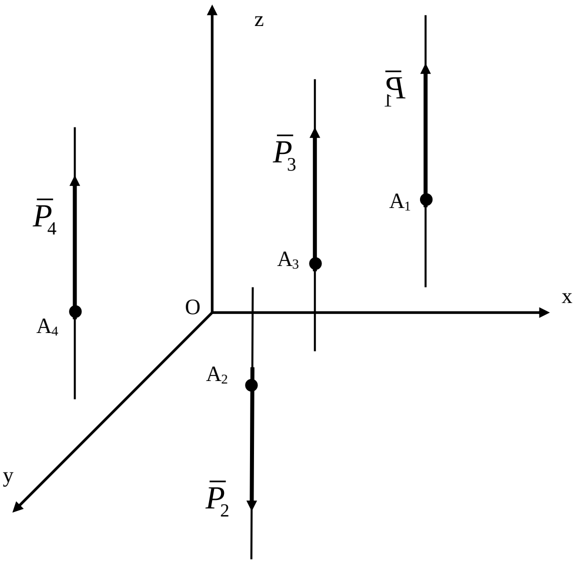
## Ejercicio Nº5- Enunciado

Dado el siguiente sistema de fuerzas espaciales paralelas:




$\overline{P}_1 = 6\breve{k}$ $\qquad$ $A_1(6 \quad 0 \quad 0)$

$\overline{P}_2 = -3\breve{k}$ $\qquad$ $A_2(3 \quad 4 \quad 0)$

$\overline{P}_3 = 2\breve{k}$ $\qquad$ $A_3(-3 \quad -3 \quad 0)$

$\overline{P}_4 = 5\breve{k}$ $\qquad$ $A_4(-3 \quad -1 \quad 0)$

*Fuerzas en [kN]*
*Distancias en [m]*

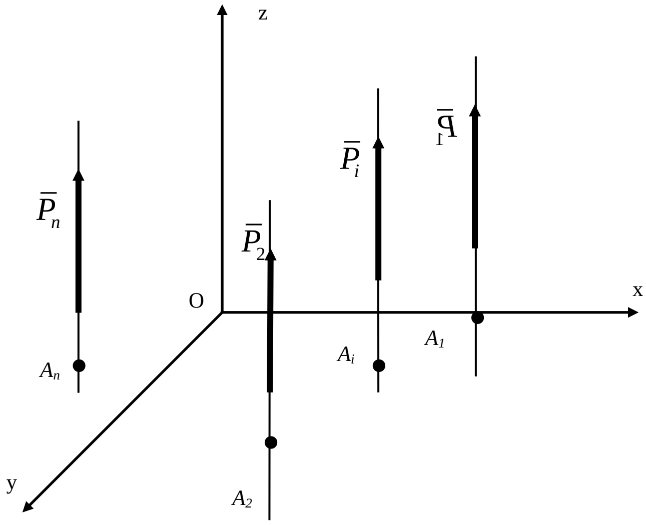
Se solicita reducir el mismo al centro de coordenadas y determinar:

1. El binomio de reducción
2. Los invariantes del sistema
3. La resultante del sistema

## Ejercicio Nº 5 – Introducción teórica

**Sistemas de fuerzas espaciales paralelas**

Es un caso particular de los sistemas gausos de fuerzas. Esa particularidad reside en que las fuerzas conformantes del sistema poseen rectas de acción paralelas a una dirección y no están contenidas en un mismo plano. Para el desarrollo del estudio teórico se considerará que las direcciones de las fuerzas son paralelas al eje *z*, y que los puntos pertenecientes a las rectas de acción de las fuerzas están incluidas en el plano *xy*.

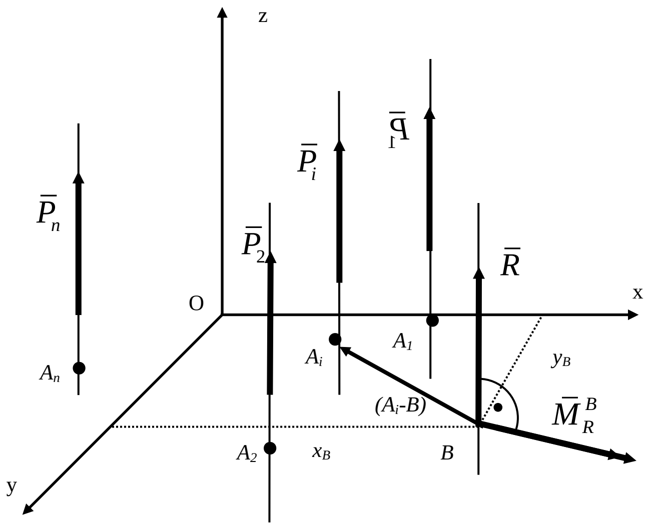



**Reducción del sistema a un punto** $B(x_B \quad y_B)$

Reduciendo el sistema a un punto *B* cualquiera, surgirán un vector resultante de reducción y un vector momento de reducción del sistema respecto del punto $B(x_B \quad y_B)$:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \qquad (1)$$

$$\overline{M}_R^B = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{P_i}^B \qquad (2)$$



Dado que la ecuación (1) es una suma escalar de n vectores de dirección paralela al eje *z*, puede rescribirse como:

$$\bar{R} = R_z \cdot \breve{k} = \left( \sum_{i=1}^{n} P_i \right) \cdot \breve{k} \qquad (3)$$

Para efectuar tal sumatoria indicada en la ecuación (3) es necesario fijar los signos a los módulos $P_i$, según que los sentidos de las fuerzas coincidan (+) o no (-) con el sentido adoptado para el eje *z*. De esta forma, el signo de la fuerza definirá su sentido.

En cuanto al vector momento resultante del sistema con respecto al punto *B* ($\bar{M}_R^B$) estará conformado por una suma de n vectores situados en el plano normal al eje *z*, o sea un plano paralelo al *xy* (para el caso planteado, estarán en el plano *xy*). El sistema se reduce a una fuerza $\bar{R}$ con la dirección de las fuerzas $P_i$ y a un vector $\bar{M}_R^B$ en un plano paralelo a *xy* que pasa por *B*. Dado que el vector $\bar{M}_R^B$ tiene su componente según el eje *z* nula, la ecuación (2) puede rescribirse como:

$$\bar{M}_R^B = M_x \breve{i} + M_y \breve{j} = \sum_{i=1}^{n} \left( A_i - B \right) \wedge \bar{P}_i \qquad (4)$$

$$\bar{M}_R^B = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ x_{Ai} - x_B & y_{Ai} - y_B & 0 \\ 0 & 0 & P_{iz} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left[ P_{iz} \cdot \left( y_{Ai} - y_B \right) \breve{i} - P_{iz} \cdot \left( x_{Ai} - x_B \right) \breve{j} \right] \qquad (5)$$

siendo

$P_{ix} = P_{iy} = 0$, porque las fuerzas son paralelas al eje *z*

$z_{A_i} - z_B = 0$, porque los puntos *B* y $A_i$ están en el plano *xy*.

**Invariante escalar**

Por ser los vectores $\bar{R}$ y $\bar{M}_R^B$ perpendiculares, el invariante escalar es nulo:

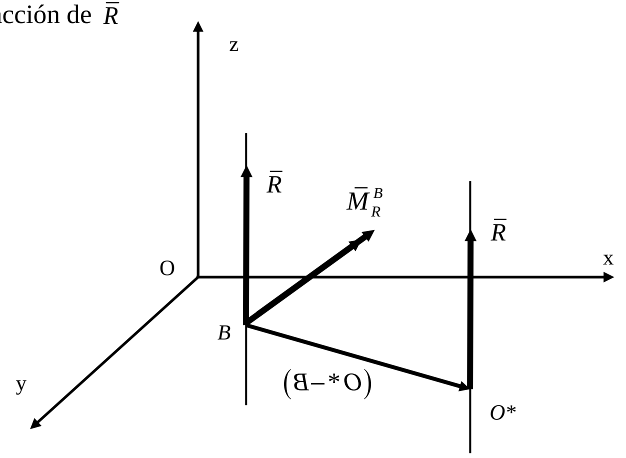
$$I_e = \frac{\bar{R} \times \bar{M}_R^B}{R} = \frac{\left( 0\breve{i} + 0\breve{j} + R_z \breve{k} \right) \times \left( M_x \breve{i} + M_y \breve{j} + 0\breve{k} \right)}{R} = 0$$

El sistema admite resultante pues se cumplen las siguientes condiciones:

$$\bar{R} \neq \bar{0} \qquad \bar{M}_R^B \neq \bar{0} \qquad Ie = 0$$

El eje central coincide con la recta de acción de $\bar{R}$

**Cálculo de la resultante**



Se conocen su módulo, dirección y sentido. Debe hallarse un punto O* que pertenezca a su recta de acción. Aplicando el teorema de Varignon:

$$\bar{M}_R^B = (O^* - B) \wedge \bar{R}$$

$$M_{Rx}^B \breve{i} + M_{Rx}^B \breve{j} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ x_{O^*} - x_B & y_{O^*} - y_B & 0 \\ 0 & 0 & R_z \end{vmatrix} ..$$

$$M_{Rx}^B \breve{i} + M_{Rx}^B \breve{j} = R_z \cdot (y_{O^*} - y_B)\breve{i} - R_z \cdot (x_{O^*} - x_B)\breve{j}$$

$$(y_{O^*} - y_B) = \frac{M_{Rx}^B}{R_z}$$

$$(x_{O^*} - x_B) = -\frac{M_{Ry}^B}{R_z}$$

y el punto $O^*(x_{O^*} \quad y_{O^*})$ queda determinado. Luego, $\bar{R}$ queda definida perfectamente.

## Ejercicio Nº 5 – Resolución

### 1. Determinación del binomio de reducción

$$\bar{R} = R_z \breve{k}$$
$$R_z = \sum_{i=1}^{4} P_{iz} = 6 + (-3) + 2 + 5 = 10$$
$$\boldsymbol{\bar{R} = 10\breve{k} = 0\breve{i} + 0\breve{j} + 10\breve{k}}$$

El módulo y cosenos directores valen:

$$R = 10$$

$$\cos(\alpha_R) = 0$$
$$\cos(\beta_R) = 0$$
$$\cos(\gamma_R) = 1$$

Luego,

$$\bar{M}_R^O = M_{Rx}^O \breve{i} + M_{Ry}^O \breve{j} = \sum_{i=1}^{4} P_{iz} \cdot (y_{Ai} - 0)\breve{i} - \sum_{i=1}^{4} P_{iz} \cdot (x_{Ai} - 0)\breve{j}$$

$$M_{Rx}^O = \sum_{i=1}^{4} P_{iz} \cdot y_{Ai} = 6 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) = 0 - 12 - 6 - 5 = -23$$
$$M_{Ry}^O = -\sum_{i=1}^{4} P_{iz} \cdot x_{Ai} = (-6) \cdot 6 + 3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-3) + (-5) \cdot (-3) = -36 + 9 + 6 + 15 = -6$$

$$\boldsymbol{\bar{M}_R^O = -23\breve{i} - 6\breve{j} + 0\breve{k}}$$

$$M_R^O = \sqrt{\left(M_{Rx}^O\right)^2 + \left(M_{Ry}^O\right)^2 + \left(M_{Rz}^O\right)^2} = \sqrt{(-23)^2 + (-6)^2 + (0)^2} = \sqrt{565} = 23,770$$

$$\cos(\alpha_M) = \frac{M_{Rx}^O}{M_R^O} = \frac{-23}{\sqrt{565}} = -0,968$$
$$\cos(\beta_M) = \frac{M_{Ry}^O}{M_R^O} = \frac{-6}{\sqrt{565}} = -0,252$$

debiéndose cumplir que:

$$\cos^2(\alpha_M) + \cos^2(\beta_M) + \cos^2(\gamma_M) = 1$$

El binomio de reducción queda:

$$\bar{R} = 0\breve{i} + 0\breve{j} + 10\breve{k}$$
$$\bar{M}_R^O = -23\breve{i} + -6\breve{j} + 0\breve{k}$$

### 2. Determinación de los invariantes del sistema:

Invariante vectorial:

$$\boldsymbol{I_v = \bar{R} = 0\breve{i} + 0\breve{j} + 10\breve{k}}$$

Invariante escalar:

$$I_e = \frac{\bar{M}_R^O \times \bar{R}}{R} = \frac{\left(-23\breve{i} - 6\breve{j} + 0\breve{k}\right)\times\left(0\breve{i} + 0\breve{j} + 10\breve{k}\right)}{10} = \frac{0+0+0}{10} = 0$$

**3. Determinación de la resultante**

Debe hallarse el punto *O** del eje central que indica por dónde pasa la recta de acción de la resultante $\bar{R}$

$$\bar{M}_R^{O*} = R_z \cdot y_{O*}\breve{i} - R_z \cdot x_{O*}\breve{j}$$

$$\bar{M}_{Rx}^O = R_z \cdot y_{O*} \qquad y_{O*} = \frac{\bar{M}_{Rx}^O}{R_z} = \frac{-23}{10} = -2,30$$

$$\bar{M}_{Ry}^O = -R_z \cdot x_{O*} \qquad x_{O*} = -\frac{\bar{M}_{Ry}^O}{R_z} = -\frac{(-6)}{10} = 0,60$$

Las coordenadas del punto *O** son, entonces:

$$O* = \left(0,60 \quad -2,30 \quad 0,00\right)$$

$\bar{R}$ queda perfectamente determinada y es la mínima expresión del sistema propuesto.