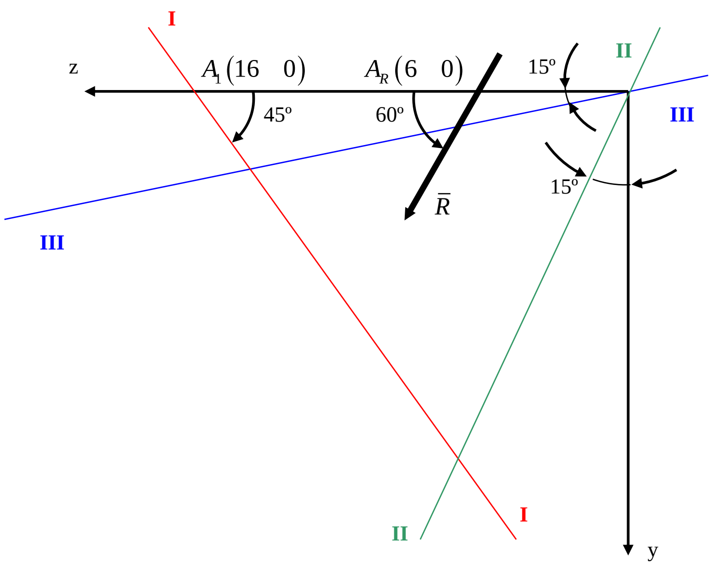
Ejercicio Nº 3 - Enunciado

Dada una fuerza $\bar{R}$ y tres direcciones coplanares no concurrentes,



$\bar{R} = 10$

Fuerzas en [kN]
Distancias en [m]

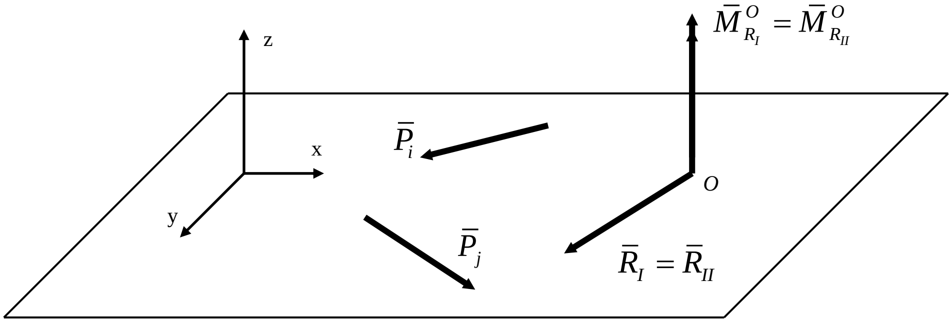
Se solicita descomponer dicha fuerza en tres fuerzas actuantes sobre las direcciones dadas.

Ejercicio Nº 3 – Introducción teórica

Condiciones de equivalencia de dos sistemas de fuerzas coplanares no concurrentes

Dado un sistema plano I constituido por fuerzas $P_i\left(i=1,2,3,\ldots,n\right)$ y otro sistema plano II constituido por fuerzas $P_j\left(j=1,2,3,\ldots,m\right)$ ambos en el mismo plano, la condición de equivalencia es:

$$\bar{R}_I=\bar{R}_{II}$$
$$\bar{M}^O_{R_I}=\bar{M}^O_{R_{II}}$$



Es decir, que ambos sistemas deben tener igual resultante de traslación e igual vector momento resultante respecto de cualquier punto *O* o lo que es lo mismo, ambos sistemas deben tener la misma resultante o reducirse a la misma cupla. Las expresiones anteriores dan origen a tres expresiones escalares de equivalencia, a saber,

$$\sum_{i=1}^{n}P_{ix}=\sum_{j=1}^{m}P_{jx}$$
$$\sum_{i=1}^{n}P_{iy}=\sum_{j=1}^{m}P_{jy}$$
$$\sum_{i=1}^{n}M_i^O=\sum_{j=1}^{m}M_j^O$$

Equilibrio de un sistema plano de fuerzas

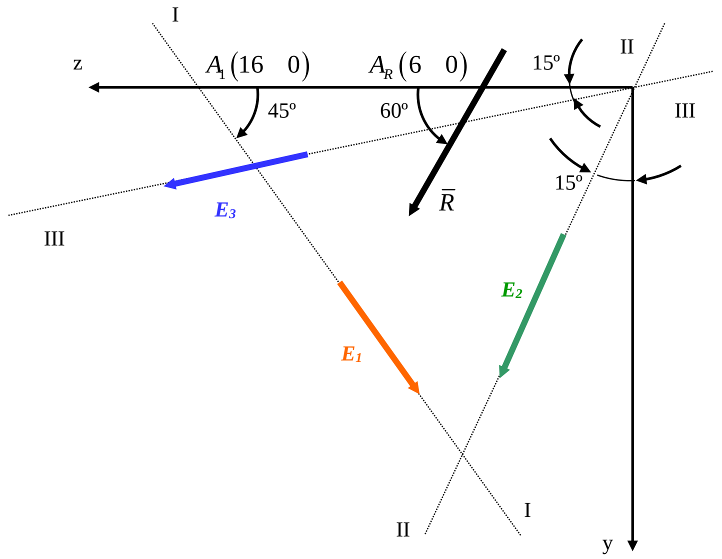
Un sistema plano de fuerzas $P_i\left(i=1,2,3,\ldots,n\right)$ es nulo o se encuentra en equilibrio cuando se verifica que la resultante de traslación y el vector momento son nulos:

$$\bar{R}=\sum_{i=1}^{n}\bar{P}_i$$
$$\bar{M}^O_R=\sum_{i=1}^{n}\bar{M}^O_{Pi}$$

Las expresiones anteriores dan origen a tres expresiones escalares de equilibrio o nulidad:

$$\sum_{i=1}^{n}P_{ix}=0$$
$$\sum_{i=1}^{n}P_{iy}=0$$
$$\sum_{i=1}^{n}M_i^O=0$$

Ejercicio Nº 3 - Resolución



$$\overline{R} = 0\breve{i} + 10\cdot\cos(60^o)\,\breve{j} + 10\cdot\sin(60^o)\,\breve{k} = 0\breve{i} + 5\cdot\sqrt{3}\breve{j} + 5\breve{k}$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{E}_1 &= 0\breve{i} + E_1\cdot\sin(45^o)\,\breve{j} - E_1\cdot\cos(45^o)\,\breve{k}\\
\overline{E}_2 &= 0\breve{i} + E_2\cdot\cos(15^o)\,\breve{j} + E_2\cdot\sin(15^o)\,\breve{k}\\
\overline{E}_3 &= 0\breve{i} + E_3\cdot\sin(15^o)\,\breve{j} + E_3\cdot\cos(15^o)\,\breve{k}
\end{aligned}\right\}(A)$$

Debe cumplirse que:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{3}\overline{E}_i \quad \text{y} \quad M_R^O = \sum_{i=1}^{3}(B_i - O)\wedge\overline{E}_i$$

tomando la primera de estas ecuaciones,

$$R_x\breve{i} + R_y\breve{j} + R_z\breve{k} = \sum_{i=1}^{3}E_{ix}\breve{i} + \sum_{i=1}^{3}E_{iy}\breve{j} + \sum_{i=1}^{3}E_{iz}\breve{k}$$

Es decir que:

$$R_x = \sum_{i=1}^{3}E_{ix}$$
$$R_y = \sum_{i=1}^{3}E_{iy}$$
$$R_z = \sum_{i=1}^{3}E_{iz}$$

$$\begin{aligned}
&0 = 0\\
&5\cdot\sqrt{3} = E_1\cdot\sin(45^o) + E_2\cdot\cos(15^o) + E_3\cdot\sin(15^o)\\
&5 = -E_1\cdot\cos(45^o) + E_2\cdot\sin(15^o) + E_3\cdot\cos(15^o)
\end{aligned}$$

Hasta aquí se han calculado las expresiones de equivalencia de proyección de fuerzas. Ahora calculamos las expresiones de equivalencia de momentos:

$$\bar{M}_R^O = \sum_{i=1}^{3}(B_i - O)\wedge \bar{E}_i$$

$$\bar{M}_R^O = (A_R - O)\wedge \bar{R} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5\cdot\sqrt{3} & 5 \end{vmatrix} = -30\cdot\sqrt{3}\breve{i}$$

$$\bar{M}_{E_1}^O = (B_1 - O)\wedge \bar{E}_1 = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & 16 \\ 0 & E_1\cdot\sin(45^o) & -E_1\cdot\cos(45^o) \end{vmatrix} = -16\cdot E_1 \sin(45^o)\breve{i}$$

$$\bar{M}_{E_2}^O = (B_2 - O)\wedge \bar{E}_2 = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2\cdot\cos(15^o) & E_2\cdot\sin(15^o) \end{vmatrix} = 0\breve{i}$$

$$\bar{M}_{E_2}^O = (B_2 - O)\wedge \bar{E}_2 = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2\cdot\sin(15^o) & E_2\cdot\cos(15^o) \end{vmatrix} = 0\breve{i}$$

$$M_{Rx}^O = \sum_{i=1}^{3} M_{E_i x}^O \qquad -30\cdot\sqrt{3} = -16\cdot E_1\cdot\sin(45^o)$$

$$M_{Ry}^O = \sum_{i=1}^{3} M_{E_i y}^O \qquad 0 = 0$$

$$M_{Rz}^O = \sum_{i=1}^{3} M_{E_i z}^O \qquad 0 = 0$$

El sistema de ecuaciones queda:

$$R_y = \sum_{i=1}^{3} E_i y \qquad 5\cdot\sqrt{3} = E_1\cdot\sin(45^o) + E_2\cdot\cos(15^o) + E_3\cdot\sin(15^o) \qquad (1)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{3} E_i z \qquad 5 = -E_1\cdot\cos(45^o) + E_2\cdot\sin(15^o) + E_3\cdot\cos(15^o) \qquad (2)$$

$$M_{Rx}^O = \sum_{i=1}^{3} M_{E_i x}^O \qquad -30\cdot\sqrt{3} = -16\cdot E_1 \sin(45^o) \qquad (3)$$

De (3)

$$E_1 = \frac{-30\cdot\sqrt{3}}{-16\cdot\sin(45^o)}$$

$\boldsymbol{E_1 = 4{,}5928}$

De (2)

$$E_2 = \frac{5 + E_1\cdot\cos(45^o) - E_3\cdot\cos(15^o)}{\sin(15^o)}$$

Reemplazando E_2 en (1):

$$5\cdot\sqrt{3} = E_1\cdot\sin(45^o) + \left(\frac{5 + E_1\cdot\cos(45^o) - E_3\cdot\cos(15^o)}{\sin(15^o)}\right)\cdot\cos(15^o) + E_3\cdot\sin(15^o)$$

$$5\cdot\sqrt{3} = E_1\cdot\sin(45^o) + \frac{5\cdot\cos(15^o) + E_1\cdot\cos(45^o)\cdot\cos(15^o) - E_3\cdot\cos(15^o)\cdot\cos(15^o)}{\sin(15^o)} + E_3\cdot\sin(15^o)$$

$$E_3 = \frac{5\cdot\sqrt{3} - E_1\cdot\sin(45^o) - 5\cdot\cot(15^o) - E_1\cdot\cos(45^o)\cdot\cot(15^o)}{\dfrac{-\cos(15^o)\cdot\cos(15^o)}{\sin(15^o)} + \sin(15^o)} = 7{,}5814$$

$\boldsymbol{E_3 = 7{,}5814}$

$$E_2 = \frac{5 + E_1\cdot\cos(45^o) - E_3\cdot\cos(15^o)}{\sin(15^o)} = 3{,}5722$$

$\boldsymbol{E_2 = 3{,}5722}$

Resumiendo, al reemplazar los valores obtenidos de E_1, E_2, y E_3 en las ecuaciones *(A)* queda:

$$\bar{E}_1 = 0\breve{i} + 3,2476\breve{j} - 3,2476\breve{k}$$
$$\bar{E}_2 = 0\breve{i} + 3,4505\breve{j} + 0,9425\breve{k}$$
$$\bar{E}_3 = 0\breve{i} + 1,9622\breve{j} + 7,3231\breve{k}$$