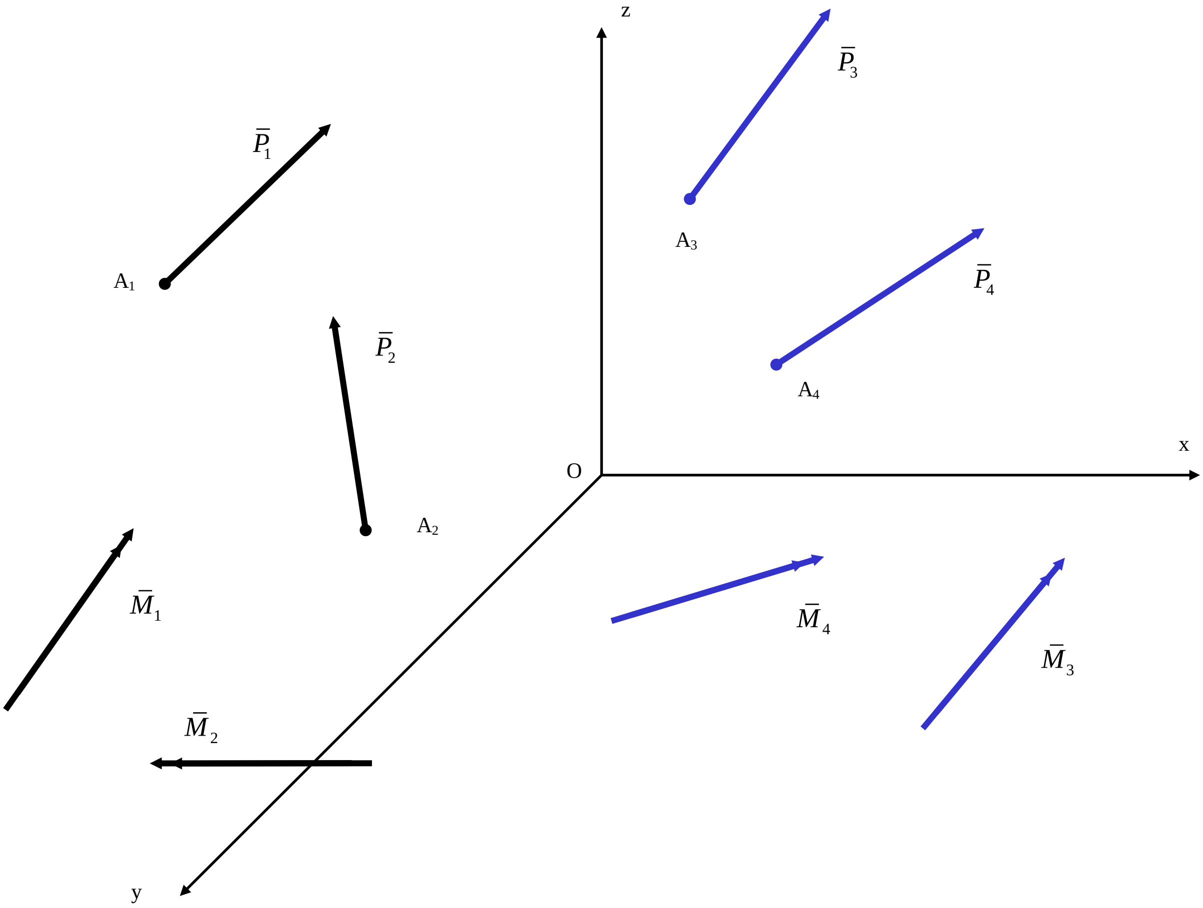
Ejercicio Nº 3 – Enunciado

Dados dos sistemas de fuerzas, uno formado por *n* fuerzas $\overline{P}_i$ y el otro por *m* fuerzas $\overline{P}_j$



Fuerzas en [kN]
Distancias en [m]

Sistema $\overline{P}_i$		Sistema $\overline{P}_j$	
$\overline{P}_1 = 2\breve{i} - 4\breve{j} + 2\breve{k}$	$\overline{P}_2 = -4\breve{i} + 2\breve{j} + 2\breve{k}$	$\overline{P}_3 = 3\breve{i} + 2\breve{j} - 2\breve{k}$	$\overline{P}_4 = ?$
$A_1 = (4 \quad 2 \quad 4)$	$A_2 = (-4 \quad 2 \quad 4)$	$A_3 = (1 \quad 1 \quad 1)$	$A_4 = (-1 \quad 2 \quad -3)$
$\overline{M}_1 = 2\breve{i} + 2\breve{j} + 3\breve{k}$	$\overline{M}_2 = -4\breve{i} - 4\breve{j} + 1\breve{k}$	$\overline{M}_3 = 5\breve{i} - \breve{j} + 2\breve{k}$	$\overline{M}_4 = ?$

Se solicita calcular los elementos desconocidos del sistema $\overline{P}_j$ de manera tal que ambos sistemas resulten equivalentes

Ejercicio Nº 3 – Introducción teórica

Equivalencia de sistemas gausos de fuerzas

Dado un sistema I constituido por fuerzas $\overline{P}_i\left(i=1,2,...,n\right)$ y otro II constituido por fuerzas $\overline{P}_j\left(j=1,2,...,m\right)$, ambos sistemas I y II son equivalentes cuando tienen el mismo efecto sobre el cambio de estado de movimiento del cuerpo sobre el cual actúa. Atendiendo al cambio de estado de movimiento del cuerpo, puede reemplazarse un sistema I por otro II equivalente. El caso más general consiste en la equivalencia entre sistemas de fuerzas espaciales no concurrentes.

Dados dos sistemas de fuerzas, S_I constituido por fuerzas $\overline{P}_i\left(i=1,2,...,n\right)$, y S_{II} constituido por fuerzas $\overline{P}_j\left(j=1,2,...,m\right)$ son equivalentes cuando reducidos a un mismo punto presentan el mismo binomio de reducción. Expresándolo mediante **las *condiciones vectoriales de equivalencia*:**

$$\overline{R}_I = \overline{R}_{II}$$
$$M^O_{R_I} = M^O_{R_{II}}$$

Pueden escribirse escalarmente, constituyendo las ***condiciones escalares de equivalencia***, como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = \sum_{j=1}^{m} P_{jx}$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = \sum_{j=1}^{m} P_{jy}$$
$$\sum_{i=1}^{n} P_{iz} = \sum_{j=1}^{m} P_{jz}$$
$$\sum_{i=1}^{n} M^O_{ix} = \sum_{j=1}^{m} M^O_{jx}$$
$$\sum_{i=1}^{n} M^O_{iy} = \sum_{j=1}^{m} M^O_{jy}$$
$$\sum_{i=1}^{n} M^O_{iz} = \sum_{j=1}^{m} M^O_{jz}$$

Ejercicio Nº 3 - Resolución

Para que dos sistemas de fuerzas resulten equivalentes debe cumplirse simultáneamente que:

$$\bar{R}_i = \bar{R}_j$$
$$\bar{M}^O_{R_i} = \bar{M}^O_{R_j}$$

Desarrollando estas expresiones:

$$\sum_{i=1}^{2} \bar{P}_i = \sum_{j=3}^{4} \bar{P}_j$$

$$\sum_{i=1}^{2} P_{ix} = \sum_{j=3}^{4} P_{jx} \qquad P_{1x} + P_{2x} = P_{3x} + P_{4x} \qquad 2 + (-4) = 3 + P_{4x}$$
$$\sum_{i=1}^{2} P_{iy} = \sum_{j=3}^{4} P_{jy} \qquad P_{1y} + P_{2y} = P_{3y} + P_{4y} \qquad -4 + 2 = 2 + P_{4y}$$
$$\sum_{i=1}^{2} P_{iz} = \sum_{j=3}^{4} P_{jz} \qquad P_{1z} + P_{2z} = P_{3z} + P_{4z} \qquad 2 + 2 = -2 + P_{4z}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \bar{M}^O_{P_i} + \bar{M}_i = \sum_{j=3}^{4} \bar{M}^O_{P_j} + \bar{M}_j$$

$$\sum_{i=1}^{2} M^O_{Pix} + M_{ix} = \sum_{j=3}^{4} M^O_{Pjx} + M_{jx} \qquad M^O_{P_1x} + M^O_{P_2x} + M_{1x} + M_{2x} = M^O_{P_3x} + M^O_{P_4x} + M_{3x} + M_{4x}$$
$$\sum_{i=1}^{2} M^O_{Piy} + M_{iy} = \sum_{j=3}^{4} M^O_{Pjy} + M_{jy} \qquad M^O_{P_1y} + M^O_{P_2y} + M_{1y} + M_{2y} = M^O_{P_3y} + M^O_{P_4y} + M_{3y} + M_{4y}$$
$$\sum_{i=1}^{2} M^O_{Piz} + M_{iz} = \sum_{j=3}^{4} M^O_{Pjz} + M_{jz} \qquad M^O_{P_1z} + M^O_{P_2z} + M_{1z} + M_{2z} = M^O_{P_3z} + M^O_{P_4z} + M_{3z} + M_{4z}$$

$$\bar{M}^O_{P_1} = (A_1 - O) \wedge \bar{P}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 20\breve{i} + 0\breve{j} - 20\breve{k}$$

$$\bar{M}^O_{P_2} = (A_2 - O) \wedge \bar{P}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\breve{i} - 8\breve{j} + 0\breve{k}$$

$$\bar{M}^O_{P_3} = (A_3 - O) \wedge \bar{P}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\breve{i} + 5\breve{j} - \breve{k}$$

$$\bar{M}^O_{P_4} = (A_4 - O) \wedge \bar{P}_4 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ P_{4x} & P_{4y} & P_{4z} \end{vmatrix} = \left(2 \cdot P_{4z} + 3 \cdot P_{4y}\right)\breve{i} - \left(-P_{4z} + 3 \cdot P_{4x}\right)\breve{j} + \left(-P_{4y} - 2 \cdot P_{4x}\right)\breve{k}$$

$$\bar{M}_1 = 2\breve{i} + 2\breve{j} + 3\breve{k}$$
$$\bar{M}_2 = -4\breve{i} + -4\breve{j} + 1\breve{k}$$
$$\bar{M}_3 = 5\breve{i} - \breve{j} + 2\breve{k}$$
$$\bar{M}_4 = M_{4x}\breve{i} + M_{4y}\breve{j} + M_{4z}\breve{k}$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores:

$$20+(-4)+2+(-4)=-4+\left(2\cdot P_{4z}+3\cdot P_{4y}\right)+5+M_{4x}$$
$$0+(-8)+2+(-4)=5+\left(P_{4z}-3\cdot P_{4x}\right)+(-1)+M_{4y}$$
$$-20+0+3+1=-1+\left(-P_{4y}-2\cdot P_{4x}\right)+2+M_{4z}$$

Consecuentemente, se llega al siguiente sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas:

$$-2=3+P_{4x} \qquad (1)$$
$$-2=2+P_{4y} \qquad (2)$$
$$4=-2+P_{4z} \qquad (3)$$
$$13=2\cdot P_{4z}+3\cdot P_{4y}+M_{4x} \qquad (4)$$
$$-14=P_{4z}-3\cdot P_{4x}+M_{4y} \qquad (5)$$
$$-17=-P_{4y}-2\cdot P_{4x}+M_{4z} \qquad (6)$$

Resolviendo:

De la ecuación (1):

$$P_{4x}=-5$$

De la ecuación (2):

$$P_{4y}=-4$$

De la ecuación (3):

$$P_{4z}=6$$

De la ecuación (4):

$$M_{4x}=13-2\cdot P_{4z}-3\cdot P_{4y}=13-2\cdot 6-3\cdot(-4)=13$$

De la ecuación (5):

$$M_{4y}=-14-P_{4z}+3\cdot P_{4x}=-14-6+3\cdot(-5)=-35$$

De la ecuación (6):

$$M_{4z}=-17+P_{4y}+2\cdot P_{4x}=-17+(-4)+2\cdot(-5)=-31$$

En definitiva, se tiene que:

$$\bar{P}_4=-5\breve{i}-4\breve{j}+6\breve{k}$$
$$\bar{M}_4=13\breve{i}-35\breve{j}-31\breve{k}$$