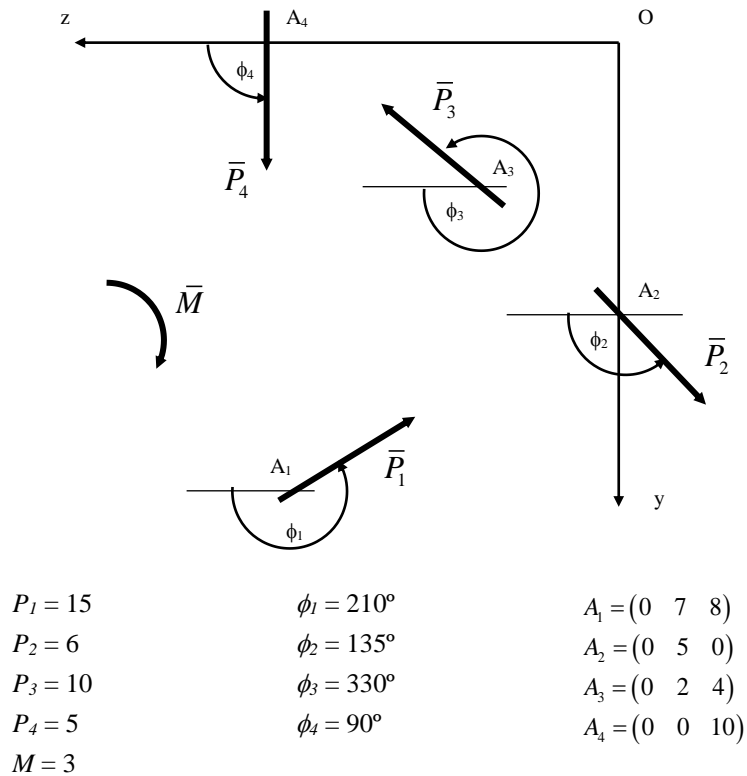


Ejercicio N° 1 - Enunciado

Dado el sistema de fuerzas coplanares que se indica:



Fuerzas en [kN]

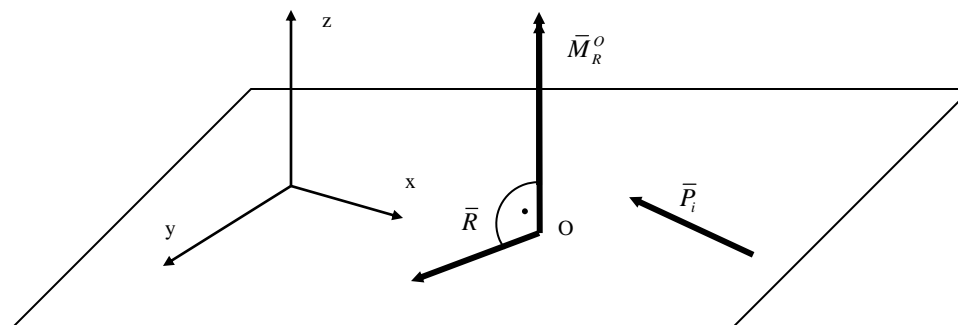
Distancias en [m]

Se solicita:

1. Reducir el mismo al centro de coordenadas y determinar:
 - 1.1. El binomio de reducción, sus módulos y cosenos directores
 - 1.2. Los invariantes y clasificar al sistema de acuerdo a los mismos
2. Reducir el sistema al punto $B = (0 \ -1 \ -2)$ y determinar:
 - 2.1. El binomio de reducción
 - 2.2. Los invariantes y verificar que permanecen constantes
3. Determinar la resultante del sistema

Ejercicio N° 1 – Introducción teórica

Un sistema de fuerzas es plano cuando todas las rectas de acción de las fuerzas que lo componen están contenidas en el mismo plano. Se dispondrá la terna cartesiana de referencia de manera que el plano coordenado xy coincida con el de las fuerzas, las cuales se suponen no concurrentes.



Tomando como centro de reducción un punto O cualquiera del plano, se determina la resultante de traslación y el vector momento resultante:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$$

$$\bar{M}_R^O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i^O$$

La primera de las expresiones es una suma de vectores en el plano xy , de modo que la fuerza \bar{R} pertenece a este plano. La segunda es una suma de vectores paralelos al eje z , de modo que se reduce a una suma algebraica de los módulos de esos vectores, es decir, que es una suma de carácter escalar. Consecuentemente, la resultante de traslación \bar{R} y el vector momento resultante \bar{M}_R^O son normales. Por consiguiente, el invariante escalar del sistema es nulo, lo que puede expresarse como:

$$I_e = \bar{R} \times \bar{M}_R^O = 0$$

En todo sistema plano el invariante escalar es nulo. Si el sistema es tal que, reducido a un punto del plano, presenta resultante de traslación y vector momento resultante no nulo, entonces, es equivalente a una única fuerza que es la resultante. La recta de acción de esta fuerza coincide con el eje central. Como el sistema admite resultante, es válido el teorema de Varignon: el momento del sistema respecto de cualquier punto es igual al momento de la resultante respecto del mismo punto.

Si el sistema presenta resultante de traslación nula y vector momento resultante no nulo, entonces, es equivalente a una cupla situada en el plano xy .

De este modo, un sistema plano de fuerzas se reduce a una única fuerza o a una cupla, encontrándose ambos elementos en el mismo plano de las fuerzas.

Ejercicio N° 1 – Resolución**1. Reducción del sistema al centro de coordenadas**

Con los datos del enunciado se tiene que:

$$\vec{P}_i = 0\vec{i} + P_i \cdot \sin(\phi_i)\vec{j} + P_i \cdot \cos(\phi_i)\vec{k}$$

$$\vec{P}_1 = 0\vec{i} + 15 \cdot \sin(210)\vec{j} + 15 \cdot \cos(210)\vec{k} = 0\vec{i} - 7,5\vec{j} - 7,5\vec{k} \quad A_1 = (0 \ 7 \ 8)$$

$$\vec{P}_2 = 0\vec{i} + 6 \cdot \sin(135)\vec{j} + 6 \cdot \cos(135)\vec{k} = 0\vec{i} + 3 \cdot \sqrt{2}\vec{j} - 3 \cdot \sqrt{2}\vec{k} \quad A_2 = (0 \ 5 \ 0)$$

$$\vec{P}_3 = 0\vec{i} + 10 \cdot \sin(330)\vec{j} + 10 \cdot \cos(330)\vec{k} = 0\vec{i} - 5\vec{j} + 5 \cdot \sqrt{3}\vec{k} \quad A_3 = (0 \ 2 \ 4)$$

$$\vec{P}_4 = 0\vec{i} + 5 \cdot \sin(90)\vec{j} + 5 \cdot \cos(90)\vec{k} = 0\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k} \quad A_4 = (0 \ 0 \ 10)$$

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} = \sum_{i=1}^4 P_{ix}\vec{i} + \sum_{i=1}^4 P_{iy}\vec{j} + \sum_{i=1}^4 P_{iz}\vec{k}$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{iy} = -7,5 + 3 \cdot \sqrt{2} - 5 + 5 = -2,303\sqrt{2} = -3,257$$

$$\sum_{i=1}^4 P_{iz} = -7,5 - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} = -8,573$$

$$\vec{R} = 0\vec{i} - 3,257\vec{j} - 8,573\vec{k}$$

$$R = \sqrt{(-3,257)^2 + (-8,573)^2} = 9,171$$

$$\cos(\alpha_R) = \frac{R_x}{R} = 0$$

$$\cos(\beta_R) = \frac{R_y}{R} = \frac{-3,257}{9,171} = -0,355$$

$$\cos(\gamma_R) = \frac{R_z}{R} = \frac{-8,573}{9,171} = -0,935$$

Debe cumplirse que:

$$\cos^2(\alpha_R) + \cos^2(\beta_R) + \cos^2(\gamma_R) = 1$$

$$\vec{M}_R^O = \sum_{i=1}^4 (A_i - O) \wedge \vec{P}_i + \vec{M}$$

$$\vec{M}_{P_1}^O = (A_1 - O) \wedge \vec{P}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -7,5 & -7,5\sqrt{3} \end{vmatrix} = -30,933\vec{i}$$

$$\vec{M}_{P_2}^O = (A_2 - O) \wedge \vec{P}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 \cdot \sqrt{2} & -3 \cdot \sqrt{2} \end{vmatrix} = -21,213\vec{i}$$

$$\vec{M}_{P_3}^O = (A_3 - O) \wedge \vec{P}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \cdot \sqrt{3} \end{vmatrix} = 37,321\vec{i}$$

$$\vec{M}_{P_4}^O = (A_4 - O) \wedge \vec{P}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -50\vec{i}$$

$$\vec{M}_R^O = \sum_{i=1}^4 M_{P_{ix}}^O\vec{i} + \sum_{i=1}^4 M_{P_{iy}}^O\vec{j} + \sum_{i=1}^4 M_{P_{iz}}^O\vec{k} + \vec{M} = (-30,933 - 21,213 + 37,321 - 50)\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} + 3\vec{i}$$

$$\vec{M}_R^O = -61,825\vec{i}$$

$$M_R^O = 61,825$$

$$\cos(\alpha_M) = \frac{M_{Rx}^O}{M_R^O} = \frac{-61,825}{61,825} = -1$$

$$\cos(\beta_M) = \frac{M_{Ry}^O}{M_R^O} = \frac{0}{61,825} = 0$$

$$\cos(\gamma_M) = \frac{M_{Rz}^O}{M_R^O} = \frac{0}{61,825} = 0$$

Invariantes del sistema

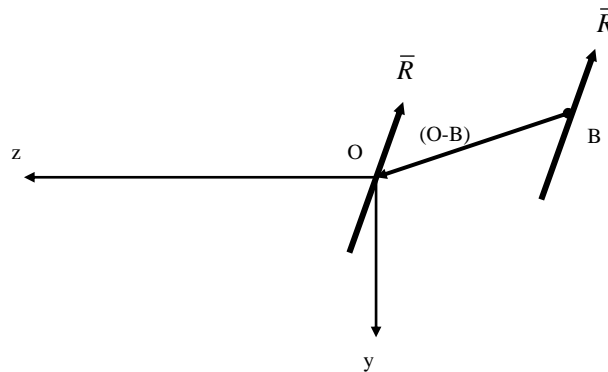
$$I_e = \frac{\vec{M}_R^O \times \vec{R}}{R} = \frac{61,625 \cdot 0 + 0 \cdot (-3,257) + 0 \cdot (-8,753)}{9,171}$$

$$I_e = 0$$

$$I_v = \vec{R} = 0\check{i} - 3,257\check{j} - 8,753\check{k}$$

Dado que $\vec{R} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_R^O \neq \vec{0}$ e $I_e = 0$ el sistema admite resultante

2. Reducción del sistema al punto $B(0 \ -1 \ -2)$



La resultante de reducción será la misma:

$$\vec{R} = 0\check{i} - 3,257\check{j} - 8,573\check{k}$$

El vector momento de reducción será ahora:

$$\vec{M}_R^B = \vec{M}_R^O + \vec{M}_R^{(O-B)}$$

$$\vec{M}_R^{(O-B)} = (O-B) \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3,257 & -8,573 \end{vmatrix} = -2,059\check{i}$$

Entonces, el binomio de reducción queda:

$$\vec{M}_R^B = -61,825\check{i} + (-2,059)\check{i} = -63,884\check{i}$$

$$\vec{R} = 0\check{i} - 3,257\check{j} - 8,573\check{k}$$

Invariantes del sistema

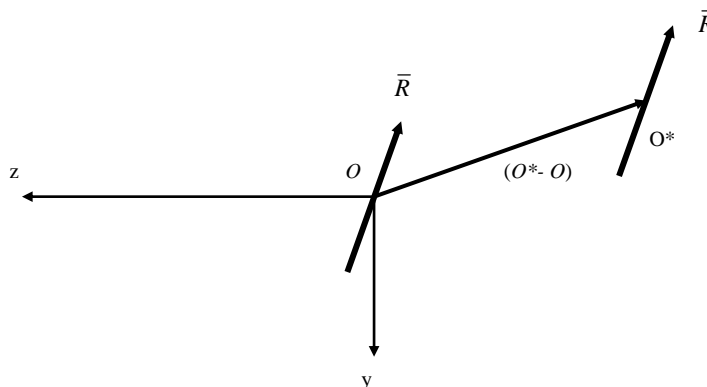
$$I_v = \vec{R} = 0\check{i} - 3,257\check{j} - 8,573\check{k}$$

$$I_e = 0, \text{ ya que } \vec{M}_R^B \text{ y } \vec{R} \text{ son perpendiculares}$$

Puede observarse que los valores no han cambiado con respecto al punto anterior.

3. Determinación de la resultante del sistema

Se busca un punto $O^*(x_{O^*} \ y_{O^*} \ z_{O^*})$ perteneciente a la recta de acción de la resultante \bar{R} . Puede aplicarse el teorema de Varignon



Debe cumplirse que:

$$\bar{M}_R^{O^*} = (O^* - O) \wedge \bar{R}$$

$$-61,825\check{i} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ x_{O^*} & y_{O^*} & z_{O^*} \\ 0 & -3,257 & -8,573 \end{vmatrix} = (-8,573 \cdot y_{O^*} - 3,257 \cdot z_{O^*})\check{i} + (8,573 \cdot x_{O^*})\check{j} + (-3,257 \cdot x_{O^*})\check{k}$$

De aquí se llega a que,

$$x_{O^*} = 0$$

$$8,573 \cdot y_{O^*} + 3,257 \cdot z_{O^*} = 61,825$$

Esta es la ecuación de la recta de acción de la resultante. Para $z_{O^*} = 0$,

$$y_{O^*} = \frac{61,825}{8,573} = 7,212$$

Ya tenemos módulo, dirección y sentido, y un punto de aplicación de su recta de acción, por lo tanto \bar{R} está perfectamente determinada:

$$\bar{R} = 0\check{i} - 3,257\check{j} - 8,573\check{k}$$

$$O^*(0 \ 7,212 \ 0)$$