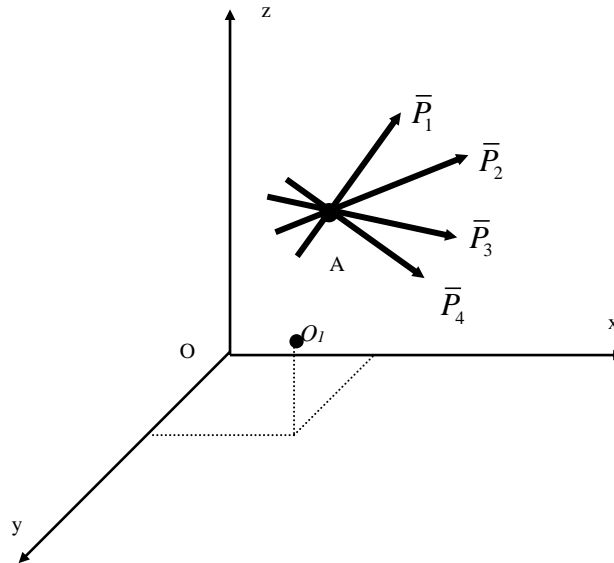


Ejercicio N° 4 – Enunciado

Dado el siguiente sistema de fuerzas espaciales concurrentes:



$$\vec{P}_1 = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{P}_2 = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{P}_3 = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{P}_4 = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$A = (2 \ 1 \ 3)$$

$$O_1 = (1 \ 2 \ 2)$$

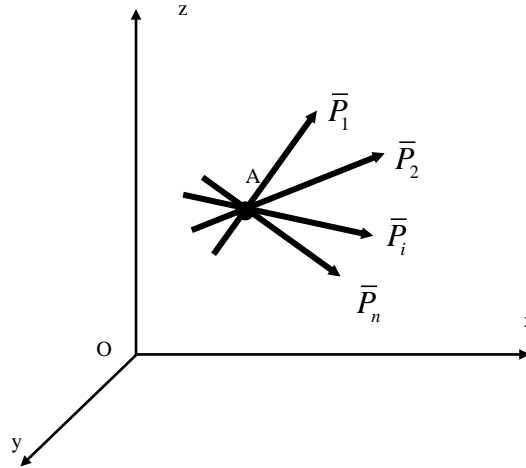
Fuerzas en [kN]
Distancias en [m]

Se solicita:

1. Determinar la resultante del mismo, su módulo y cosenos directores
2. Reducir el sistema al centro de coordenadas y determinar
 - 2.1. El binomio de reducción
 - 2.2. Los invariantes del sistema
3. Verificar el teorema de Varignon en el punto $O_1 = (1 \ 2 \ 2)$ del espacio

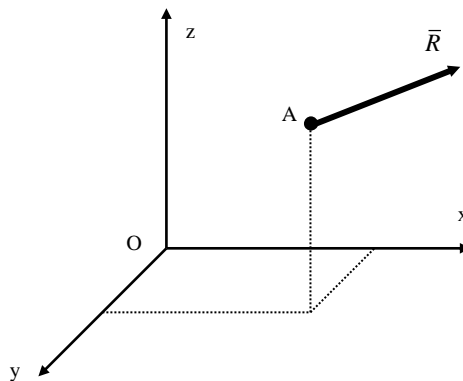
Ejercicio N° 4 – Introducción teórica

Se define como sistema de fuerzas concurrentes en el espacio al conjunto de fuerzas $\vec{P}_i (i=1,2,\dots,n)$ cuyas rectas de acción tienen un punto A en común, llamado punto de concurrencia; actuando dichas fuerzas en distintos planos.



Reduciendo el sistema de fuerzas \vec{P}_i al punto A , se obtiene la **resultante del sistema**:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \neq \vec{0} \quad (1)$$



Teniendo en cuenta que la resultante \vec{R} del sistema de fuerzas se obtiene sumando vectorialmente las componentes \vec{P}_i del sistema propuesto, las componentes escalares son:

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz}$$

Por otra parte, tomando momentos respecto del punto A :

$$\vec{M}_R^A = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{P_i}^A = \sum_{i=1}^n (A_i - A) \wedge \vec{P}_i \quad (2)$$

Pero resulta que para cada fuerza \vec{P}_i , se tiene que $A_i \equiv A$, luego:

$$\sum_{i=1}^n (A_i - A) \wedge \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n \vec{0} \wedge \vec{P}_i = \vec{0} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

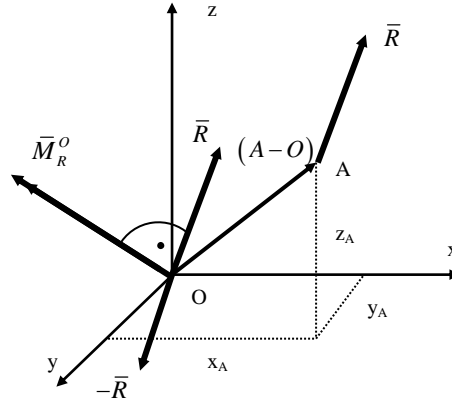
$$\vec{M}_R^A = \vec{0}$$

$$I_e = \frac{\bar{M}_R^A \times \bar{R}}{R} = 0$$

Si se reduce el sistema a otro punto del espacio como, por ejemplo, el origen de coordenadas, se tiene:

$$\bar{M}_R^O = (A-O) \wedge \bar{R}$$

pero como $I_e = 0$, entonces $\bar{M}_R^O \perp \bar{R}$



Eje central del sistema de fuerzas

El eje central del sistema coincide con la recta de acción de la resultante, la cual pasa por el punto A de concurrencia del sistema. El momento de dicha fuerza respecto de un punto cualquiera es igual al momento del sistema respecto de dicho punto, de acuerdo con el teorema de Varignon.

Condiciones de equilibrio

Las mismas pueden expresarse según:

A-Tres expresiones de nulidad de proyección de fuerzas:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iz} &= 0 \end{aligned}$$

Los ejes x , y y z no necesariamente deben coincidir con los de referencia. Pueden ser cualesquiera, siempre que se verifique los siguiente:

- Los ejes no deben ser paralelos
- Los ejes no deben ser coplanares
- Si dos ejes fuesen coplanares, el tercero no debe ser paralelo al plano que forman los dos primeros

B-Dos expresiones de nulidad de proyección de fuerzas y una de nulidad de momentos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{P_i}^z = 0$$

C-Una expresión de nulidad de proyección de fuerzas y dos de nulidad de momentos:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{P_i}^y = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{P_i}^z = 0$$

D-Tres expresiones de nulidad de momentos:

$$\sum_{i=1}^n M_{P_i}^x = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{P_i}^y = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{P_i}^z = 0$$

Ejercicio N° 4 – Resolución**1. Determinación de la resultante**

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = R_x \check{i} + R_y \check{j} + R_z \check{k}$$

Para los datos de este problema:

$$\bar{P}_1 = 6\check{i} - 4\check{j} + 2\check{k} \quad \bar{P}_2 = 4\check{i} + 5\check{j} - 3\check{k} \quad \bar{P}_3 = -3\check{i} + 2\check{j} + 4\check{k} \quad \bar{P}_4 = 2\check{i} + \check{j} - \check{k}$$

resulta que:

$$R_x = \sum_{i=1}^4 \bar{P}_{ix} = 6 + 4 - 3 + 2 = 9$$

$$R_y = \sum_{i=1}^4 \bar{P}_{iy} = -4 + 5 + 2 + 1 = 4$$

$$R_z = \sum_{i=1}^4 \bar{P}_{iz} = 2 - 3 + 4 - 1 = 2$$

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = 9\check{i} + 4\check{j} + 2\check{k}$$

El **invariante vectorial** tiene el siguiente valor:

$$I_v = \bar{R} = 9\check{i} + 4\check{j} + 2\check{k}$$

El módulo y cosenos directores de este vector son:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(9)^2 + (4)^2 + (2)^2} = \sqrt{101} = 10,050$$

$$\cos(\alpha_R) = \frac{R_x}{R} = \frac{9}{\sqrt{101}} = 0,896$$

$$\cos(\beta_R) = \frac{R_y}{R} = \frac{4}{\sqrt{101}} = 0,398$$

$$\cos(\gamma_R) = \frac{R_z}{R} = \frac{2}{\sqrt{101}} = 0,199$$

debiéndose cumplir que:

$$\cos^2(\alpha_R) + \cos^2(\beta_R) + \cos^2(\gamma_R) = 1$$

$$\bar{M}_R^A = \sum_{i=1}^4 (A_i - A) \wedge \bar{P}_i = \sum_{i=1}^4 \bar{0} \wedge \bar{P}_i = \bar{0}$$

ya que $A = A_i$. Como $\bar{M}_R^A = \bar{0}$, se tiene que $I_e = 0$

2. Reducción del sistema al centro de coordenadas y determinación $\bar{M}_R^O, \bar{R}, I_v, I_e$

Evidentemente se cumple que

$$I_v = \bar{R} = 9\check{i} + 4\check{j} + 2\check{k}$$

Por otra parte,

$$\bar{M}_R^O = \sum_{i=1}^4 (A_i - O) \wedge \bar{P}_i = \sum_{i=1}^4 (A - O) \wedge \bar{P}_i = (A - O) \wedge \sum_{i=1}^4 \bar{P}_i = (A - O) \wedge \bar{R}$$

$$\bar{M}_R^O = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -10\check{i} + 23\check{j} - \check{k}$$

Luego:

$$\bar{M}_R^O = -10\check{i} + 23\check{j} - \check{k}$$

El módulo y cosenos directores de este vector son:

$$M_R^O = \sqrt{(M_{Rx}^O)^2 + (M_{Ry}^O)^2 + (M_{Rz}^O)^2} = \sqrt{(-10)^2 + (23)^2 + (-1)^2} = \sqrt{630} = 25,100$$

$$\cos(\alpha_M) = \frac{M_{Rx}^O}{M_R^O} = \frac{-10}{\sqrt{630}} = 0,398$$

$$\cos(\beta_M) = \frac{M_{Ry}^O}{M_R^O} = \frac{23}{\sqrt{630}} = 0,916$$

$$\cos(\gamma_M) = \frac{M_{Rz}^O}{M_R^O} = \frac{-1}{\sqrt{630}} = -0,040$$

debiéndose cumplir que:

$$\cos^2(\alpha_M) + \cos^2(\beta_M) + \cos^2(\gamma_M) = 1$$

El invariante escalar no debe cambiar de valor, como se demuestra a continuación:

$$I_e = \frac{\bar{M}_R^O \times \bar{R}}{R} = \frac{(-10\check{i} + 23\check{j} - \check{k}) \times (9\check{i} + 4\check{j} + 2\check{k})}{\sqrt{101}} = \frac{-10 \cdot 9 + 23 \cdot 4 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{101}} = 0$$

$$I_e = 0$$

3. Verificación del Teorema de Varignon en el punto $O_1 = (1 \ 2 \ 2)$ del espacio.

$$\bar{M}_R^{O_1} = \bar{M}_{P_1}^{O_1} + \bar{M}_{P_2}^{O_1} + \bar{M}_{P_3}^{O_1} + \bar{M}_{P_4}^{O_1} = (A - O_1) \wedge \bar{P}_1 + (A - O_1) \wedge \bar{P}_2 + (A - O_1) \wedge \bar{P}_3 + (A - O_1) \wedge \bar{P}_4$$

$$\bar{M}_{P_1}^{O_1} = (A - O_1) \wedge \bar{P}_1 = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2\check{i} + 4\check{j} + 2\check{k}$$

$$\bar{M}_{P_2}^{O_1} = (A - O_2) \wedge \bar{P}_2 = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -2\check{i} + 7\check{j} + 9\check{k}$$

$$\bar{M}_{P_3}^{O_1} = (A - O_3) \wedge \bar{P}_3 = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -6\check{i} - 7\check{j} - \check{k}$$

$$\bar{M}_{P_4}^{O_1} = (A - O_1) \wedge \bar{P}_4 = \begin{vmatrix} \tilde{i} & \tilde{j} & \tilde{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\tilde{i} + 3\tilde{j} + 3\tilde{k}$$

Finalmente:

$$\bar{M}_{R_x}^{O_1} = \sum_{i=1}^4 M_{P_{ix}}^{O_1} = (2 - 2 - 6) = -6$$

$$\bar{M}_{R_y}^{O_1} = \sum_{i=1}^4 M_{P_{iy}}^{O_1} = (4 + 7 - 7 + 3) = 7$$

$$\bar{M}_{R_z}^{O_1} = \sum_{i=1}^4 M_{P_{iz}}^{O_1} = (2 + 9 - 1 + 3) = 13$$

$$\bar{M}_R^{O_1} = -6\tilde{i} + 7\tilde{j} + 13\tilde{k}$$

Calculando ahora,

$$\bar{M}_R^{O_1} = (A - O_1) \wedge \bar{R} = \begin{vmatrix} \tilde{i} & \tilde{j} & \tilde{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -6\tilde{i} + 7\tilde{j} + 13\tilde{k}$$

En consecuencia, se verifica el Teorema de Varignon
