

Ejercicio N° 2 - Enunciado

Dado el siguiente sistema gauso de fuerzas:

$$\bar{P}_1 = -3\tilde{i} + 2\tilde{j} + 4\tilde{k}$$

$$A_1 = (4 \ 3 \ 2)$$

$$\bar{P}_2 = 3\tilde{i} - 3\tilde{j} + 2\tilde{k}$$

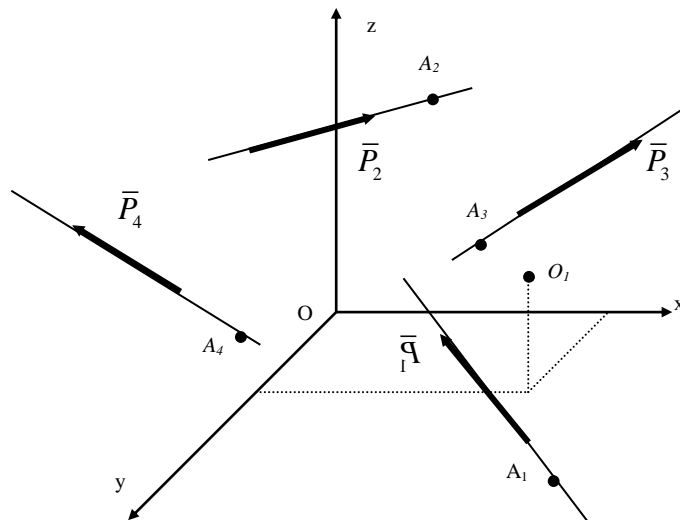
$$A_2 = (2 \ 4 \ 3)$$

$$\bar{P}_3 = -2\tilde{i} + 5\tilde{j} + 4\tilde{k}$$

$$A_3 = (5 \ 4 \ 4)$$

$$\bar{P}_4 = -\tilde{i} + 2\tilde{j} + 3\tilde{k}$$

$$A_4 = (0 \ 2 \ 2)$$



Fuerzas en [kN]

Distancias en [m]

Se solicita:

1. Reducir el mismo al centro de coordenadas y determinar:

1.1. El binomio de reducción (\bar{R} y \bar{M}_R^O), sus módulos y cosenos directores.

1.2. Los invariantes vectorial (I_v) y escalar (I_e) y clasificar, en función de los mismos, el sistema de fuerzas.

2. Reducir el sistema al punto $O_1 = (6 \ 3 \ 2)$ y determinar:

2.1. El binomio de reducción del sistema en el punto O_1 .

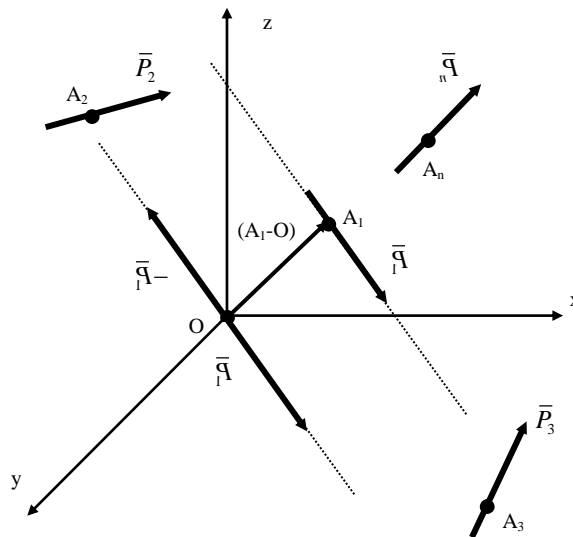
2.2. Los invariantes del sistema (I_v e I_e).

Ejercicio N° 2 – Introducción teórica

Reducción de un sistema de fuerzas a un punto

Reducir un sistema de fuerzas a un punto O , llamado centro de reducción, consiste en trasladar a todas las fuerzas del sistema a ese punto, manteniéndolas paralelas a su recta de acción, para obtener en el centro de reducción un sistema que siendo más simple es equivalente al propuesto.

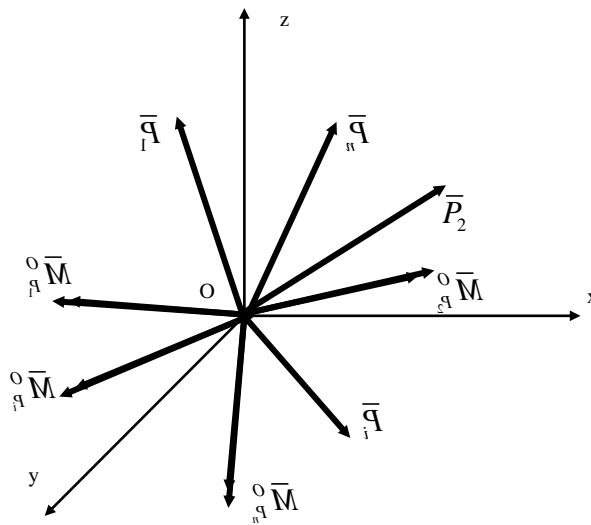
Con dicha finalidad, se procede de la siguiente manera: se traza por el punto O una recta paralela a la recta de acción de la fuerza \vec{P}_1 y sobre dicha recta se introduce un sistema nulo formado por dos fuerzas que tengan la misma intensidad que la fuerza \vec{P}_1 y sentidos contrarios (el efecto de una de ellas es anulado por el de la otra) Por tal motivo, este sistema podrá agregarse o quitarse sin que por ello el efecto total del sistema se altere.



Se ve en el gráfico anterior que la fuerza \vec{P}_1 pasante por A_1 y la $-\vec{P}_1$ pasante por O forman una **cupla**, la cual puede ser representada por su vector momento equivalente \vec{M}_1^O (un vector libre), que puede ser expresado como el momento de una de las fuerzas del par respecto de un punto de la recta de acción de la otra fuerza del par. Vectorialmente se expresa como:

$$\vec{M}_1^O = (\vec{A}_1 - \vec{O}) \wedge \vec{P}_1$$

de dirección normal al plano de la cupla. Su sentido resulta de aplicar la regla del observador. Procediendo de manera análoga con las fuerzas restantes del sistema se obtendrá en el punto O un conjunto de vectores fuerzas $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$, y un conjunto de vectores momentos $\vec{M}_1^O, \vec{M}_2^O, \vec{M}_3^O, \dots, \vec{M}_n^O$ (vectores libre), por lo tanto, puede suponerse que los vectores \vec{M}_i^O concurren al punto O y que en total forman un sistema equivalente al propuesto.



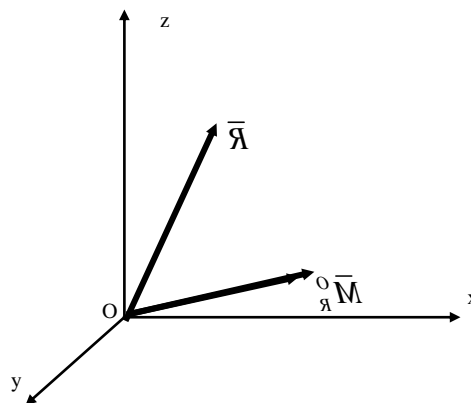
Como todos los vectores concurren al punto O , pueden sumarse vectorialmente. Para las fuerzas se tiene:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$$

y para los momentos:

$$\bar{M}_R^O = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{P_i}^O = \sum_{i=1}^n (A_i - O) \wedge \bar{P}_i$$

Estos dos elementos, \bar{R} , llamado resultante de traslación o resultante de reducción, y \bar{M}_R^O , llamado momento resultante de reducción en el punto O , constituyen el sistema más simple y es equivalente al propuesto. Al conjunto de estos dos elementos, \bar{R} y \bar{M}_R^O , se lo denomina **binomio de reducción**.

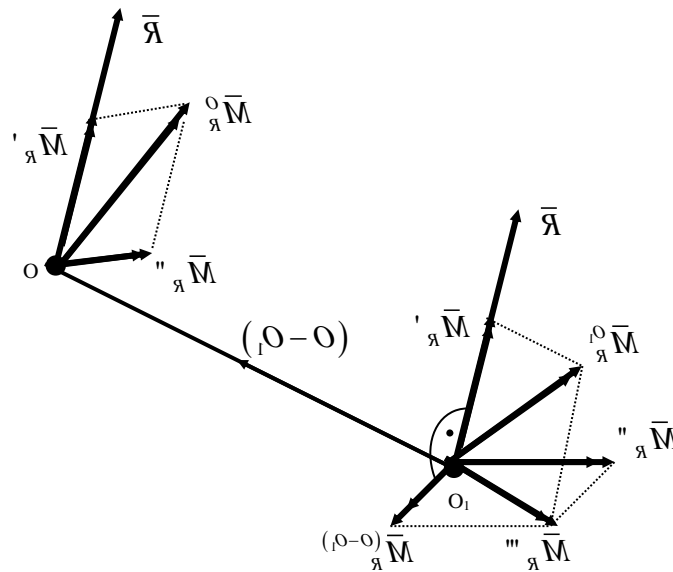


Invariantes del sistema

Al variar el centro de reducción, el vector \bar{R} se mantiene constante, constituyendo dicha resultante de reducción el **Invariante vectorial del sistema**.

Al cambiar el centro de reducción, el vector \bar{M}_R varía, pero su proyección sobre la resultante de reducción del sistema M_R' se mantiene constante. Dicha proyección constituye el **Invariante escalar del sistema**.

Los invariantes vectorial y escalar del sistema constituyen la identidad del mismo.



$\bar{M}_R^{(O-O_1)} \perp$ al plano formado por \bar{R} y $(O-O_1)$

$$\bar{M}_R^{O_1} = \bar{M}_R' + \bar{M}_R'' + \bar{M}_R^{(O-O_1)}$$

$$\bar{M}_R'' + \bar{M}_R^{(O-O_1)} = \bar{M}_R'''$$

$$\bar{M}_R^{O_1} = \bar{M}_R' + \bar{M}_R'''$$

Eje central

El eje central de un sistema de fuerzas está constituido por los infinitos puntos que tomados como centro de reducción dan origen a un vector momento $\bar{M}_R^{O^*}$ de dirección paralela a la resultante de reducción y cuya magnitud coincide con el invariante escalar del sistema en valor absoluto. A la dirección de \bar{R} pasante por O^* se la denomina *eje del torsor de fuerzas* y al binomio \bar{R} y $\bar{M}_R^{O^*}$, *torsor de fuerzas*.

Ejercicio N° 2 – Resolución**1. Reducción del sistema al centro de coordenadas**

Para el punto O se obtiene el binomio de reducción \bar{R} y \bar{M}_R^O , como sigue:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$$

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{P_i}^O = \sum_{i=1}^n (A_i - O) \wedge \bar{P}_i$$

Luego,

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = (-3) + 3 + (-2) + (-1) = -3$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 2 + (-3) + 5 + 2 = 6$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} = 4 + 2 + 4 + 3 = 13$$

$$\bar{R} = P_x \check{i} + P_y \check{j} + P_z \check{k} = -3\check{i} + 6\check{j} + 13\check{k}$$

Esta última es la resultante de traslación. El momento resultante de reducción se calcula como sigue:

$$\bar{M}_{P_1}^O = (A_1 - O) \wedge \bar{P}_1 = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 4 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8\check{i} - 22\check{j} + 17\check{k}$$

$$\bar{M}_{P_2}^O = (A_2 - O) \wedge \bar{P}_2 = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 17\check{i} + 5\check{j} - 18\check{k}$$

$$\bar{M}_{P_3}^O = (A_3 - O) \wedge \bar{P}_3 = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 5 & 4 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -4\check{i} - 28\check{j} + 33\check{k}$$

$$\bar{M}_{P_4}^O = (A_4 - O) \wedge \bar{P}_4 = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\check{i} - 2\check{j} + 2\check{k}$$

$$M_{R_x}^O = \sum_{i=1}^n M_{ix}^O = 8 + 17 + (-4) + 2 = 23$$

$$M_{R_y}^O = \sum_{i=1}^n M_{iy}^O = -22 + 5 + (-28) + (-2) = -47$$

$$M_{R_z}^O = \sum_{i=1}^n M_{iz}^O = 17 + (-18) + 33 + 2 = 34$$

$$\bar{M}_R^O = M_{R_x}^O \check{i} + M_{R_y}^O \check{j} + M_{R_z}^O \check{k} = 23\check{i} - 47\check{j} + 34\check{k}$$

En el punto se tienen un sistema más simple y equivalente al propuesto:

$$\bar{R} = -3\check{i} + 6\check{j} + 13\check{k}$$

$$\bar{M}_R^O = 23\check{i} - 47\check{j} + 34\check{k}$$

Los módulos y cosenos directores son:

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (13)^2} = \sqrt{214} = 14,628$$

$$\cos(\alpha_R) = \frac{R_x}{R} = \frac{-3}{\sqrt{214}} = -0,205$$

$$\cos(\beta_R) = \frac{R_y}{R} = \frac{6}{\sqrt{214}} = 0,410$$

$$\cos(\gamma_R) = \frac{R_z}{R} = \frac{13}{\sqrt{214}} = 0,888$$

Debe cumplirse que:

$$\cos^2(\alpha_R) + \cos^2(\beta_R) + \cos^2(\gamma_R) = 1$$

$$M_R^O = \sqrt{(M_{R_x}^O)^2 + (M_{R_y}^O)^2 + (M_{R_z}^O)^2} = \sqrt{(23)^2 + (-47)^2 + (34)^2} = \sqrt{3894} = 62,401$$

$$\cos(\alpha_M) = \frac{M_{R_x}^O}{M_R^O} = \frac{23}{\sqrt{3894}} = 0,360$$

$$\cos(\beta_M) = \frac{M_{R_y}^O}{M_R^O} = \frac{-47}{\sqrt{3894}} = -0,753$$

$$\cos(\gamma_M) = \frac{M_{R_z}^O}{M_R^O} = \frac{34}{\sqrt{3894}} = 0,544$$

$$\cos^2(\alpha_M) + \cos^2(\beta_M) + \cos^2(\gamma_M) = 1$$

Cálculo de los invariantes del sistema de fuerzas:

El invariante vectorial es directamente:

$$I_v = \bar{R} = -3\check{i} + 6\check{j} + 13\check{k}$$

Mientras que el invariante escalar vale:

$$I_e = \frac{\bar{M}_R^O \times \bar{R}}{R} = \frac{M_{R_x}^O \cdot R_x + M_{R_y}^O \cdot R_y + M_{R_z}^O \cdot R_z}{R}$$

$$I_e = \frac{23 \cdot (-3) + (-47) \cdot 6 + 34 \cdot 13}{\sqrt{214}} = 6,220$$

Luego, resumiendo:

$$I_v = -3\check{i} + 6\check{j} + 13\check{k}$$

$$I_e = 6,220$$

Como se ve se verifica que:

$$\bar{R} \neq \bar{0} \quad \bar{M}_R^O \neq \bar{0} \quad I_e \neq 0$$

y por lo tanto, se puede asegurar que el sistema no admite resultante.

2. Reducción del sistema de fuerzas al punto $O_1 = (6 \ 3 \ 2)$

La resultante de reducción en el punto O_1 es igual a la resultante de reducción en el punto O . Lo que sí varía es el momento resultante de reducción:

$$\bar{M}_R^{O_1} = \bar{M}_R^O + \bar{M}_R^{O-O_1}$$

$$\bar{M}_R^{O_1} = \bar{M}_R^O + (O - O_1) \wedge \bar{R}$$

$$\bar{M}_R^{O_1} = (O - O_1) \wedge \bar{R} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -6 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 13 \end{vmatrix} = -27\bar{i} + 84\bar{j} - 45\bar{k}$$

$$\bar{M}_R^{O_1} = \bar{M}_{R_x}^{O_1} + \bar{M}_{R_y}^{O_1} + \bar{M}_{R_z}^{O_1}$$

$$M_{R_x}^{O_1} = M_{R_x}^O + M_{R_x}^{O-O_1} = 23 + (-27) = -4$$

$$M_{R_y}^{O_1} = M_{R_y}^O + M_{R_y}^{O-O_1} = -47 + 84 = 37$$

$$M_{R_z}^{O_1} = M_{R_z}^O + M_{R_z}^{O-O_1} = 34 + (-45) = -11$$

El binomio de reducción al punto O_1 entonces queda:

$$\bar{R} = -3\bar{i} + 6\bar{j} + 13\bar{k}$$

$$\bar{M}_R^{O_1} = -4\bar{i} + 37\bar{j} - 11\bar{k}$$

Los módulos y cosenos directores se calculan a continuación:

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (13)^2} = \sqrt{214} = 14,628$$

$$\cos(\alpha_R) = \frac{R_x}{R} = \frac{-3}{\sqrt{214}} = -0,205$$

$$\cos(\beta_R) = \frac{R_y}{R} = \frac{6}{\sqrt{214}} = 0,410$$

$$\cos(\gamma_R) = \frac{R_z}{R} = \frac{13}{\sqrt{214}} = 0,888$$

Debe cumplirse que:

$$\cos^2(\alpha_R) + \cos^2(\beta_R) + \cos^2(\gamma_R) = 1$$

$$M_R^{O_1} = \sqrt{(M_{R_x}^{O_1})^2 + (M_{R_y}^{O_1})^2 + (M_{R_z}^{O_1})^2} = \sqrt{(-4)^2 + (37)^2 + (-11)^2} = \sqrt{1506} = 38,807$$

$$\cos(\alpha_M) = \frac{M_{R_x}^{O_1}}{M_R^{O_1}} = \frac{-4}{\sqrt{1506}} = -0,103$$

$$\cos(\beta_M) = \frac{M_{R_y}^{O_1}}{M_R^{O_1}} = \frac{37}{\sqrt{1506}} = 0,953$$

$$\cos(\gamma_M) = \frac{M_{R_z}^{O_1}}{M_R^{O_1}} = \frac{-11}{\sqrt{1506}} = -0,283$$

$$\cos^2(\alpha_M) + \cos^2(\beta_M) + \cos^2(\gamma_M) = 1$$

El invariante vectorial, de nuevo, es directamente:

$$I_v = \bar{R} = -3\check{i} + 6\check{j} + 13\check{k}$$

Mientras que el invariante escalar vale:

$$I_e = \frac{\bar{M}_R^{O_1} \times \bar{R}}{R} = \frac{M_{R_x}^{O_1} \cdot R_x + M_{R_y}^{O_1} \cdot R_y + M_{R_z}^{O_1} \cdot R_z}{R}$$

$$I_e = \frac{(-4) \cdot (-3) + 37 \cdot 6 + (-11) \cdot 13}{\sqrt{214}} = 6,220$$

Luego, resumiendo:

$$I_v = -3\check{i} + 6\check{j} + 13\check{k}$$

$$I_e = 6,220$$

Se verifica que tanto el invariante escalar como el vectorial permanecen constantes.
