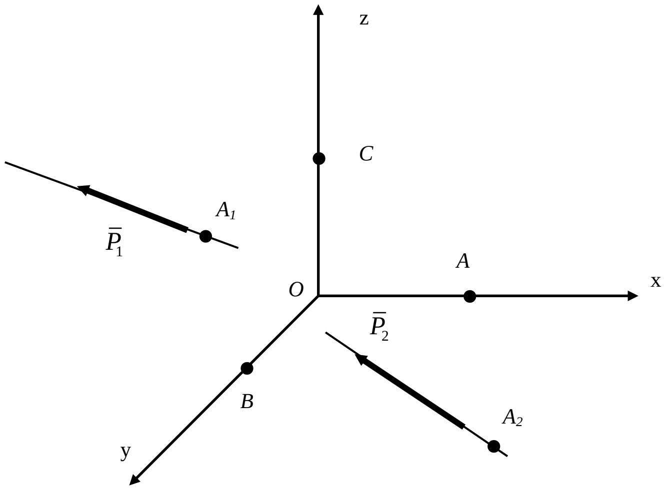
Ejercicio Nº 1 - Enunciado

Dado un sistema de fuerzas formado por:

$$\overline{P}_1 = -\breve{i} + \breve{j} + 2\breve{k} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{P}_2 = -3\breve{i} - \breve{j} + \breve{k} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$



Fuerzas en [kN]
Distancias en [m]

Se solicita:

1. Calcular el momento del sistema respecto del centro de coordenadas
2. Calcular el momento del sistema respecto de los ejes *x*, *y* y *z* respectivamente
3. Dado un punto $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ perteneciente al eje *x*, se pide calcular el momento del sistema respecto de dicho eje.
4. Dado un punto $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ perteneciente al eje *y*, se pide calcular el momento del sistema respecto de dicho eje.
5. Dado un punto $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ perteneciente al eje *z*, se pide calcular el momento del sistema respecto de dicho eje.

Ejercicio Nº 1 – Introducción teórica

Concepto de fuerza

Es toda causa capaz de producir o modificar el movimiento de un cuerpo. La ley de masa o segunda ley de Newton nos dice que:

> La aceleración que adquiere un cuerpo de masa constante *m* bajo la acción de una fuerza y la intensidad de esta fuerza están ligadas mediante la siguiente expresión:
> $$\overline{P} = m \cdot \overline{a}$$

Como la aceleración es una magnitud vectorial, también la fuerzas será una magnitud vectorial, cuya dirección y sentido estarán dados por la aceleración y su módulo, por el producto entre el módulo de la aceleración y la masa.

Sistema de fuerzas.

Se define como todo conjunto de fuerzas continuo o discreto que actúa sobre un cuerpo.

Los sistemas de fuerzas pueden clasificarse en:

1. Sistemas de fuerzas ***concentradas***: es un conjunto discreto de fuerzas que actúan simultáneamente sobre un cuerpo.
2. Sistemas de fuerzas ***distribuidas***: es un conjunto continuo de fuerzas de módulos infinitamente pequeños que actúan simultáneamente sobre un cuerpo.

A su vez los sistemas de fuerzas concentrados pueden ser clasificados en espaciales o coplanares:

1. Sistemas de fuerzas ***espaciales***: son aquellos en los que las rectas de acción de las fuerzas que los componen no están comprendidas en un mismo plano.
2. Sistemas de fuerzas ***coplanares***: son aquellos en los que las rectas de acción de las fuerzas que los integran sí están comprendidas en un mismo plano.

Los sistemas de fuerzas, tanto espaciales como complanares, los podemos dividir en tres categorías:

1. Sistemas de fuerzas ***no concurrentes***: son aquellos en los que las rectas de acción de las fuerzas que los componen no poseen un punto de concurrencia .
2. Sistemas de fuerzas ***concurrentes***: son aquellos en los que las rectas de acción de todas las fuerzas que los componen concurren a un único punto.
3. Sistemas de fuerzas ***paralelas***: son aquellos en los que las rectas de acción las fuerzas que los integran son paralelas a una determinada dirección.

La ***resultante*** de un sistema de fuerzas es una única fuerza que produce sobre un cuerpo el mismo efecto que el sistema. Esta resultante será la mínima expresión del sistema, si admite resultante. Al problema de determinar la resultante de un sistema de fuerzas se lo denomina ***composición de fuerzas***.

Momento de una fuerza respecto de un punto

Sea una fuerza $\overline{P}$ aplicada a un cuerpo rígido y un punto cualquiera *O*, llamado centro de momento, perteneciente al mismo cuerpo rígido.

Se define momento de la fuerza $\bar{P}$ respecto del punto *O*, M_P^O, como el producto de la intensidad de la misma por la menor distancia del punto a su recta de acción, y cuya expresión es:

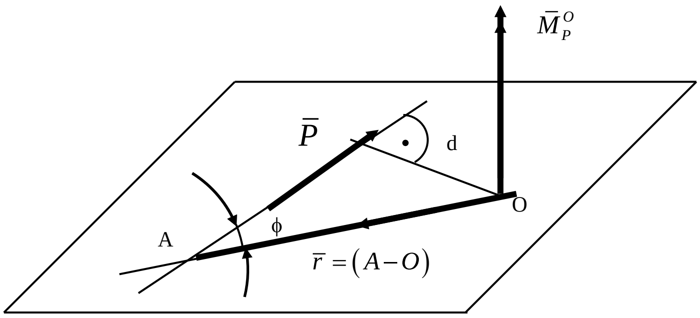
$$M_P^O = P \cdot d$$

La unidad de la magnitud momento es el producto de la unidad de fuerza por la unidad de distancia.
El momento de una fuerza respecto a un punto se representa por el vector $\bar{M}_P^O$, aplicado en el punto *O*, cuyo módulo vale $M_P^O = P \cdot d$, la dirección es normal al plano determinado por el punto y la recta de acción de la fuerza. El sentido está dado por la regla del observador. El momento de la fuerza $\bar{P}$ respecto de un punto O se lo pondera mediante el siguiente producto vectorial:

$$\bar{M}_P^O = (A - O) \wedge \bar{P}$$

El módulo de dicho vector es:

$$M_P^O = P \cdot \underbrace{(A - O) \cdot \sin(\phi)}_{d} = P \cdot d$$



Para calcular el momento del sistema $\bar{M}_{SIST}^O$ con respecto a un punto *O*, debe calcularse el momento de cada fuerza respecto al punto, y luego sumarlos. Se expresa mediante la siguiente sumatoria:

$$\bar{M}_{SIST}^O = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{P_i}^O$$

Momento de una fuerza respecto de un eje

El momento de una respecto a un eje es igual a la proyección sobre el eje del vector momento de la fuerza respecto de un punto cualquiera, perteneciente al eje. Si la fuerza y el eje son coplanares, es decir, tienen un punto en común, propio o impropio, el momento de la fuerza respecto del eje es nulo.

Ejercicio Nº 1 – Resolución

1. Calcular el momento del sistema respecto del centro de coordenadas

$$\overline{M}_{P1}^{O} = (A_1 - O) \wedge \overline{P}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$$

$$\overline{M}_{P2}^{O} = (A_2 - O) \wedge \overline{P}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 7\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$\overline{M}_{R}^{O} = \overline{M}_{P1}^{O} + \overline{M}_{P2}^{O} = (2-1)\breve{i} + (-2+7)\breve{j} + (2+4)\breve{k}$$

$$\boldsymbol{\overline{M}_{R}^{O} = \breve{i} + 5\breve{j} + 6\breve{k}}$$

$$\overline{M}_{R}^{O} = M_{R\,x}^{O}\breve{i} + M_{R\,y}^{O}\breve{j} + M_{R\,z}^{O}\breve{k}$$

$M_{R\,x}^{O} = 1$ $\qquad M_{R\,y}^{O} = 5$ $\qquad M_{R\,z}^{O} = 6$

$$M_{R}^{O} = \sqrt{(M_{R\,x}^{O})^2 + (M_{R\,y}^{O})^2 + (M_{R\,z}^{O})^2} = \sqrt{(1)^2 + (5)^2 + (6)^2} = \sqrt{62} = 7{,}87$$

Cosenos directores:

$$\cos(\alpha_M) = \frac{M_{R\,x}^{O}}{M_{R}^{O}} = \frac{1}{\sqrt{62}} = 0{,}127$$

$$\cos(\beta_M) = \frac{M_{R\,y}^{O}}{M_{R}^{O}} = \frac{5}{\sqrt{62}} = 0{,}635$$

$$\cos(\gamma_M) = \frac{M_{R\,z}^{O}}{M_{R}^{O}} = \frac{6}{\sqrt{62}} = 0{,}762$$

Se cumple además que:

$$\cos^2(\alpha_M) + \cos^2(\beta_M) + \cos^2(\gamma_M) = 1$$

2. Calcular el momento del sistema respecto de los ejes *x*, *y* y *z* respectivamente

El momento M_p^e de una fuerza $\overline{P}$ respecto de un eje *e* puede calcularse como:

$$M_p^e = \breve{e} \times (\bar{r} \wedge \overline{P})$$

siendo:
$\breve{e}$: versor asociado al eje *e*
$\bar{r}$: vector distancia, comprendido entre un punto del eje *e* y otro de la recta de acción de la fuerza $\overline{P}$

Luego se tiene que:

$M_{R}^{O,x} = \breve{i} \times \overline{M}_{R}^{O} = (1 \quad 0 \quad 0) \times (1 \quad 5 \quad 6) = 1$ $\qquad \boldsymbol{M_{R}^{O,x} = 1}$

$M_{R}^{O,y} = \breve{j} \times \overline{M}_{R}^{O} = (0 \quad 1 \quad 0) \times (1 \quad 5 \quad 6) = 5$ $\qquad \boldsymbol{M_{R}^{O,y} = 5}$

$M_{R}^{O,z} = \breve{k} \times \overline{M}_{R}^{O} = (0 \quad 0 \quad 1) \times (1 \quad 5 \quad 6) = 6$ $\qquad \boldsymbol{M_{R}^{O,y} = 6}$

3. Dado un punto $A = (2 \quad 0 \quad 0)$ perteneciente al eje *x*, se pide calcular el momento del sistema respecto de dicho eje.

$$M_R^{A,x} = \breve{i} \times \overline{M}_R^A$$

$$\overline{M}_{P1}^A = (A_1 - A) \wedge \overline{P}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\overline{M}_{P2}^A = (A_2 - A) \wedge \overline{P}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 9\bar{j} + 6\bar{k}$$

$$\overline{M}_R^A = \overline{M}_{P1}^A + \overline{M}_{P2}^A = (2-1)\breve{i} + (2+9)\breve{j} + (0+6)\breve{k}$$

$$\boldsymbol{\overline{M}_R^A = \breve{i} + 11\breve{j} + 6\breve{k}}$$

$$\overline{M}_R^A = M_{Rx}^A \breve{i} + M_{Ry}^A \breve{j} + M_{Rz}^A \breve{k}$$

$M_{Rx}^A = 1$ $\qquad$ $M_{Ry}^A = 11$ $\qquad$ $M_{Rz}^A = 6$

$$M_R^A = \sqrt{(M_{Rx}^A)^2 + (M_{Ry}^A)^2 + (M_{Rz}^A)^2} = \sqrt{(1)^2 + (11)^2 + (6)^2} = \sqrt{158} = 12{,}57$$

Cosenos directores:

$$\cos(\alpha_M) = \frac{M_{Rx}^A}{M_R^A} = \frac{1}{\sqrt{158}} = 0{,}080$$

$$\cos(\beta_M) = \frac{M_{Ry}^A}{M_R^A} = \frac{11}{\sqrt{158}} = 0{,}875$$

$$\cos(\gamma_M) = \frac{M_{Rz}^A}{M_R^A} = \frac{6}{\sqrt{158}} = 0{,}477$$

Se cumple además que:

$$\cos^2(\alpha_M) + \cos^2(\beta_M) + \cos^2(\gamma_M) = 1$$

El momento solicitado es:

$$M_R^{A,x} = \breve{i} \times \overline{M}_R^A = (1 \quad 0 \quad 0) \times (1 \quad 11 \quad 6) = 1 \qquad\qquad \boldsymbol{M_R^{A,x} = 1}$$

4. Dado un punto $B = (0 \quad 2 \quad 0)$ perteneciente al eje *y*, se pide calcular el momento del sistema respecto de dicho eje.

$$M_R^{B,y} = \breve{j} \times \overline{M}_R^B$$

$$\overline{M}_{P1}^B = (A_1 - B) \wedge \overline{P}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\bar{i} - 2\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\overline{M}_{P2}^{B} = (A_2 - B) \wedge \overline{P}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 7\bar{j} - 2\bar{k}$$

$$\overline{M}_{R}^{B} = \overline{M}_{P1}^{B} + \overline{M}_{P2}^{B} = (-2-3)\breve{i} + (-2+7)\breve{j} + (0-2)\breve{k}$$

$$\boldsymbol{\overline{M}_{R}^{B} = -5\breve{i} + 5\breve{j} - 2\breve{k}}$$

$$\overline{M}_{R}^{B} = M_{Rx}^{B}\breve{i} + M_{Ry}^{B}\breve{j} + M_{Rz}^{B}\breve{k}$$

$$M_{Rx}^{B} = -5 \qquad M_{Ry}^{B} = 5 \qquad M_{Rz}^{B} = -2$$

$$M_{R}^{B} = \sqrt{(M_{Rx}^{B})^2 + (M_{Ry}^{B})^2 + (M_{Rz}^{B})^2} = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{54} = 7{,}35$$

Cosenos directores:

$$\cos(\alpha_M) = \frac{M_{Rx}^{B}}{M_{R}^{B}} = \frac{-5}{\sqrt{54}} = -0{,}680$$

$$\cos(\beta_M) = \frac{M_{Ry}^{B}}{M_{R}^{B}} = \frac{5}{\sqrt{54}} = 0{,}680$$

$$\cos(\gamma_M) = \frac{M_{Rz}^{B}}{M_{R}^{B}} = \frac{-2}{\sqrt{54}} = -0{,}272$$

Se cumple además que:

$$\cos^2(\alpha_M) + \cos^2(\beta_M) + \cos^2(\gamma_M) = 1$$

El momento solicitado es:

$$M_{R}^{B,y} = \breve{j} \times \overline{M}_{R}^{B} = (0 \quad 1 \quad 0) \times (-5 \quad 5 \quad -2) = 5 \qquad \boldsymbol{M_{R}^{B,y} = 5}$$

5. Dado un punto $C = (0 \quad 0 \quad 2)$ perteneciente al eje *z*, se pide calcular el momento del sistema respecto de dicho eje.

$$M_{R}^{C,z} = \breve{k} \times \overline{M}_{R}^{C}$$

$$\overline{M}_{P1}^{C} = (A_1 - C) \wedge \overline{P}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 0\bar{j} + 2\bar{k}$$

$$\overline{M}_{P2}^{C} = (A_2 - C) \wedge \overline{P}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 13\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$\overline{M}_{R}^{C} = \overline{M}_{P1}^{C} + \overline{M}_{P2}^{C} = (4-3)\breve{i} + (0+13)\breve{j} + (2+4)\breve{k} = 1\breve{i} + 13\breve{j} + 6\breve{k}$$

$$\boldsymbol{\overline{M}_{R}^{C} = 1\breve{i} + 13\breve{j} + 6\breve{k}}$$

$$\overline{M}_{R}^{C} = M_{Rx}^{C}\breve{i} + M_{Ry}^{C}\breve{j} + M_{Rz}^{C}\breve{k}$$

$$M_{Rx}^{C} = 1 \qquad M_{Ry}^{C} = 13 \qquad M_{Rz}^{C} = 6$$

$$M_R^C = \sqrt{(M_{R\,x}^C)^2 + (M_{R\,y}^C)^2 + (M_{R\,z}^C)^2} = \sqrt{(1)^2 + (13)^2 + (6)^2} = \sqrt{206} = 14{,}35$$

Cosenos directores:

$$\cos\left(\alpha_M\right) = \frac{M_{R\,x}^C}{M_R^C} = \frac{1}{\sqrt{206}} = 0{,}070$$

$$\cos\left(\beta_M\right) = \frac{M_{R\,y}^C}{M_R^C} = \frac{13}{\sqrt{206}} = 0{,}906$$

$$\cos\left(\gamma_M\right) = \frac{M_{R\,z}^C}{M_R^C} = \frac{6}{\sqrt{206}} = 0{,}418$$

Se cumple además que:

$$\cos^2\left(\alpha_M\right) + \cos^2\left(\beta_M\right) + \cos^2\left(\gamma_M\right) = 1$$

El momento solicitado es:

$$M_R^{C,z} = \breve{k} \times \overline{M}_R^C = (0 \quad 0 \quad 1) \times (1 \quad 13 \quad 6) = 6$$

$\boldsymbol{M_R^{C,z} = 6}$