Departamento de Estabilidad

84.02/64.01 ESTABILIDAD I

FUERZAS DISTRIBUIDAS

Por: Ing. Carolina Pérez Taboada[1]

Con la colaboración de: Ing. Luis Fernando Parente[2]

---

[1] JTP del Dto. de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, UBA

[2] JTP del Dto. de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, UBA

Índice de contenidos

Fuentes de consulta

El presente apunte se ha confeccionado en base a la bibliografía que se detalla a continuación. Para mayor profundidad o detalles, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos, favor de recurrir a las fuentes.

- Mecánica vectorial para ingenieros - Estática, Russell C. Hibbeler, Pearson, 2004. (pag. 180)
- Estabilidad – 1º curso, Enrique D. Fliess, Edit. Kapeluz, 1963. (pag. 241)
- Hidráulica general y aplicada a la ingeniería sanitaria y selección de tuberías, Pérez Ferrás, Capítulo 5 (pag. 169)

Fuerzas distribuidas

Objetivos

Los objetivos del presente documento son:

- Que el estudiante comprenda qué representan las cargas distribuidas como fenómeno físico
- Que el estudiante sepa determinar la resultante y la ubicación de la misma para las cargas distribuidas más usuales
- Que el estudiante sepa determinar el empuje sobre las paredes y fondo de un recipiente que contiene un fluido, y pueda identificar la parte del empuje que actúa sobre una compuerta

Fuerzas

Se ha estudiado que las fuerzas son abstracciones matemáticas para representar el efecto de una acción sobre un cuerpo.

Se ha representado mediante fuerzas concentradas a todas las acciones, sin embargo a veces este modelo puede no representar la realidad. Yendo de lo más general a lo más particular, según el fenómeno físico que se esté analizando, será más adecuada la representación de la acción desde una fuerza como distribuida en volumen hasta la fuerza concentrada. A saber:

- El caso más general será como una fuerza distribuida en un volumen, como es la acción que ejerce la gravedad sobre las masas.
- En cambio para el caso de la acción del viento sobre una estructura o la presión de agua sobre las paredes de un recipiente, resulta más adecuada la representación de la acción repartida en la superficie.
- Dependiendo de las condiciones geométricas, tanto de la carga como de la superficie, se podría simplificar en una acción distribuida linealmente.
- Finalmente, para algunos casos donde la intensidad de la fuerza es grande y la superficie de contacto es lo suficientemente pequeña puede modelizarse la fuerza como concentrada en un punto. Un ejemplo es la acción de la descarga de un puente grúa sobre el camino de rodadura.

Este apunte está dedicado al caso de las fuerzas distribuidas sobre superficies. Particularmente estudiaremos los empujes cuya dirección es perpendicular a la superficie afectada (presión).

Fuerza superficial: presión

Las fuerzas distribuidas superficiales se deben a la acción que ejercen sobre un cuerpo, por contacto directo, con otros cuerpos sólidos o fluidos.

A la fuerza que ejerce un cuerpo sobre el otro, le corresponde otra fuerza de igual módulo y dirección y sentido opuesto que el segundo cuerpo ejerce sobre el primero (principio de acción y reacción).

Se define como **presión** a la intensidad de la carga perpendicular a una superficie, y como **fricción** a la componente paralela a la tangente de la superficie. La acción superficial por contacto con otros cuerpos sólidos o de un fluido en reposo (hidrostática) es en general una presión.

Unidades de presión

La unidad de presión del SI es el Pascal, que se define como la unidad de fuerza sobre la unidad de superficie: $\frac{F}{l^2} = \left[\frac{N}{m^2}\right] = [Pa]$.

Los valores usuales de presión, sin embargo, hacen más conveniente la utilización de $\left[\frac{N}{cm^2}\right]$.

Es usual referirse a cargas distribuidas en términos de kg/cm².[3]

Aceptando la equivalencia de $1\ kg \cong 10\ N$, en términos prácticos se utilizará: $1\ \frac{kg}{cm^2} \cong 10\ ^5 Pa$

[3] En realidad se trata de kgf, kilogramos fuerza.

Presión sobre una superficie plana

Dada una superficie plana *A* sobre la cual actúa una carga distribuida *q* perpendicular al plano de la superficie. La carga está compuesta por una distribución de fuerzas paralelas, que según un par de ejes cartesianos *x, y* que contienen a la superficie, puede ser representada mediante una función continua y derivable *q(x,y)*.

Se busca reemplazar la carga distribuida *q(x,y)* por una carga puntual equivalente, llamada resultante *R*. Para ello es necesario considerar la acción de la carga sobre un sector muy pequeño de la superficie, que llevado al límite será la carga diferencial *d q(x,y)* sobre el diferencial de área *dA*.

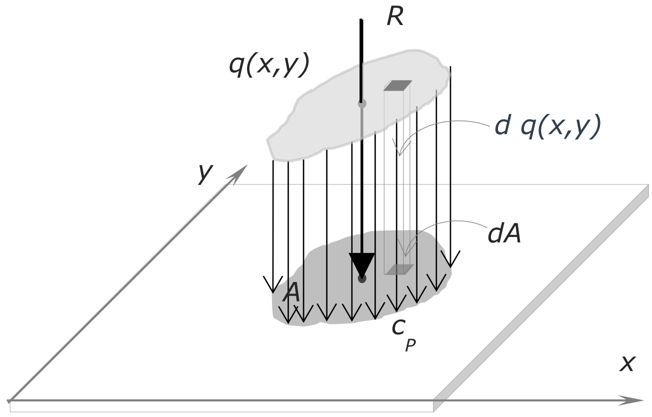


Figura 1. Resultante *R* es la fuerza concentrada equivalente aplicada en c_p

Resultante

La magnitud de la fuerza resultante *R* es equivalente al volumen de todas las cargas. Si para cada diferencial de área dA le corresponde una función *q(x,y)* contínua y derivable, el volumen bajo la superficie es la integral:

$$R = \int q(x,y)\, dA \qquad \text{(Eq 1)}$$

Ubicación de la resultante

El punto de aplicación de la resultante sobre la superficie se le llama centro de presiones c_p.

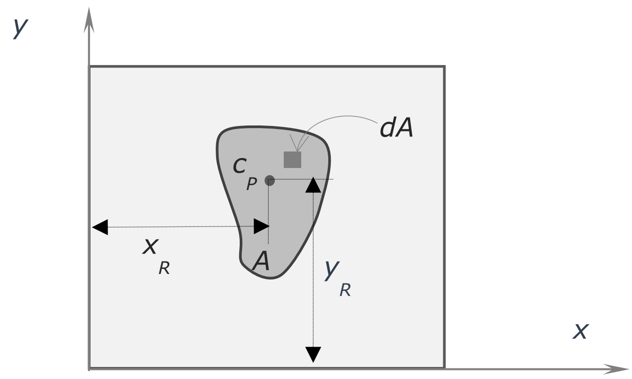


Figura 2. Centro de presiones c_P sobre el sector de superficie donde actúa la carga (planta de la Figura 1)

La ubicación de c_p se obtiene de aplicar el Teorema de Varignon, es decir, igualar los momentos de todas las fuerzas distribuidas respecto de un punto del conjunto y el momento respecto del mismo punto de la resultante *R*. Esto es:

$$\int M_{q(x,y)} = M_R \qquad \text{(Eq 2)}$$

Descomponemos eje por eje, reemplazando el valor de R:

$$\int x.q(x,y)\,dA = x_R.\int q(x,y)\,dA = x_R.R$$
$$\int y.q(x,y)\,dA = y_R.\int q(x,y)\,dA = y_R.R \qquad \text{(Eq 3)}$$

Por lo que la ubicación de la resultante c_P es:

$$x_R = \frac{\int x.q(x,y)\,dA}{\int q(x,y)\,dA}$$
$$y_R = \frac{\int y.q(x,y)\,dA}{\int q(x,y)\,dA} \qquad \text{(Eq 4)}$$

Fuerzas paralelas de distribuidas a lo largo de una línea

El caso más frecuente es el de una carga distribuida sobre una superficie plana con una geometría tal que puede ser representada sobre una línea. Este es un modelo adecuado para las cargas de viento, del peso propio del material soportado por un elemento estructural o la acción de los fluidos[4].

Dada una superficie plana de ancho *b* y largo *L*, sometida a la acción de una carga paralela distribuida en la superficie que tiene solamente variación según el eje *x, q(x)*.

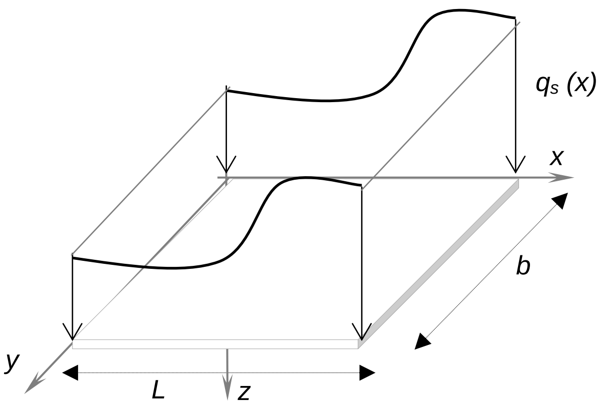


Figura 3. Carga simétrica respecto de un eje paralelo a *x*, distribuida en un plano $q_S(x)\left[\frac{N}{m^2}\right]$

Debido a la simetría se puede analizar la carga *q (x)* sobre una línea de ancho *b*.

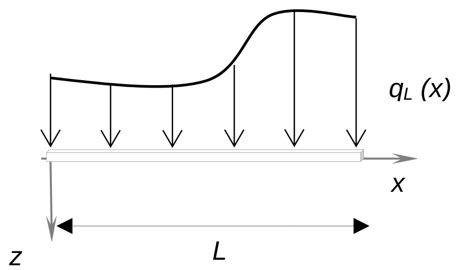


Figura 4. Carga lineal equivalente

[4] La acción de los fluidos sobre las superficies que los contienen se estudiarán particularmente en el apartado Hidrostática.

La carga lineal equivalente responde a la función:

$$q_L(x)\left[\frac{N}{m}\right] = q_S(x)\left[\frac{N}{m^2}\right]\cdot b[m] \qquad \text{(Eq 5)}$$

Resultante

Para determinar la resultante es necesario considerar un diferencial de carga *d* $q_L(x)$ aplicado sobre un diferencial de línea *d L*.

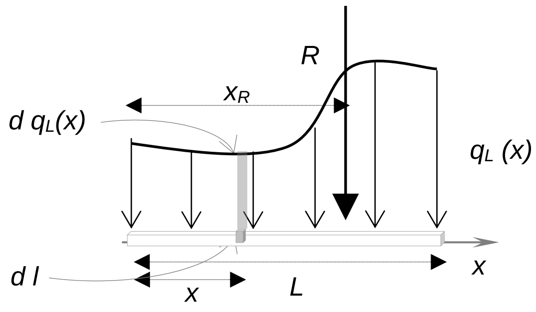


Figura 5. Resultante de carga lineal

La resultante del sistema de infinitas fuerzas paralelas es una única fuerza equivalente que tendrá la misma dirección de las fuerzas distribuidas e intensidad igual a la sumatoria del sistema, que es la integral lineal.

$$R = \int q_L(x)\, dL \qquad \text{(Eq 6)}$$

Ubicación de la resultante

La ubicación de la carga resultante será aquella que iguale los momentos del sistema de fuerzas distribuidas con el momento de la resultante respecto de un mismo punto. O sea:

$$\int M_{q_L(x)} = M_R \qquad \text{(Eq 7)}$$

Si consideramos los momentos respecto del origen de coordenadas:

$$\int x.q_L(x)\, dL = x_R.\int q_L(x)\, dL = x_R.R \qquad \text{(Eq 8)}$$

Y la ubicación de la resultante respecto del origen de coordenadas es:

$$x_R = \frac{\int x.q_L(x)\, dL}{\int q_L(x)\, dL} \qquad \text{(Eq 9)}$$

Casos más usuales de cargas paralelas distribuidas en una línea

Carga uniforme

El caso particular y más frecuente de cargas distribuidas es el de la carga uniforme. No porque sea tan frecuente como fenómeno físico estricto, sino porque es una aproximación a la realidad que simplifica los cálculos y no supone errores demasiado groseros.

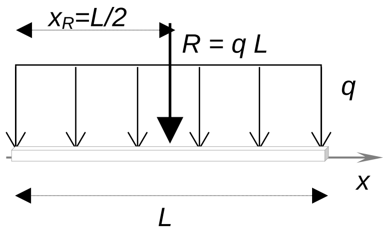


Figura 6. Carga uniforme

Para este caso la carga uniformemente distribuida tiene como función el valor de una constante que llamaremos q. Entonces la resultante se calcula como:

$$R = \int_{L=0}^{L} q\, dx = q \cdot L \qquad \text{(Eq 10)}$$

Y la ubicación será:

$$x_R = \frac{\int_{L=0}^{L} q \cdot x \cdot\ dx}{q \cdot L} = \frac{q\,\frac{L^2}{2}}{q \cdot L} = \frac{L}{2} \qquad \text{(Eq 11)}$$

Carga de distribución triangular

Otro caso, menos frecuente que el anterior, es el de cargas cuya distribución responde a una función lineal con una ordenada igual a cero, esto es diagrama de cargas triangular:

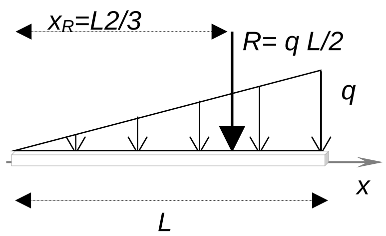


Figura 7. Carga triangular

Para este caso la carga tiene se puede representar mediante una función lineal $q(x) = q \cdot \frac{x}{L}$, siendo q un valor constante coincidente con el valor máximo de carga.

La resultante se calcula como:

$$R = \int_{L=0}^{L} q\,\frac{x}{L}\, dx = q \cdot \frac{L}{2} \qquad \text{(Eq 12)}$$

Y la ubicación será:

$$x_R = \frac{\int_{L=0}^{L} q\,\frac{x^2}{L}\, dx}{q \cdot \frac{L}{2}} = \frac{q\,\frac{L^2}{3}}{q \cdot L} = \frac{2}{3}L \qquad \text{(Eq 13)}$$

Carga de distribución trapecial

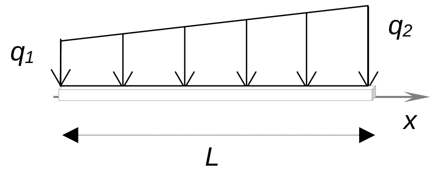


Figura 8. Carga trapecial

Pensaremos a la carga trapecial como dos cargas triangulares o bien como una carga uniforme y una carga triangular. A saber:

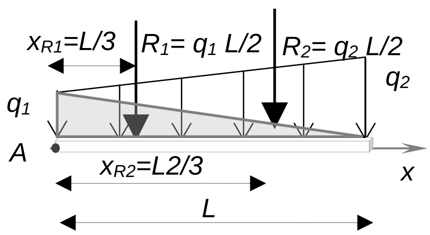


Figura 9. Carga trapecial: como dos triángulares

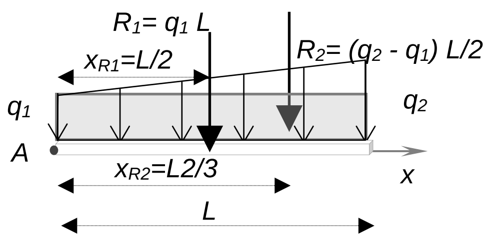


Figura 10. Cara trapecial: como una uniforme y una triangular

En cualquiera de los dos casos, para obtener la resultante total de la carga trapecial, basta con componer ambas las dos resultantes intermedias obtenidas.

Intensidad de la resultante trapecial: $R = R_1 + R_2$

Como suma de dos triangulares

$$q_1 \frac{L}{2} + q_2 \frac{L}{2} = \frac{L}{2}(q_1 + q_2)$$

Como suma de triangular y uniforme

$$q_1\, L + (q_2 - q_1)\frac{L}{2} = \frac{L}{2}(q_1 + q_2)$$

$$R = \frac{L}{2}(q_1 + q_2) \qquad \text{(Eq 14)}$$

Para obtener la ubicación utilizaremos igualaremos los momentos de las dos resultantes intermedias con el momento de la resultante total respecto del origen de coordenadas.

Esto es:

$$M_R^O = M_{R_1}^O + M_{R_2}^O \qquad \text{(Eq 15)}$$

Para cada caso:

Como suma de dos triangulares

$$\frac{L}{2}(q_1 + q_2) \cdot x_R = q_1 \frac{L}{2}\frac{L}{3} + q_2 \frac{L}{2}\frac{2\,L}{2}$$

Como suma de triangular y uniforme

$$\frac{L}{2}(q_1 + q_2) \cdot x_R = q_1\, L\frac{L}{2} + (q_2 - q_1)\frac{L}{2}\frac{2\,L}{3}$$

$$x_R = \frac{L}{3}\frac{(q_1 + 2\,q_2)}{(q_1 + q_2)} \qquad \text{(Eq 16)}$$

Como puede verse, por cualquiera de los dos caminos se llega al mismo resultado.

Podría pensarse a la carga triangular como un caso particular de carga con distribución trapecial, donde q_1 es cero. Comprobamos entonces los resultados obtenidos anteriormente.

> **NOTA:** Para la resolución de ejercicios prácticos se recurrirá exclusivamente a la aproximación según alguno de los casos particulares calculados: uniforme o triangular. Salvo indicación contraria, no será necesario volver a calcular la resultante o la ubicación de la misma integrando la función carga. Se utilizarán en cambio los resultados obtenidos, tal como se hizo para la carga trapecial.

Fuerzas sobre superficies de curvatura circular

Si la línea sobre la que están repartidas las cargas no es recta, sino que describe una porción de circunferencia, y la presión sobre la línea es una carga distribuida son uniforme y perpendicular a la línea en cada punto, entonces se puede reemplazar la carga distribuida sobre la curva por la misma carga pero distribuida en sobre la recta secante.

Esto es:

Figura 11. Cargas equivalente para sector de circunferencia

Es importante notar que la resultante necesariamente pasará por el centro del sector de la circunferencia ya que la carga distribuida está compuesta por fuerzas concurrentes a ese punto, independientemente de si la carga es uniforme o variable.

En el Anexo el detalle de la deducción y casos de aplicación.

Hidrostática

La hidrostática es la rama de la hidráulica que estudia los fluidos en estado de reposo. En Estabilidad no estudiaremos los fluidos propiamente, sino su acción sobre los elementos de que los contienen. El comportamiento de la acción de los fluidos se rige por dos principios:

Principio de Pascal

ENUNCIADO: *“La presión ejercida sobre un líquido que se encuentra encerrado en un recipiente de paredes indeformables, se transmite por igual a todos los puntos del líquido y las paredes de dicho recipiente.”*

Principio de Arquímedes

ENUNCIADO: *“Todo cuerpo que se sumerge en un líquido experimenta un empuje de abajo hacia arriba que es igual al peso del volumen de líquido desalojado”*

Presión de un fluido en equilibrio: Ecuación fundamental de la hidrostática

Según la ecuación fundamental de la hidrostática[5], la variación de la presión es linealmente dependiente de la profundidad.

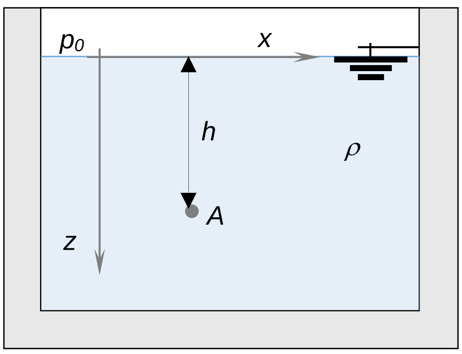


Figura 12. Recipiente conteniendo un fluido en equilibrio

[5] Para la demostración de esta ecuación recurrir a la bibliografía especificada.

Dado un recipiente que contiene un líquido de peso específico ρ, la presión *p* que ejerce el fluido sobre el punto *A* a una profundidad *h*[6], desde el pelo del agua responde a la **ecuación fundamental de la hidrostática**:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \qquad \text{(Eq 17)}$$

Siendo:

p	La presión
p_0	La presión ambiental, que suponemos de valor 0
ρ	El peso específico del líquido
g	La aceleración de la gravedad
h	La profundidad desde el pelo del agua

Se asume un valor de presión inicial igual a cero, dado que si el recipiente está a cielo abierto se tratará de la presión ambiental.

Por lo tanto la presión sobre las paredes del recipiente responde a una distribución triangular y el fondo a una distribución uniforme, según se muestra en la siguiente figura:

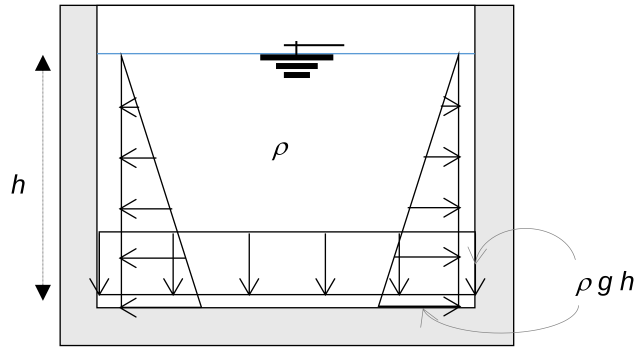


Figura 13. Presión sobre las paredes y fondo del recipiente

El valor de la resultante de la presión de un líquido se lo conoce como Empuje y se calcula de la misma manera que las acciones de distribución triangular o uniforme sobre cualquier superficie.

Unidades y densidad del agua

La unidad de presión es el Pascal, que en términos de la ecuación fundamental de la hidrostática se compone según:

$$p[Pa] = \rho\left[\frac{kg}{m^3}\right] \cdot g\left[\frac{m}{s^2}\right] \cdot h[m] = \left[\frac{N}{m^2}\right] \qquad \text{(Eq 18)}$$

El líquido con el que trataremos frecuentemente es el agua. La densidad del agua es de 1 kg por cada m^3, esto es: $\rho_{agua} = 1\,\frac{ton\ masa}{m^3}$

Se acuerdo con la aproximación que indicamos sería de uso corriente en Estabilidad para la aceleración de la gravedad, calculamos el peso específico del agua como:

$$\gamma_{agua} = \rho_{agua} \cdot g = 1\,\frac{ton\ masa}{m^3} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cong 10\,\frac{kN}{m^3} \qquad \text{(Eq 19)}$$

[6] Esta presión es la misma tanto sobre cada una de las partículas del fluido como sobre las paredes del recipiente que lo contiene a la misma profundidad.

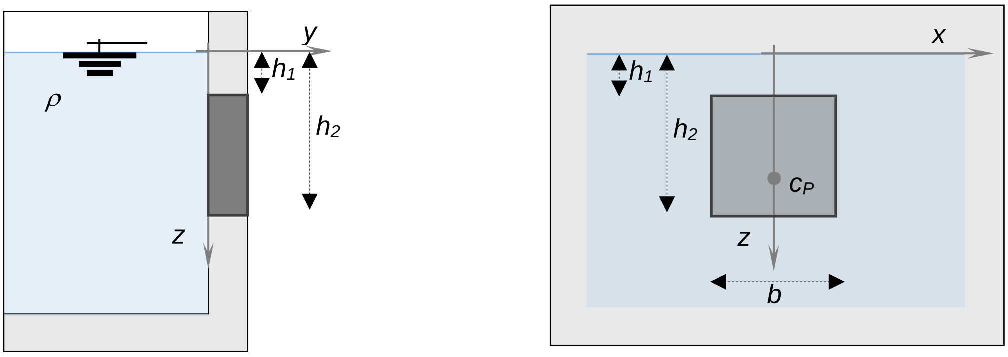
Compuerta sobre pared vertical

Muchas veces es útil calcular la acción del fluido actuando sobre una porción del recipiente que lo contiene, como es el caso de las **compuertas**.

Compuerta rectangular

El caso más general es el de una compuerta plana de forma rectangular sobre una pared vertical.

Dado un tanque lleno un fluido de peso específico ρ, que tiene en una de sus paredes una compuerta de ancho b, donde su cota superior se encuentra a una profundidad h_1 y su cota inferior a h_2, sometida al empuje del fluido.



Corte

Vista

Figura 14. Compuerta rectangular sobre pared plana vertical

Se desea conocer el empuje sobre dicha compuerta y su profundidad.

El empuje total sobre la pared responde a una distribución triangular, por lo tanto, la porción que le corresponde a la compuerta será trapecial, con valores de carga superficial distribuida dependientes de las cotas inicial y final de la compuerta.

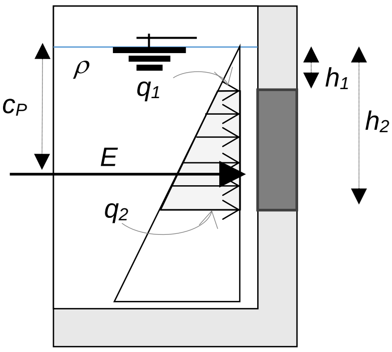


Figura 15. Diagrama de cargas, empuje E y profundidad del empuje c_P

Dado que el ancho de la compuerta es un valor constante b, entonces puede considerarse una carga trapecial distribuida en una línea, de valores superior e inferior respectivamente:

$$q_1 \left[\frac{N}{m}\right] = \gamma \cdot b \cdot h_1 \quad ; \quad q_2 \left[\frac{N}{m}\right] = \gamma \cdot b \cdot h_2 \qquad \text{(Eq 20)}$$

Y el valor del empuje surge de calcular la resultante del diagrama trapecial de cargas, de acuerdo con la ecuación Eq 13:

$$R[N] = \frac{(h_2 - h_1)}{2}(q_2 + q_2) \qquad \text{(Eq 21)}$$

La profundidad del empuje, respecto de pelo del agua, basados en la ecuación Eq 15, es:

$$c_P[m] = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)}{3}\frac{(q_1 + 2\,q_2)}{(q_1 + q_2)} \qquad \text{(Eq 22)}$$

Compuerta plana sobre pared inclinada

Si la pared que aloja la compuerta no fuese vertical, entonces a la acción del empuje horizontal del fluido se debe, o bien adicionar el peso del agua o bien restarle el volumen del fluido desalojado, según el Principio de Arquímedes.

Inclinación cóncava

La inclinación cóncava de la compuerta obliga a la misma a tener que soportar el peso del fluido que se encuentra por encima de la misma, además del empuje horizontal.

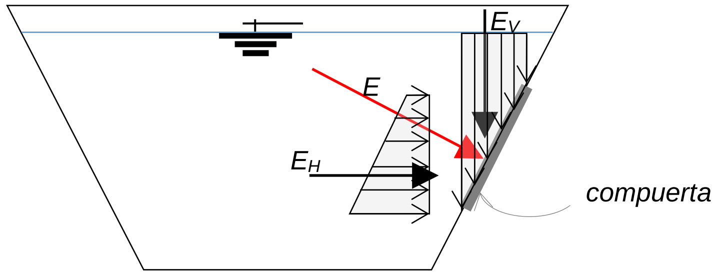


Figura 16. Diagramas de cargas para compuerta con inclinación cóncava

El valor de E_H se calcula igual que si la compuerta fuera vertical. El valor de E_V surge de calcular el peso de la columna de agua que apoya sobre la compuerta. La composición de E_H y E_V, da como resultado el empuje total sobre la compuerta E, que es la resultante de la presión sobre la misma y por lo tanto será perpendicular a la compuerta.

$$E = \sqrt[2]{{E_H}^2 + {E_V}^2} \qquad \text{(Eq 23)}$$

El empuje depende de la densidad y los parámetros geométricos de la morfología y profundidad de la compuerta.

Otra manera de encontrar la resultante y su posición es por medio del cálculo integral según se propone en el anexo.

Inclinación convexa

Cuando la inclinación en cambio es convexa, entonces existe una fuerza que tiende a levantar la compuerta, que es igual a la columna de agua que no está sobre la compuerta. O sea que la compuerta tiende a flotar, con una fuerza hacia arriba igual al peso de la columna de agua que estaría sobre la misma si afuera existiera el mismo nivel de agua que dentro del recipiente.

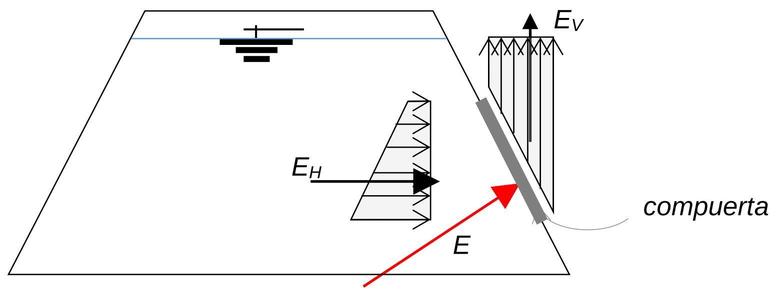


Figura 17. Diagramas de cargas para compuerta con inclinación convexa

De la misma manera que para el caso de inclinación cóncava, la composición de E_H y E_V, da como resultado el empuje total sobre la compuerta E, de acuerdo con la Eq 23, perpendicular a la superficie.

Conclusiones

Para todas las cargas distribuidas perpendiculares a una superficie o línea puede encontrarse una única fuerza llamada empuje E aplicada en un punto llamado centro de presiones c_P que produce un efecto equivalente.

Para obtener el valor del empuje se debe plantear la sumatoria discreta o integral de las cargas distribuidas actuantes.

Para obtener el centro de presiones se utiliza el Teorema de Varignon, eligiendo un punto cualquiera de la superficie en torno del cual la suma discreta o integral de los momentos de las cargas distribuidas deben ser iguales al momento de la resultante.

Tanto las cargas distribuidas como los empujes resultantes son sistemas de fuerzas concurrentes. Si se trata de cargas paralelas, entonces concurren al punto impropio de la dirección de la recta de acción de las mismas.

La resultante de las cargas distribuidas paralelas pasa por el baricentro de la figura que describe la carga.

La presión hidrostática depende del peso específico del fluido y es función lineal de la profundidad.

El empuje hidrostático sobre una compuerta depende de la geometría de la misma, de la profundidad y del peso específico del fluido.

La profundidad del empuje es independiente del peso específico del fluido, y siempre se encuentra por debajo del baricentro de la figura que describe la compuerta. Depende de la inercia respecto del eje paralelo a la superficie sobre la cual el fluido empuja, la profundidad del baricentro y el área.

ANEXOS

Fuerzas sobre superficies de curvatura circular: deducción y aplicaciones

Si se tiene una presión actuando sobre una superficie curva, entonces para cada sector de la curva las fuerzas actuantes tendrán la dirección perpendicular a la superficie.

Estudiaremos el caso particular de carga uniforme sobre una superficie de curvatura circular, cuya simetría permita representarla distribuida en una línea curvilínea.

Dada una carga distribuida *q*, distribuida en un sector de circunferencia de longitud *l* y radio *r*, se busca obtener la resultante *R* y sus componentes según una terna coordenada *x, y* con origen en el centro de la circunferencia.

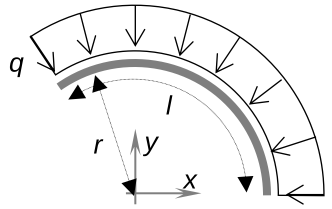


Figura 18. Carga circular

En cada punto de la curva, para una inclinación cualquiera α respecto de la horizontal, se puede descomponer la carga en sus componentes x, y, según:

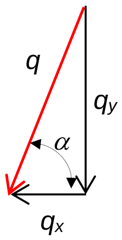


Figura 19. Descomposición de la carga según terna

Analíticamente:

$$q_x = \cos(\alpha) \cdot q$$
$$q_y = \sin(\alpha) \cdot q \qquad \text{(Eq 24)}$$

Si se considera un sector diferencial de la curva de longitud *dl* y apertura $d\alpha$ y radio *r*.

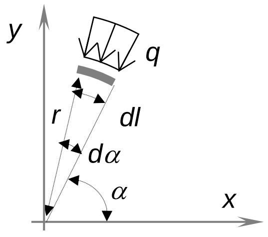


Figura 20. Sector diferencial de curva

Se puede expresar la longitud dl en función de la apertura, según:

$$dl = r \cdot d\alpha \qquad \text{(Eq 25)}$$

El diferencial de carga *dR* que actúa sobre ese sector es:

$$dR = q \cdot dl = q \cdot r \cdot d\alpha \qquad \text{(Eq 26)}$$

Que en componentes en *x, y* es:

$$dR_x = q_x \cdot dl = \cos(\alpha) \cdot q \cdot r \cdot d\alpha$$
$$dR_y = q_y \cdot dl = \sin(\alpha) \cdot q \cdot r \cdot d\alpha \qquad \text{(Eq 27)}$$

La resultante en cada una de las componentes se obtiene de integrar entre los límites de la apertura de la curva.

$$R = \int q \cdot r \cdot d\alpha$$
$$R_x = \int \cos(\alpha) \cdot q \cdot r \cdot d\alpha \qquad \text{(Eq 28)}$$
$$R_y = \int \sin(\alpha) \cdot q \cdot r \cdot d\alpha$$

Resultados para cuarto de circunferencia

Se aplica la ecuación obtenida previamente para α entre los límites de 0 y $\pi/2$.

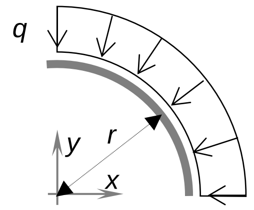


Figura 21. Cuarto de circunferencia $\alpha = \frac{\pi}{2}$

La resultante es:

$$R_x = q \cdot r \cdot \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha)\, d\alpha = q \cdot r$$
$$R_y = q \cdot r \cdot \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha)\, d\alpha = q \cdot r \qquad \text{(Eq 29)}$$

O sea que es equivalente a tener una carga uniformemente distribuida *q* en el radio en la dirección de *x* y en la dirección de *y*, o bien una carga distribuida *q* en la diagonal que une los extremos, de longitud $\sqrt{2}r$.

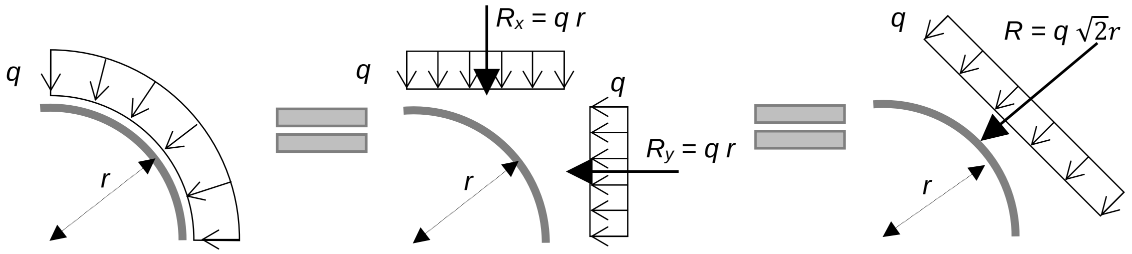


Figura 22. Cuarto de circunferencia: cargas equivalentes

Resultados para media circunferencia

Como caso análogo al anterior, se extienden los resultados considerando α entre los límites de 0 y π. De modo que en media circunferencia las acciones horizontales se equilibran entre sí, quedando solo como resultante la componente vertical.

Figura 23. Media circunferencia: carga equivalente

Presión sobre una compuerta plana con geometría simétrica

Para los casos en los que las compuertas no son rectangulares, pero poseen un eje de simetría, entonces puede considerarse un estado de cargas repartido en una línea que es función del ancho variable expresado en función de la profundidad.

Dado un problema similar al descripto en el apartado de Compuerta Rectangular, pero con una compuerta con forma cualquiera

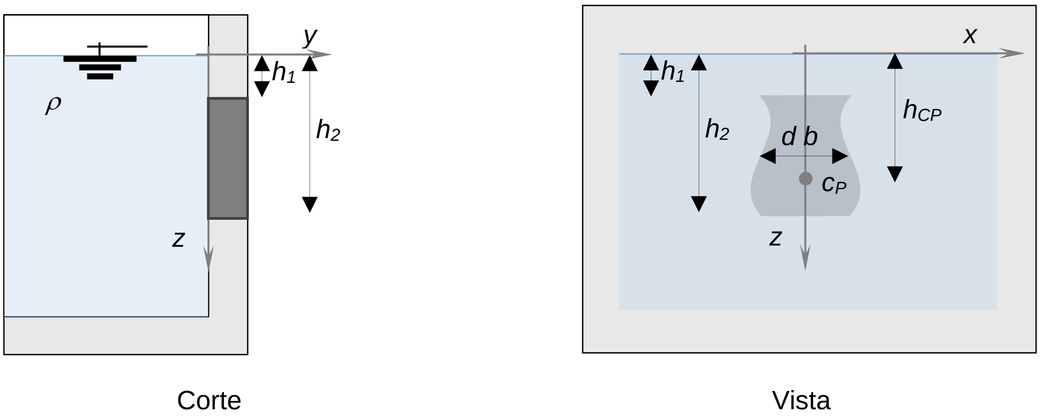


Figura 24. Compuerta de forma cualquiera con simetría sobre pared plana vertical

Si se hace coincidir el eje de simetría con el eje *z*, entonces se puede encontrar una carga distribuida en la línea del eje *z*.

Se supone conocida o fácil de obtener la función[7] que determina el ancho en función de la profundidad, que llamaremos *b(z).* Es posible expresar un diferencial de área como:

$$dA = b(z) \cdot dz \qquad \text{(Eq 30)}$$

La carga distribuida lineal $q_{lineal}(z)$ se obtiene de multiplicar la carga superficial por el área que tiene la misma carga para cada profundidad. Esto es:

$$q_{lineal}(z) = q(z) \cdot dA = q(z) \cdot b(z) \cdot dz \qquad \text{(Eq 31)}$$

Si la carga *q(z)* es la presión hidrostática, se trata de una función lineal de variable *z*. Si la función del ancho *b(z)* también es una función lineal, entonces la carga $q_{lineal}(z)$ es una función cuadrática.

La resultante por lo tanto será la integral de esta carga lineal entre los límites de profundidad de la compuerta:

$$R = \int_{z=h_1}^{h_2} q(z) \cdot b(z) \cdot dz \qquad \text{(Eq 32)}$$

Y la profundidad del empuje se obtiene de igualar los momentos respecto del pelo del agua:

$$h_{CP} = \frac{\int_{z=h_1}^{h_2} z \cdot q(z) \cdot b(z) \cdot dz}{\int_{z=h_1}^{h_2} q(z) \cdot b(z) \cdot dz} \qquad \text{(Eq 33)}$$

<u>En función de las características geométricas</u>

Con conocimientos sobre Geometría de las Superficies, es posible reconocer que los valores de resultante *R* y ubicación de la resultante h_{CP} se pueden expresar en función de las características geométricas de la figura que describe la compuerta bajo el sistema de referencia indicado, donde el eje x pertenece al plano de la compuerta y es paralelo al pelo del agua, y el eje z coincide con el eje de simetría de la figura.

[7] Si la función no fuera continua y derivable se puede realizar el cálculo de a tramos.

La expresión de la presión hidrostática en función de la densidad del líquido γ y la profundidad *h* es:

$$q(h) = \gamma \cdot h \qquad \text{(Eq 34)}$$

Que para el sistema de referencia de la figura de análisis la profundidad *h* coincide con la ordenada *z*.

$$q(z) = \gamma \cdot z \qquad \text{(Eq 35)}$$

Se puede expresar el valor de la resultante como:

$$R = \int_{z=h_1}^{h_2} \gamma \cdot z \cdot b(z) \cdot dz = \gamma \cdot \int_{z=h_1}^{h_2} z \cdot b(z) \cdot dz \qquad \text{(Eq 36)}$$

Donde:

$$S_x = \int_{z=h_1}^{h_2} z \cdot b(z) \cdot dz \qquad \text{(Eq 37)}$$

Que es el Momento Estático de la figura respecto del eje *x*. Este valor se puede expresar en función del área *A* de la figura y la posición del baricentro respecto del eje *x*, según:

$$S_x = z_G \cdot A \qquad \text{(Eq 38)}$$

Por lo tanto, el valor de la resultante se puede expresar:

$$R = \gamma \cdot S_x = \gamma \cdot z_G \cdot A \qquad \text{(Eq 39)}$$

Por lo que el empuje hidrostático sobre una superficie de forma cualquiera simétrica es igual al valor de la presión en el baricentro de la figura $\gamma \cdot z_G$ multiplicada por el área *A*.

Por otro lado, reemplazando el valor de q(z) según la ecuación Eq 34, en la Eq 33, el valor de la profundidad de dicho empuje se puede expresar como:

$$h_{CP} = \frac{\int_{z=h_1}^{h_2} z \cdot \gamma \cdot z \cdot b(z) \cdot dz}{\int_{z=h_1}^{h_2} \gamma \cdot z \cdot b(z) \cdot dz} = \frac{\gamma \cdot \int_{z=h_1}^{h_2} z^2 \cdot b(z) \cdot dz}{\gamma \cdot \int_{z=h_1}^{h_2} z \cdot b(z) \cdot dz} \qquad \text{(Eq 40)}$$

Donde en el dividendo se puede reconocer al Momento de Inercia de la figura respecto del eje x, y en el divisor se reconoce al Momento Estático, según la Eq 36.

$$I_x = \int_{z=h_1}^{h_2} z^2 \cdot b(z) \cdot dz \qquad \text{(Eq 41)}$$

Por lo cual la profundidad del empuje hidrostático es independiente de la densidad del líquido y se puede expresar según las características geométricas de la superficie como:

$$h_{CP} = \frac{I_x}{S_x} \qquad \text{(Eq 42)}$$

Compuerta inclinada

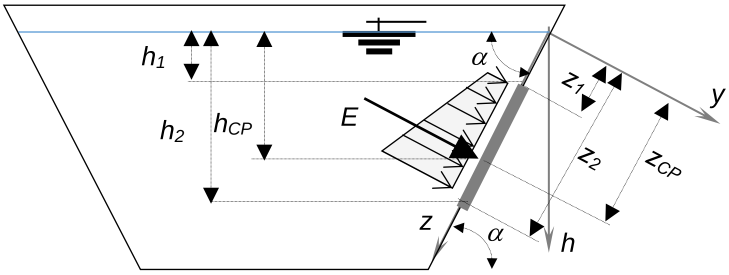


Figura 25. Compuerta inclinada

En el caso de que la compuerta tenga una inclinación α con respecto a la horizontal, la profundidad *h* se puede expresar en función del sistema de referencia según:

$$h = z \cdot \sin(\alpha) \qquad \text{(Eq 43)}$$

Entonces el valor de la carga, según la ecuación Eq 34 se puede expresar en función de *z* según:

$$q(z) = \gamma \cdot z \cdot \sin(\alpha) \qquad \text{(Eq 44)}$$

Por lo tanto las expresiones de resultante y profundidad de la resultante de las ecuaciones Eq 32 y Eq 33 respectivamente quedan:

$$R = \int_{z=z_1}^{z_2} \gamma \cdot z \cdot \sin(\alpha) \cdot b(z) \cdot dz \qquad \text{(Eq 45)}$$

$$h_{CP} = \frac{\int_{z=z_1}^{z_2} \gamma \cdot z \cdot \sin(\alpha) \cdot b(z) \cdot dz}{\int_{z=z_1}^{z_2} \gamma \cdot z \cdot \sin(\alpha) \cdot b(z) \cdot dz} \qquad \text{(Eq 46)}$$

Y en función de las características geométricas:

$$R = \gamma \cdot \sin(\alpha) \cdot S_x = \gamma \cdot \sin(\alpha) \cdot z_G \cdot A = \gamma \cdot h_G \cdot A \qquad \text{(Eq 47)}$$

$$h_{CP} = \frac{\gamma \cdot \sin(\alpha) \int_{z=z_1}^{z_2} z^2 \cdot b(z) \cdot dz}{\gamma \cdot \sin(\alpha) \int_{z=z_1}^{z_2} z \cdot b(z) \cdot dz} = \frac{I_x}{S_x} \qquad \text{(Eq 48)}$$

Que son las mismas conclusiones que para compuerta vertical, salvo que el valor de la resultante surge de considerar el valor de la presión a la profundidad del baricentro en dirección vertical desde el pelo del agua, y no en la dirección coincidente con la superficie de la compuerta.

Como comentario final podemos poner un caso particular de compuerta inclinada donde el ángulo α es 90º entonces el $sen(\alpha) = 1$, por lo tanto se observa que llegamos a las misma expresiones que el caso de compuerta plana vertical.