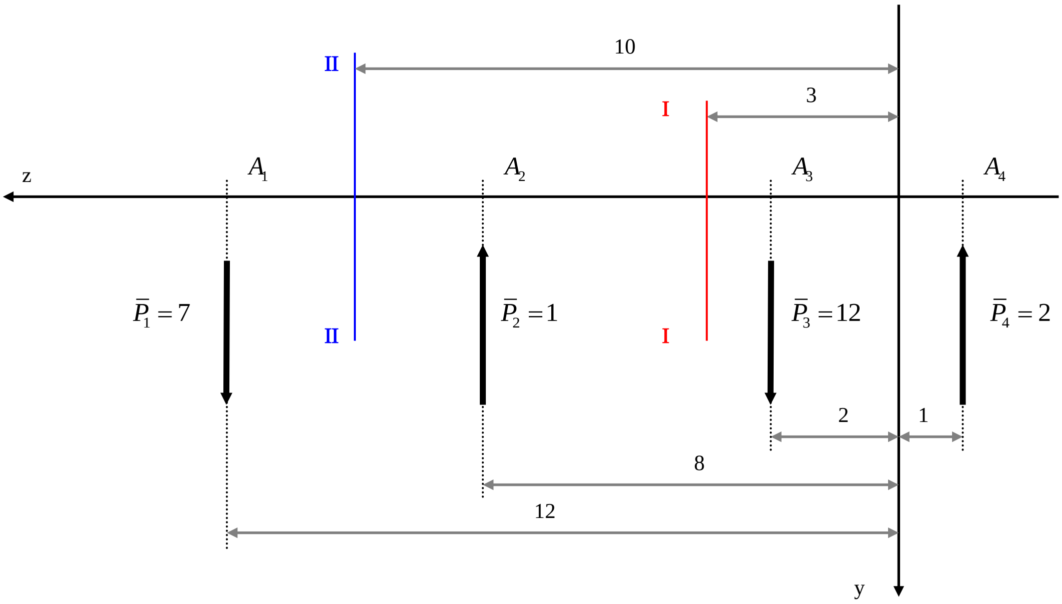
Ejercicio Nº 5 - Enunciado

Dado un sistema de fuerzas coplanares y paralelas

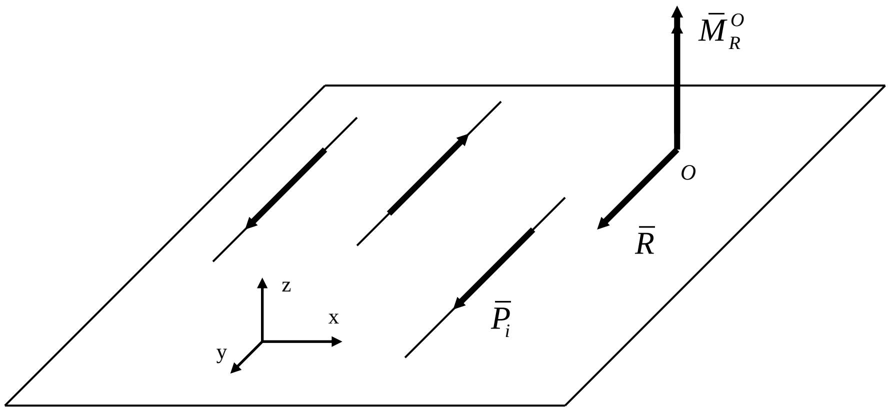


Fuerzas en [kN]
Distancias en [m]

Se solicita:
1. Determinar su resultante
2. Dadas dos direcciones, I-I y II-II, determinar dos fuerzas que, actuando sobre dichas direcciones, equilibren al sistema propuesto.

Ejercicio Nº 5 – Introducción teórica

Si en un sistema plano de fuerzas $P_i\left(i=1,2,3,...,n\right)$, sus rectas de acción son coplanares y paralelas a una misma dirección, se tiene



Al tomar como centro de reducción un punto O del plano, se tiene que:

$$\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i$$
$$\overline{M}_R^O=\sum_{i=1}^{n}\overline{M}_{P_i}^O$$

Como en todo sistema plano, el invariante escalar es nulo.

Si al reducir al punto O queda que $\overline{R}\neq\overline{0}$ y $\overline{M}_R^O\neq\overline{0}$, el sistema se reduce a una única fuerza $\overline{R}$, resultante del sistema de la dirección de las fuerzas y cuyo módulo es igual a la suma algebraica de los módulos P_i. Asignando a estos módulos P_i signos según que los sentidos de las fuerzas $\overline{P}_i$ coincidan o no con el sentido adoptado como positivo sobre el eje paralelo a la dirección de las fuerzas, del signo de la suma algebraica:

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i$$

resulta el sentido de la resultante. La recta de acción la resultante coincide con el eje central del sistema. Como todo sistema que admite resultante, se cumple que el momento del sistema respecto de un punto cualquiera es igual al momento de la resultante respecto del mismo punto (teorema de Varignon).

Si al reducir a un punto O, se tiene que $\overline{R}=\overline{0}$ y $\overline{M}_R^O\neq\overline{0}$, el sistema se reduce a un cupla en el plano de plano de las fuerzas, representada por el vector $\overline{M}_R^O$ normal a dicho plano.

Equivalencia de dos sistemas planos de fuerzas paralelas a una misma dirección

Un sistema I constituido por fuerzas $P_i\left(i=1,2,3,...,n\right)$ y otro II constituido por fuerzas $P_j\left(j=1,2,3,...,m\right)$ paralelos a una misma dirección son equivalentes si tienen igual resultante de traslación e igual momento resultante respecto de un mismo punto *O*. Es decir,

$$\overline{R}_I=\overline{R}_{II}$$
$$\overline{M}_{R_I}^O=\overline{M}_{R_{II}}^O$$

Estas expresiones vectoriales pueden escribirse de otra forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = \sum_{j=1}^{m} \overline{P}_j$$
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{P_i}^{O} = \sum_{j=1}^{m} \overline{M}_{P_j}^{O}$$

Equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas

Las condiciones de equilibrio son dos: resultante de traslación y momento respecto de un punto cualquiera nulos:

$$\overline{R} = \overline{0}$$
$$\overline{M}_R^O = \overline{0}$$

Las expresiones anteriores de las condiciones de equilibrio pueden escribirse de la siguiente manera:

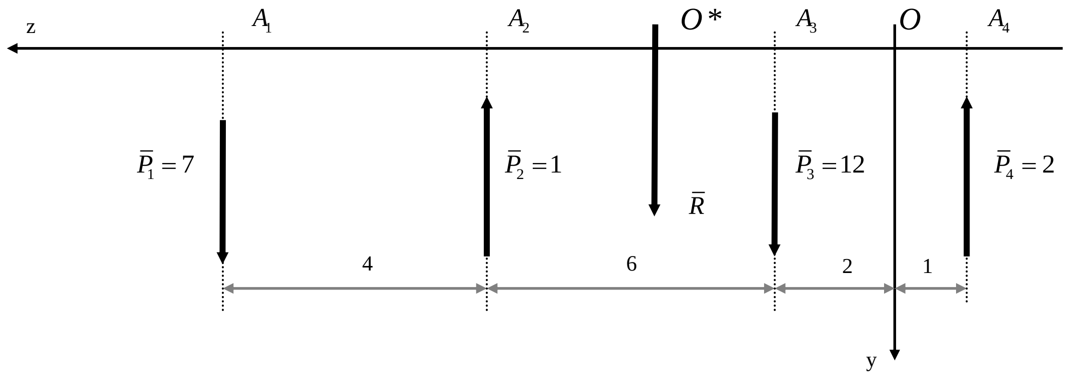
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = \overline{0}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{P_i}^{O} = \overline{0}$$

Otra forma de expresar las condiciones de equilibrio es mediante dos ecuaciones de momento:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{P_i}^{O_1} = \overline{0}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{P_i}^{O_2} = \overline{0}$$

Ejercicio Nº 5 - Resolución

1. Determinación de la resultante



De los datos se tiene que:

$$\bar{P}_1 = 0\breve{i} + 7\breve{j} + 0\breve{k} \qquad A_1 = (0 \quad 0 \quad 12)$$
$$\bar{P}_2 = 0\breve{i} - 1\breve{j} + 0\breve{k} \qquad A_2 = (0 \quad 0 \quad 8)$$
$$\bar{P}_3 = 0\breve{i} + 12\breve{j} + 0\breve{k} \qquad A_3 = (0 \quad 0 \quad 2)$$
$$\bar{P}_1 = 0\breve{i} - 2\breve{j} + 0\breve{k} \qquad A_4 = (0 \quad 0 \quad -1)$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{4} \bar{P}_i$$
$$\bar{R} = R_x\breve{i} + R_y\breve{j} + R_z\breve{k} = \sum_{i=1}^{4} P_{ix}\breve{i} + \sum_{i=1}^{4} P_{iy}\breve{j} + \sum_{i=1}^{4} P_{iz}\breve{k}$$
$$\sum_{i=1}^{4} P_{ix} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{4} P_{iy} = 7 - 1 + 12 - 2 = 16$$
$$\sum_{i=1}^{4} P_{iz} = 0$$

Luego, la resultante es:

$$\boldsymbol{\bar{R} = 0\breve{i} + 16\breve{j} + 0\breve{k}}$$
$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}} = \sqrt{(0)^2 + (16)^2 + (0)^2} = 16$$
$$\cos(\alpha_R) = \frac{R_x}{R} = \frac{0}{16} = 0$$
$$\cos(\beta_R) = \frac{R_y}{R} = \frac{16}{16} = 1$$
$$\cos(\gamma_R) = \frac{R_z}{R} = \frac{0}{16} = 0$$

$$\cos^2(\alpha_R) + \cos^2(\beta_R) + \cos^2(\gamma_R) = 1$$

Eligiendo el punto $O(0 \quad 0 \quad 0)$ como centro de reducción:

$$\bar{M}_R^{\,O} = M_{Rx}^{O}\breve{i} + M_{Ry}^{O}\breve{j} + M_{Rz}^{O}\breve{k} = \sum_{i=1}^{4} (A_i - O) \wedge \bar{P}_i = \sum_{i=1}^{4} \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ x_{Ai} & y_{Ai} & z_{Ai} \\ P_{ix} & P_{iy} & P_{iz} \end{vmatrix}$$

Pero como para los datos existentes $x_{Ai} = y_{Ai} = 0$ y $P_{ix} = P_{iz} = 0$, se la ecuación precedente se simplifica a:

$$\bar{M}_R^O = \sum_{i=1}^{4} \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & z_{Ai} \\ 0 & P_{iy} & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{4} \left(P_{iy} \cdot z_{Ai}\right)\breve{i} + 0\breve{j} + 0\breve{k} = -\left[7\cdot 12 + (-1)\cdot 8 + 12\cdot 2 + (-2)\cdot(-1)\right]\breve{i} + 0\breve{j} + 0\breve{k} = -102\breve{i} + 0\breve{j} + 0\breve{k}$$

$$M_R^O = \sqrt{\left(M_{Rx}^O\right)^2 + \left(M_{Ry}^O\right)^2 + \left(M_{Rz}^O\right)^2} = \sqrt{(-102)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 102$$

$$\cos(\alpha_M) = \frac{M_{Rx}^O}{M_R^O} = \frac{102}{102} = 1$$
$$\cos(\beta_M) = \frac{M_{Ry}^O}{M_R^O} = \frac{0}{102} = 0$$
$$\cos(\gamma_M) = \frac{M_{Rz}^O}{M_R^O} = \frac{0}{102} = 0$$

$$\cos^2(\alpha_M) + \cos^2(\beta_M) + \cos^2(\gamma_M) = 1$$

Finalmente, el binomio de reducción al punto *O* es:

$$\boldsymbol{\bar{R} = 0\breve{i} + 16\breve{j} + 0\breve{k}}$$
$$\boldsymbol{\bar{M}_R^O = -102\breve{i} + 0\breve{j} + 0\breve{k}}$$

Evidentemente, ambos vectores son perpendiculares, el $I_e = 0$, y el sistema admite resultante, la cual es $\bar{R} = 0\breve{i} + 16\breve{j} + 0\breve{k}$, es decir, que se conocen su dirección, módulo y sentido. Falta determinar un punto perteneciente a su recta de acción.

Por aplicación del teorema de Varignon, debe cumplirse que:

$$\bar{M}_{RES}^O = \bar{M}_R^O = \bar{M}_{SIST}^O$$
$$\bar{M}_R^O = (O^* - O) \wedge \bar{R}$$
$$\bar{M}_R^O = -102\breve{i}$$
$$(O^* - O) \wedge \bar{R} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & z_{O^*} \\ 0 & R_y & 0 \end{vmatrix} = \left(-R_y \cdot z_{O^*}\right)\breve{i} = -16 \cdot z_{O^*}\breve{i}$$

Luego, se tiene la siguiente igualdad:

$$-102 = -16 \cdot z_{O^*}$$

De donde puede calcularse

$$z_{O^*} = \frac{-102}{-16}$$
$$\boldsymbol{z_{O^*} = 6,375}$$

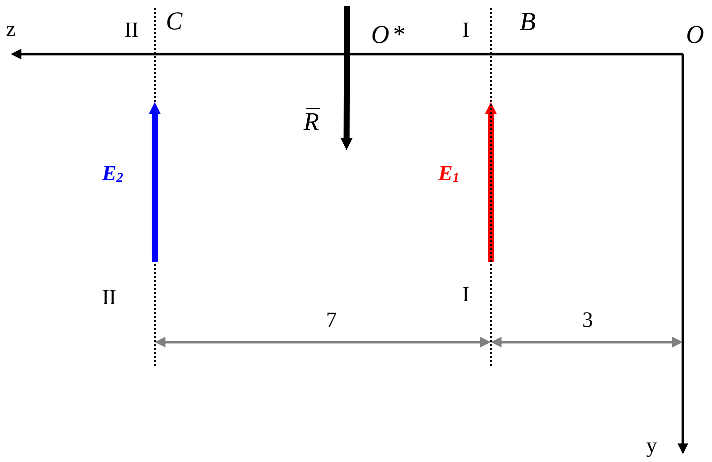
El punto perteneciente a la recta de acción de la resultante es:

$$\boldsymbol{O^*\left(0 \quad 0 \quad 6,375\right)}$$

2. Equilibrio del sistema mediante dos fuerzas actuando sobre las direcciones I-I y II-II, respectivamente.

Se tienen los siguientes datos

$\bar{R} = 16\breve{j}$
$\bar{M}_R^O = -102\breve{i}$
$\bar{E}_1 = 0\breve{i} + E_1\breve{j} + 0\breve{k}$ $\qquad B(0 \quad 0 \quad 3)$
$\bar{E}_2 = 0\breve{i} + E_2\breve{j} + 0\breve{k}$ $\qquad C(0 \quad 0 \quad 10)$



Condiciones de equilibrio:

$\bar{0} = \bar{R} + \bar{E}_1 + \bar{E}_2$ (A)
$\bar{0} = \bar{M}_R^O + \bar{M}_{E_1}^O + \bar{M}_{E_2}^O$ (B)

De (A):

$0 = R - E_1 - E_2 = 16 - E_1 - E_2$ (1)

De (B)

$0 = M_R^O + M_{E_1}^O + M_{E_2}^O = M_R^O - (-E_1 z_B) - (-E_2 z_C) = -102 + 3 \cdot E_1 + 10 \cdot E_2$ (2)

Despejando E_1 de (1):

$E_1 = 16 - E_2$

y reemplazando en (2):

$0 = -102 + 3 \cdot (16 - E_2) + 10 \cdot E_2$
$-54 = -7 \cdot E_2$
$E_2 = 7{,}714$

$E_1 = 16 - E_2 = 16 - 7{,}714 = 8{,}286$

El sentido arbitrariamente elegido ha sido correcto. Las fuerzas equilibrantes son:

$\boldsymbol{\bar{E}_1 = 0\breve{i} - 8{,}286\breve{j} + 0\breve{k}}$
$\boldsymbol{\bar{E}_2 = 0\breve{i} - 7{,}714\breve{j} + 0\breve{k}}$