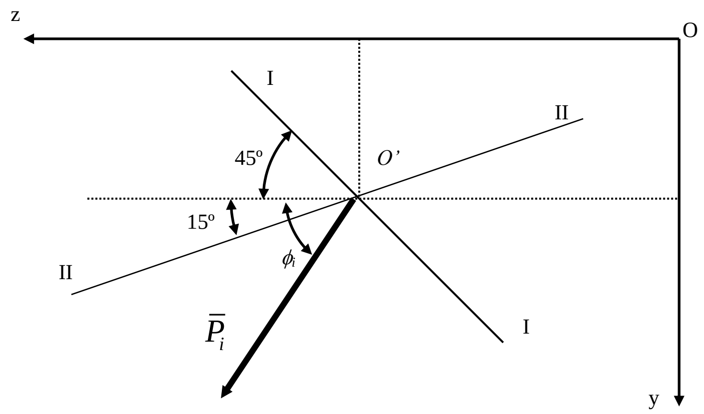
Ejercicio Nº 4 - Enunciado

Dado un sistema de fuerzas coplanares concurrentes a un punto O’, de coordenadas z’ = 6 e y’ = 3,



$P_1 = 7$ $\phi_1 = 30º$
$P_2 = 6$ $\phi_2 = 45º$
$P_3 = 4$ $\phi_3 = 90º$
$P_4 = 2$ $\phi_4 = 120º$
$O'(3 \quad 6)$

Fuerzas en [kN]
Distancias en [m]

Se solicita:
1. Determinar su resultante
2. Dadas dos direcciones I-I y II-II pasantes por el punto O’, determinar dos fuerzas que, actuando sobre dichas direcciones, equilibren al sistema propuesto.

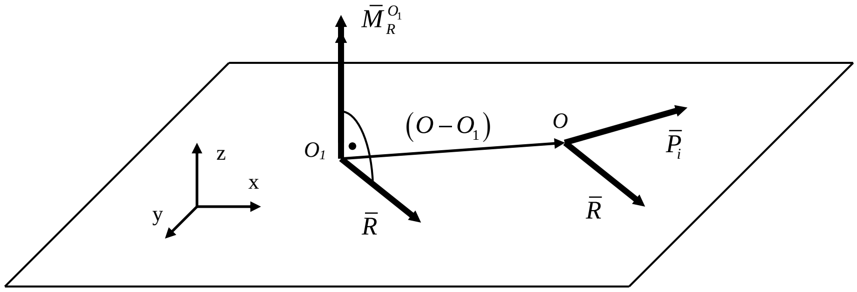
Ejercicio Nº 4 – Introducción teórica

Cuando todas las fuerzas del sistema plano tienen un punto en común *O*, constituyen un sistema plano de fuerzas concurrentes. Tomando como centro de reducción el punto *O* de concurrencia, el sistema se reduce a una única fuerza resultante que pasa por el punto de concurrencia, puesto que:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i$$
$$\bar{M}_R^O = \bar{0}$$

El invariante escalar del sistema es nulo. Como en todo sistema plano que admite resultante la recta de acción de la resultante coincide con el eje central del sistema, es válido el teorema de Varignon. En ningún caso un sistema de fuerzas concurrentes puede reducirse a una cupla. Tomando como centro de reducción un punto O_1 que no sea el punto de concurrencia, se tiene que:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i$$
$$\bar{M}_R^{O_1} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{P_i}^{O_1}$$



Es decir, que el sistema se reduce a una fuerza $\bar{R}$ y a un vector momento $\bar{M}_R^{O_1}$ normal al planto de las fuerzas.

Equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes

Estos sistemas están en equilibrio cuando su resultante es nula

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i = \bar{0}$$

la cual puede expresarse escalarmente mediante dos ecuaciones:

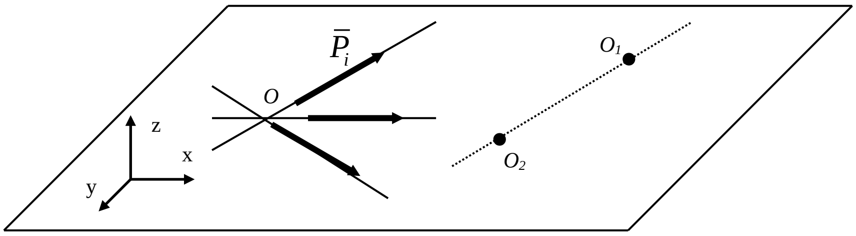
$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0$$

Las condiciones de equilibrio pueden expresarse de otras formas:

A. Mediante dos ecuaciones de momentos:

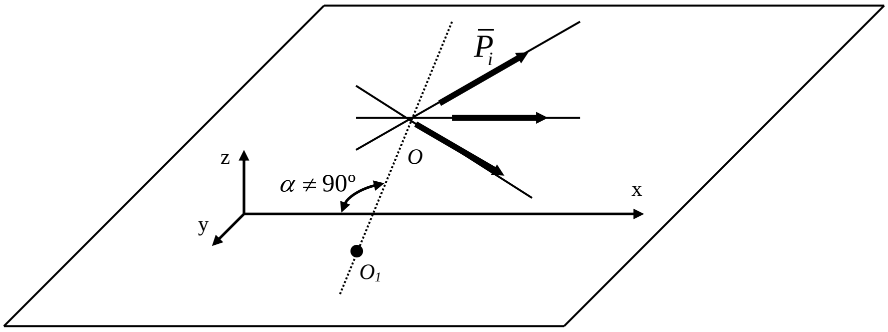
$$\sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i^{O_1} = \bar{0}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i^{O_2} = \bar{0}$$

Es condición que la recta determinada por los centros de momentos no pase por el punto de concurrencia de las fuerzas



B. Mediante una ecuación de momento y una proyección de fuerzas

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i^{O_1} = \overline{0}$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$$



Es condición que el eje de la proyección no sea normal a la recta determinada por el centro de momentos y el punto de concurrencia de las fuerzas.

De las expresiones anteriores resulta que:

los problemas de equivalencia o equilibrio de los sistemas planos de fuerzas concurrentes no pueden tener más de dos incógnitas para ser estáticamente determinados

Equivalencia de sistemas planos de fuerzas concurrentes

La condición de equivalencia en este caso se expresa así: dos sistemas planos *I* y *II* de fuerzas $P_j\left(j=1,2,3,...,m\right)$ y $P_i\left(i=1,2,3,...,n\right)$, respectivamente, son equivalentes cuando tienen la misma resultante:

$$\overline{R}_I = \overline{R}_{II}$$

Esta expresión se expresa escalarmente de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = \sum_{j=1}^{m} P_{jx}$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = \sum_{j=1}^{m} P_{jy}$$

Ejercicio Nº 4 - Resolución

1. Determinación de la resultante

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{4} \bar{P}_i$$

$$\bar{R} = R_x\breve{i} + R_y\breve{j} + R_z\breve{k} = \sum_{i=1}^{4} P_{ix}\breve{i} + \sum_{i=1}^{4} P_{iy}\breve{j} + \sum_{i=1}^{4} P_{iz}\breve{k}$$

$$R_x = 0$$

$$R_y = P_1 \cdot \sin(30^o) + P_2 \cdot \sin(45^o) + P_3 \cdot \sin(90^o) + P_4 \cdot \sin(120^o)$$

$$R_y = 7 \cdot \sin(30^o) + 6 \cdot \sin(45^o) + 4 \cdot \sin(90^o) + 2 \cdot \sin(120^o)$$

$$\boldsymbol{R_y = 13,4746}$$

$$R_z = P_1 \cdot \cos(30^o) + P_2 \cdot \cos(45^o) + P_3 \cdot \cos(90^o) + P_4 \cdot \cos(120^o)$$

$$R_z = 7 \cdot \cos(30^o) + 6 \cdot \cos(45^o) + 4 \cdot \cos(90^o) + 2 \cdot \cos(120^o)$$

$$\boldsymbol{R_z = 9,3048}$$

$$\bar{R} = R_x\breve{i} + R_y\breve{j} + R_z\breve{k}$$

$$\boldsymbol{\bar{R} = 0\breve{i} + 13,4746\breve{j} + 9,3048\breve{k}}$$

$$R = \sqrt{{R_y}^2 + {R_z}^2} = 0\sqrt{(13,4746)^2 + (9,3048)^2} = 16,3751$$

$$\cos(\gamma_R) = \frac{R_z}{R} = \frac{9,3048}{16,3751} = 0,568$$

$$\cos(\beta_R) = \frac{R_y}{R} = \frac{13,4746}{16,3751} = 0,823$$

$$\cos^2(\alpha_R) + \cos^2(\beta_R) + \cos^2(\gamma_R) = 1$$

2. Equilibrio del sistema mediante dos fuerzas pasantes por las direcciones dadas

Debe cumplirse la condición de equilibrio:

$$\bar{R} + \sum_{i=1}^{2} \bar{E}_i = \bar{0}$$

Es decir,

$$R_y + \sum_{i=1}^{2} E_{iy} = 0$$

$$R_z + \sum_{i=1}^{2} E_{iz} = 0$$

$$\bar{E}_1 = E_1 \cdot \sin(15^o)\,\breve{j} + E_1 \cdot \cos(15^o)\breve{k}$$

$$\bar{E}_2 = -E_2 \cdot \sin(45^o)\,\breve{j} + E_2 \cdot \cos(45^o)\breve{k}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de equilibrio:

$$13,4746 + E_1 \cdot \sin(15º) - E_2 \cdot \sin(45º) = 0 \qquad (1)$$
$$9,3084 + E_1 \cdot \cos(15º) + E_2 \cdot \cos(45º) = 0 \qquad (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) y teniendo en cuenta que sin*(*45*º)* = cos*(*45*º)*, se tiene que:

$$E_1 = \frac{13,4746 + 9,3084}{\sin(15º) + \cos(15º)}$$
$$\boldsymbol{E_1 = -18,60}$$

Tomando la ecuación (1),

$$E_2 = \frac{13,4746 + E_1 \cdot \sin(15º)}{\sin(45º)}$$
$$\boldsymbol{E_2 = 12,2481}$$

Finalmente,

$$E_1 = (-18,60) \cdot \sin(15º)\,\breve{j} + (-18,60) \cdot \cos(15º)\,\breve{k}$$
$$\boldsymbol{E_1 = -4,8138\breve{j} - 17,9655\breve{k}}$$
$$E_2 = -(12,2481) \cdot \sin(45º)\,\breve{j} + (12,2481) \cdot \cos(45º)\,\breve{k}$$
$$\boldsymbol{E_2 = -8,6607\breve{j} + 8,6607\breve{k}}$$