.
- La cantidad de condiciones de vínculo externo necesarios de una cadena cerrada de  $n$  cuerpos en el plano es  $CVE = n$
- Las cadenas cerradas de 3 cuerpos en el plano se comportan como un solo cuerpo en el plano.
- Para resolver cadenas cerradas de 4 o más cuerpos es necesario abrir la cadena, poniendo de manifiesto sus vínculos internos y plantear ecuaciones de equilibrio relativo, además de las ecuaciones de equilibrio global.



**Anexos**

**Equilibrio de una partícula**

Dada una partícula, o punto material, sometida a la acción de un sistema de fuerzas. Dado que las fuerzas se encuentran aplicadas sobre la misma partícula, sus rectas de acción concurren sobre ella. Por lo tanto se trata de un sistema de fuerzas concurrentes. Si la partícula se encuentra en reposo, el sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio.

En términos de un sistema de coordenadas independientes  $x, y, z$ , se pueden expresar las ecuaciones de equilibrio según:

Equilibrio de una partícula en el plano:

$$\vec{R} = \sum F_i = 0 \quad \begin{matrix} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{matrix} \quad (\text{Eq 1})$$

Equilibrio de una partícula en el espacio:

$$\vec{R} = \sum F_i = 0 \quad \begin{matrix} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{matrix} \quad (\text{Eq 2})$$

Grados de libertad de una partícula

	Plano	Espacio
Partícula	2 GL	3 GL

Tabla 9. Grados de libertad de partículas y cuerpo

**Resolución de ejercicios**

Para calcular las RVE los pasos a seguir en cualquier tipo de estructura son:

- Análisis cinemático
- En DCL: reemplazo de las CV por las RVE
- Planteo y resolución de las ecuaciones
- Exposición y chequeo de los resultados: DCE

A continuación una serie de ejemplos:

**Resolución de un arco de 3 articulaciones**

Dado el caso conocido del arco de 3 articulaciones, sometido a la acción de un estado de cargas determinado, se pueden poner de manifiesto las componentes escalares de fuerza que son las reacciones en los vínculos. Las direcciones de las fuerzas responden a una propuesta de sistema de referencia de coordenadas independientes. El sentido de las fuerzas propuesto inicialmente es arbitrario y será corroborado o corregido según el resultado sea positivo o negativo. El punto de aplicación será el punto en que el vínculo está unido al cuerpo.

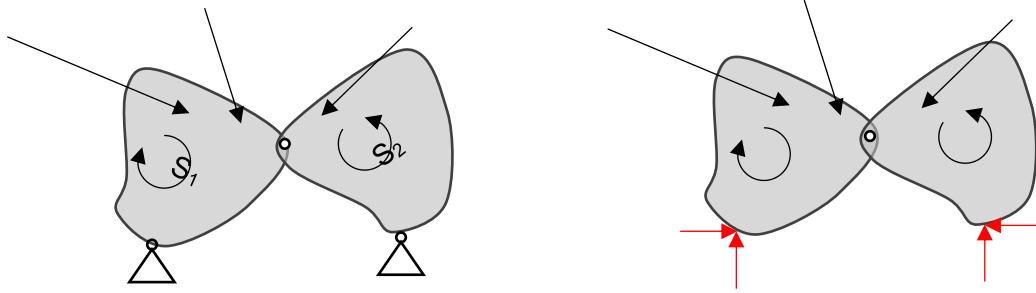


Figura 15. Diagrama de cuerpo libre de arco de 3 articulaciones sometido a un estado de cargas.

Las ecuaciones de equilibrio globales son 3:  $\sum F_x = 0$ ;  $\sum F_y = 0$ ;  $\sum M_z = 0$

Es necesario plantear además una ecuación de equilibrio relativo, de un cuerpo respecto del otro. Como el vínculo entre ambos cuerpos es una articulación, la ecuación de equilibrio adecuada será:

### Resolución de cadena abierta de 3 cuerpos

### Resolución de cadena cerrada de 4 cuerpos