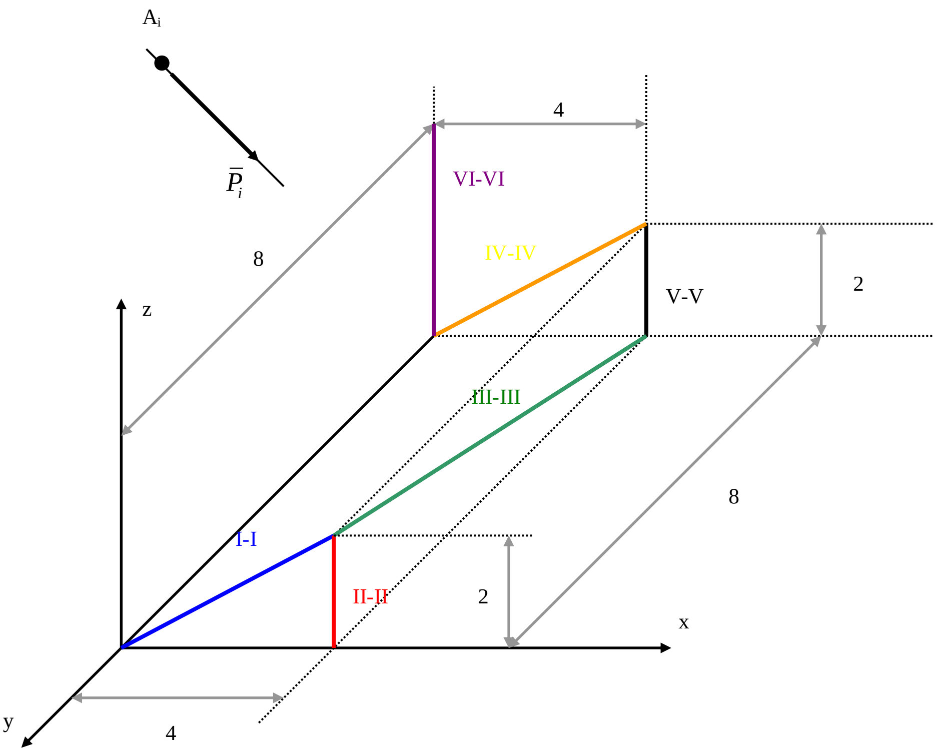
Ejercicio Nº 6 – Enunciado

Dado un sistema formado por *n* fuerzas $\overline{P}_i$ y seis direcciones *I-I; II-II; III-III; IV-IV; V-V y VI-VI*



Fuerzas en [kN]
Distancias en [m]

$\overline{P}_1 = 0\breve{i} + 5\breve{j} + 0\breve{k}$ $\qquad$ $\overline{P}_2 = 0\breve{i} + 0\breve{j} - 8\breve{k}$ $\qquad$ $\overline{P}_3 = -10\breve{i} + 0\breve{j} + 0\breve{k}$ $\qquad$ $\overline{P}_4 = 0\breve{i} + 0\breve{j} - 2\breve{k}$

$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_4 = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Se pide:
Determinar seis fuerzas que actuado sobre dichas direcciones equilibren el sistema propuesto

Ejercicio Nº 6 – Introducción teórica

Nulidad o equilibrio de un sistema de fuerzas

Un sistema de fuerzas P_i *(i=1,2,3,...,n)* es nulo o está en equilibrio cuando no produce cambio en el estado de movimiento del cuerpo sobre el cual actúa. Atendiendo al cambio de movimiento del cuerpo, se puede agregar o quitar un sistema nulo sin cambiar el estado de movimiento. El caso más general consiste en el equilibrio de fuerzas espaciales no concurrentes.

Dado un sistema Gauso de fuerzas formado por

$$\overline{P}_i \left(i = 1, 2, \ldots, n \right)$$

está en equilibrio cuando se dan las ***condiciones vectoriales de equilibrio***:

$$\overline{R} = \overline{0}$$
$$M_R^O = \overline{0}$$

Pueden escribirse escalarmente, constituyendo las ***condiciones escalares de equilibrio***, como sigue:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} P_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_{iy} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_{iz} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Tres expresiones de nulidad de proyección de fuerzas}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{ix}^O &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_{iy}^O &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_{iz}^O &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Tres expresiones de nulidad de momento}$$

Las expresiones precedentes también pueden indicarse mediante:

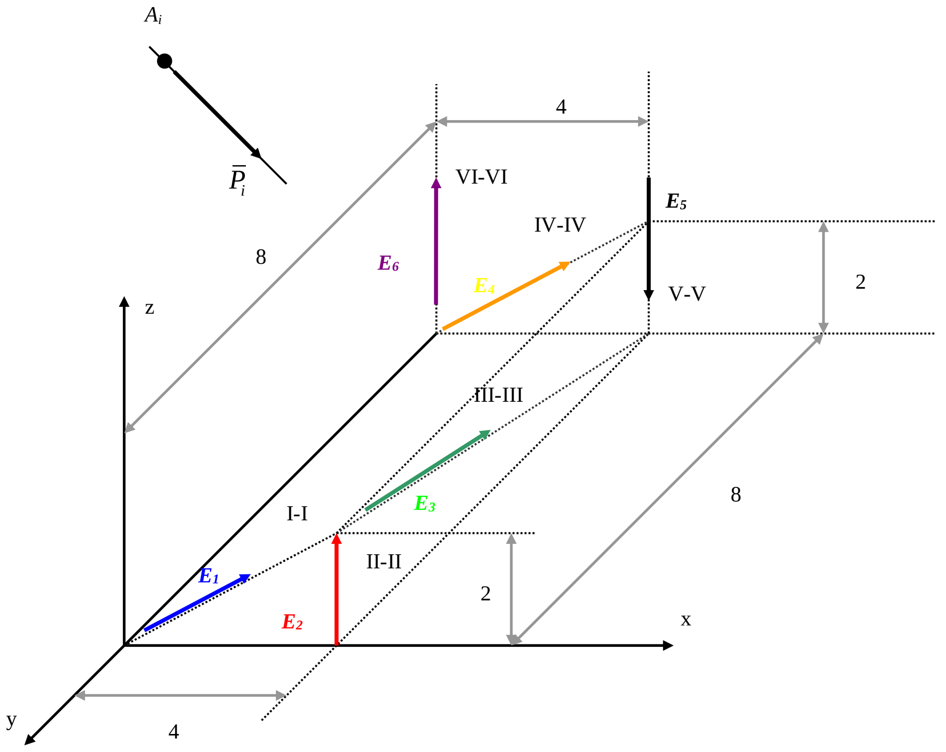
1. Dos expresiones de nulidad de proyección de fuerzas y cuatro expresiones de nulidad de momentos.
2. Una expresión de nulidad de fuerzas y cinco de nulidad de momentos
3. Seis expresiones de nulidad de momentos

Los ejes x, y y z no necesariamente deben coincidir con los de la terna de referencia, es decir, pueden ser cualquiera, excepto que deben verificar lo siguiente:

1. Los ejes no deben ser paralelos
2. Los ejes no deben ser coplanares
3. Si dos de ellos fuerzan coplanares, el tercero no debe ser paralelo al plano que forman los dos primeros.

Ejercicio Nº 3 – Resolución

Dadas las direcciones se eligen los sentidos arbitrariamente con el objeto de obtener un sistema estáticamente determinado. Esto se traduce en un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, siendo estas últimas E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 y E_6.



$$\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i+\sum_{j=1}^{m}\overline{E}_j=\overline{0}$$

$$\overline{M}_R^O=\sum_{i=1}^{n}\overline{M}_{P_i}^O+\sum_{j=1}^{m}\overline{M}_{E_j}^O=\sum_{i=1}^{n}\left(A_i-O\right)\wedge\overline{P}_i+\sum_{j=1}^{m}\left(B_j-O\right)\wedge\overline{E}_j=\overline{0}$$

Como en el presente caso $n = 4$ y $m = 6$, queda que

$$\overline{R}=\sum_{i=1}^{4}\overline{P}_i+\sum_{j=1}^{6}\overline{E}_j=0$$

$$\overline{M}_R^O=\sum_{i=1}^{4}\overline{M}_{P_i}^O+\sum_{j=1}^{6}\overline{M}_{E_j}^O=\sum_{i=1}^{4}\left(A_i-O\right)\wedge\overline{P}_i+\sum_{j=1}^{6}\left(B_j-O\right)\wedge\overline{E}_j=\overline{0}$$

De los datos del enunciado se tiene que:

$$\overline{E}_1=E_1\cdot\cos(\alpha)\breve{i}+0\breve{j}+E_1\cdot\sin(\alpha)\breve{k}$$
$$\overline{E}_2=0\breve{i}+0\breve{j}+E_2\breve{k}$$
$$\overline{E}_3=0\breve{i}-E_3\cdot\cos(\beta)\breve{j}-E_3\cdot\sin(\alpha)\breve{k}$$
$$\overline{E}_4=E_4\cdot\cos(\alpha)\breve{i}+0\breve{j}+E_4\cdot\sin(\alpha)\breve{k}$$
$$\overline{E}_5=0\breve{i}+0\breve{j}-E_5\breve{k}$$
$$\overline{E}_6=0\breve{i}+0\breve{j}+E_6\breve{k}$$

$$\overline{P}_1=0\breve{i}+5\breve{j}+0\breve{k}$$

$\overline{P}_2 = 0\breve{i} + 0\breve{j} - 8\breve{k}$
$\overline{P}_3 = -10\breve{i} + 0\breve{j} + 0\breve{k}$
$\overline{P}_4 = 0\breve{i} + 0\breve{j} - 2\breve{k}$

y consecuentemente

$$R_x = \sum_{i=1}^{4} P_{ix} + \sum_{j=1}^{6} E_{jx} = -10 + E_1 \cdot \cos(\alpha) + E_4 \cdot \cos(\alpha) = 0$$
$$R_y = \sum_{i=1}^{4} P_{iy} + \sum_{j=1}^{6} E_{jy} = 5 + E_3 \cdot \cos(\beta) = 0$$
$$R_z = \sum_{i=1}^{4} P_{iz} + \sum_{j=1}^{6} E_{jz} = -10 + E_1 \cdot \sin(\alpha) - E_3 \cdot \sin(\beta) + E_4 \cdot \sin(\alpha) - E_5 + E_6 = 0$$

$$\overline{M}^O_{P1} = (A_1 - O) \wedge \overline{P}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 7 & -8 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -40\breve{i} + 0\breve{j} + 35\breve{k}$$

$$\overline{M}^O_{P2} = (A_2 - O) \wedge \overline{P}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 64\breve{i} + 16\breve{j} + 0\breve{k}$$

$$\overline{M}^O_{P3} = (A_3 - O) \wedge \overline{P}_3 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -8 & 4 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\breve{i} - 40\breve{j} - 80\breve{k}$$

$$\overline{M}^O_{P4} = (A_4 - O) \wedge \overline{P}_4 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 8 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6\breve{i} + 6\breve{j} + 0\breve{k}$$

$$\overline{M}^O_{E1} = (B_1 - O) \wedge \overline{E}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ E_1 \cdot \cos(\alpha) & 0 & E_1 \cdot \sin(\alpha) \end{vmatrix} = 0\breve{i} + 0\breve{j} + 0\breve{k}$$

$$\overline{M}^O_{E2} = (B_2 - O) \wedge \overline{E}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{vmatrix} = 0\breve{i} - 4 \cdot E_2\breve{j} + 0\breve{k}$$

$$\overline{M}^O_{E3} = (B_3 - O) \wedge \overline{E}_3 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -E_3 \cdot \cos(\beta) & -E_3 \cdot \sin(\beta) \end{vmatrix} = 2 \cdot E_3 \cdot \cos(\beta)\breve{i} + 4 \cdot E_3 \cdot \sin(\beta)\breve{j} - 4 \cdot E_3 \cdot \cos(\beta)\breve{k}$$

$$\overline{M}^O_{E4} = (B_4 - O) \wedge \overline{E}_4 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -8 & 0 \\ E_4 \cdot \cos(\alpha) & 0 & E_4 \cdot \sin(\alpha) \end{vmatrix} = -8 \cdot E_4 \cdot \sin(\alpha)\breve{i} + 0\breve{j} + 8 \cdot E_4 \cdot \cos(\alpha)\breve{k}$$

$$\overline{M}^O_{E5} = (B_5 - O) \wedge \overline{E}_5 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -E_5 \end{vmatrix} = -8 \cdot E_5\breve{i} + 4 \cdot E_5\breve{j} + 0\breve{k}$$

$$\overline{M}^O_{E6} = (B_6 - O) \wedge \overline{E}_6 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & E_6 \end{vmatrix} = -8 \cdot E_6\breve{i} + 0\breve{j} + 0\breve{k}$$

$$M_{Rx}^{O} = \sum_{i=1}^{4} M_{P_i x}^{O} + \sum_{j=1}^{6} M_{E_j x}^{O} = 30 + 2 \cdot E_3 \cdot \cos(\beta) - 8 \cdot E_4 \cdot \sin(\alpha) = 0$$
$$M_{Ry}^{O} = \sum_{i=1}^{4} M_{P_i y}^{O} + \sum_{j=1}^{6} M_{E_j y}^{O} = -8 - 4 \cdot E_2 + 4 \cdot E_3 \cdot \sin(\beta) + 4 \cdot E_5 = 0$$
$$M_{Rz}^{O} = \sum_{i=1}^{4} M_{P_i z}^{O} + \sum_{j=1}^{6} M_{E_j z}^{O} = -45 + 8 \cdot E_4 \cdot \cos(\alpha) - 4 \cdot E_3 \cdot \cos(\beta) = 0$$

Luego queda formado un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas

$$R_x = -10 + E_1 \cdot \cos(\alpha) + E_4 \cdot \cos(\alpha) = 0 \qquad (1)$$
$$R_y = 5 + E_3 \cdot \cos(\beta) = 0 \qquad (2)$$
$$R_z = -10 + E_1 \cdot \sin(\alpha) + E_2 - E_3 \cdot \sin(\beta) + E_4 \cdot \sin(\alpha) - E_5 + E_6 = 0 \qquad (3)$$
$$M_{Rx}^{O} = 30 + 2 \cdot E_3 \cdot \cos(\beta) - 8 \cdot E_4 \cdot \sin(\alpha) = 0 \qquad (4)$$
$$M_{Ry}^{O} = -8 - 4 \cdot E_2 + 4 \cdot E_3 \cdot \sin(\beta) + 4 \cdot E_5 = 0 \qquad (5)$$
$$M_{Rz}^{O} = -45 + 8 \cdot E_4 \cdot \cos(\alpha) - 4 \cdot E_3 \cdot \cos(\beta) = 0 \qquad (6)$$

De la ecuación (2):

$$E_3 = \frac{5}{\cos(\beta)} = \frac{5}{0,970} = 5,154$$

De la ecuación (4):

$$E_4 = \frac{45 + 4 \cdot E_3 \cdot \cos(\beta)}{8 \cdot \cos\left(\alpha\right)} = \frac{45 + 4 \cdot 5,154 \cdot 0,970}{8 \cdot 0,894} = 9,084$$

De la ecuación (1):

$$E_1 = \frac{10 - E_4 \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{10 - 9,084 \cdot 0,894}{0,894} = 2,096$$

Para obtener E_2, a la ecuación (3) se multiplica por 8 se le suma la ecuación (4):

$$-80 + 8 \cdot E_1 \cdot \sin(\alpha) + 8 \cdot E_2 - 8 \cdot E_3 \sin(\beta) + 8 \cdot E_4 \sin(\alpha) - 8 \cdot E_5 + 8 \cdot E_6 = 0$$
$$\underline{30 + 2 \cdot E_3 \cdot \cos(\beta) - 8 \cdot E_4 \cdot \sin(\alpha) = 0}$$
$$-50 + 8 \cdot E_1 \cdot \sin(\alpha) + 8 \cdot E_2 + 2 \cdot E_3 \left(-4 \cdot \sin\left(\alpha\right) + \cos\left(\beta\right)\right) = 0$$

$$E_2 = \frac{50 - 8 \cdot E_1 \cdot \sin(\alpha) - 2 \cdot E_3 \left(-4 \cdot \sin\left(\alpha\right) + \cos\left(\beta\right)\right)}{8} = \frac{50 - 8 \cdot 2,096 \cdot 0,477 - 2 \cdot 5,154 \cdot \left(-4 \cdot 0,243 + 0,970\right)}{8} = 5,313$$

De la ecuación (5):

$$E_5 = \frac{8 + 4 \cdot E_2 - 4 \cdot E_3 \cdot \sin(\beta)}{4} = \frac{8 + 4 \cdot 5,313 - 4 \cdot 5,154 \cdot 0,243}{4} = 6,063$$

De la ecuación (3)

$$E_6 = +10 - E_1 \cdot \sin(\alpha) + E_3 \cdot \sin(\beta) - E_4 \cdot \sin(\alpha) + E_5 = 10 - 2,096 \cdot 0,447 - 5,313 + 5,154 \cdot 0,243 - 9,084 \cdot 0,984 + 6,063 = 7$$

Finalmente:

$$\bar{E}_1 = 1,875\breve{i} + 0\breve{j} + 0,9375\breve{k}$$
$$\bar{E}_2 = 0\breve{i} + 0\breve{j} + 5,313\breve{k}$$
$$\bar{E}_3 = 0\breve{i} - 5\breve{j} - 1,25\breve{k}$$

$\bar{E}_4 = 8{,}125\breve{i} + 0\breve{j} + 4{,}063\breve{k}$

$\bar{E}_5 = 0\breve{i} + 0\breve{j} - 6{,}063\breve{k}$

$\bar{E}_6 = 0\breve{i} + 0\breve{j} + 7\breve{k}$

Acerca de la resolución de problemas de equilibrio o equivalencia entre fuerzas con incógnitas

Si las incógnitas aparecen en un número de seis, igual al números de ecuaciones que se pueden escribir para expresar el equilibrio del sistema o la equivalencia entre los dos sistemas, queda planteado un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, que tiene una solución única. En tal caso el problema de equilibrio o equivalencia planteado se llama **Estáticamente Determinado.**

Si el número de incógnitas fuera mayor que seis, el sistema no tiene solución algebraica única. En este caso el problema se llama **Estáticamente Indeterminado.**

Los problemas de equilibrio o equivalencia entre fuerzas con un número de incógnitas menor que seis, son problemas de **Solución Condicionada**