

# Geometría de las Masas

El objetivo será encontrar características geométricas de figuras planas, para relacionarlas mas adelante con la secciones de los cuerpos en estudio, para determinar la influencia de la forma de la secciones en la resistencia de los materiales.

Básicamente se verán las siguientes características:

- Momentos estáticos de 1º orden de figuras planas : su objetivo principalmente será encontrar: “Baricentros”.
- Momentos de 2º orden de figuras planas: se conocerán principalmente los momentos de inercia de dichas figuras.

# INTRODUCCIÓN: Conjunto de masas

Masa puntual: Es una magnitud escalar que ocupa un recinto de dimensiones tan pequeñas que puede ser representado por un punto.

Este puede ser **discreto** o **continuo**. En el primer caso son (n) masas de módulos (m). En el segundo caso son infinitas masas de módulos diferenciales.

Para que conforme un sistema se deben tener unidades (de masas) homogéneas.

Normalmente vamos a trabajar con volúmenes, superficies y líneas.

# MOMENTOS ESTÁTICOS DE PRIMER ORDEN

Conjunto discreto de masas

$$A_i(x_i, y_i, z_i)$$

$$m_i$$

$$O(x_o, y_o, z_o)$$

Masa total:

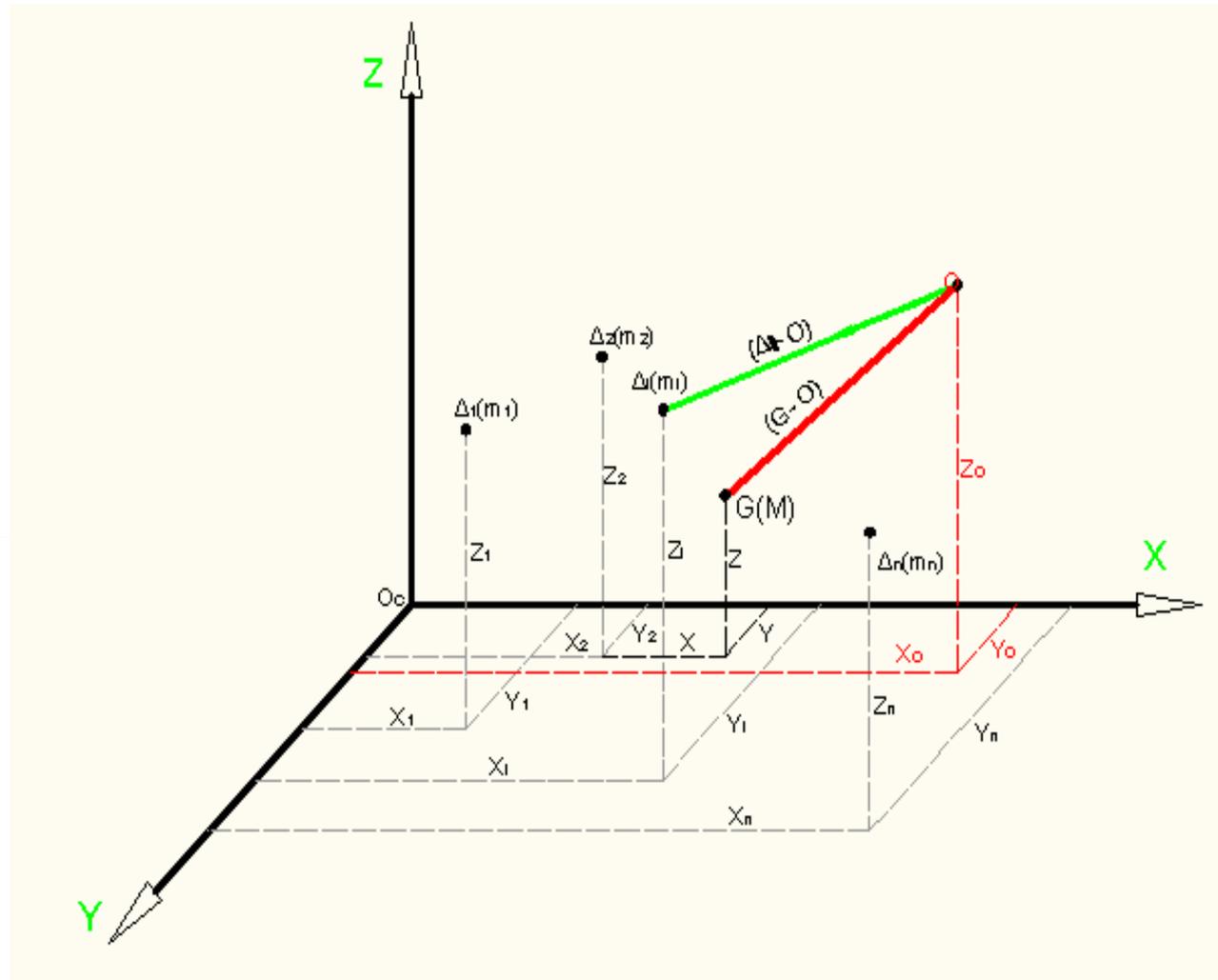
$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

El momento estático  $\bar{S}_i$ , de la masa genérica  $m_i$  respecto de un punto O está dado por :

$$\bar{S}_i^o = (A_i - O).m_i$$

Y el momento estático de todo el sistema respecto de O será:

$$\bar{S}_{Total}^o = \sum_{i=1}^n (A_i - O).m_i$$



- $\overline{(G - O)} = (x_G - x_O)i + (y_G - y_O)j + (z_G - z_O)k$

- $x_G - x_O = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_O).m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$

- $y_G - y_O = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_O).m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$

- $z_G - z_O = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - z_O).m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$

## Masas de módulos diferenciales

### Conjunto continuo de masas:

Siendo la densidad del cuerpo  $\rho$  tal que  $\rho = f(x; y; z)$ :

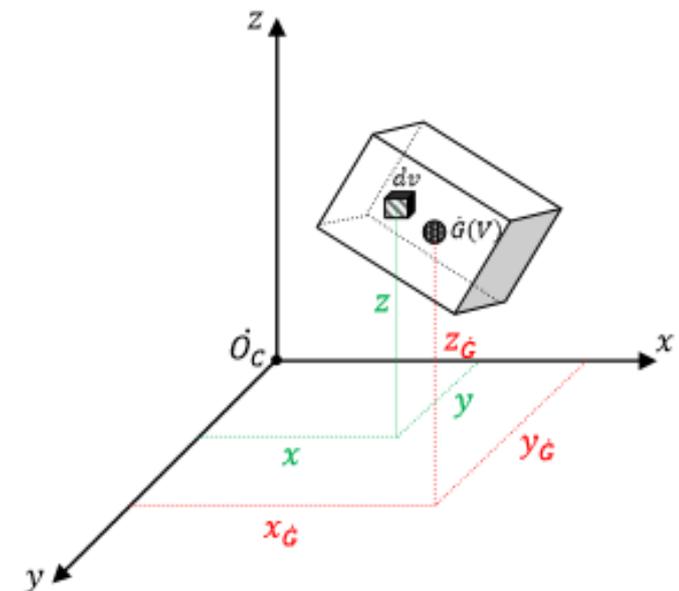
$$dm = \rho \cdot dv$$

**Aclaración:**  $\rho = f(x; y; z)$  significa que la densidad del cuerpo puede variar de acuerdo a la ubicación del elemento de masa ( $dm$ ) dentro del mismo.

En el caso particular en que  $\rho$  es constante, el cuerpo es homogéneo y el centro geométrico (o baricentro) coincide con el centro de masas.

|   |   |   |
|---|---|---|
| $x_G = \frac{\int x \cdot dv}{\int dv}$ | $y_G = \frac{\int y \cdot dv}{\int dv}$ | $z_G = \frac{\int z \cdot dv}{\int dv}$ |
|---|---|---|

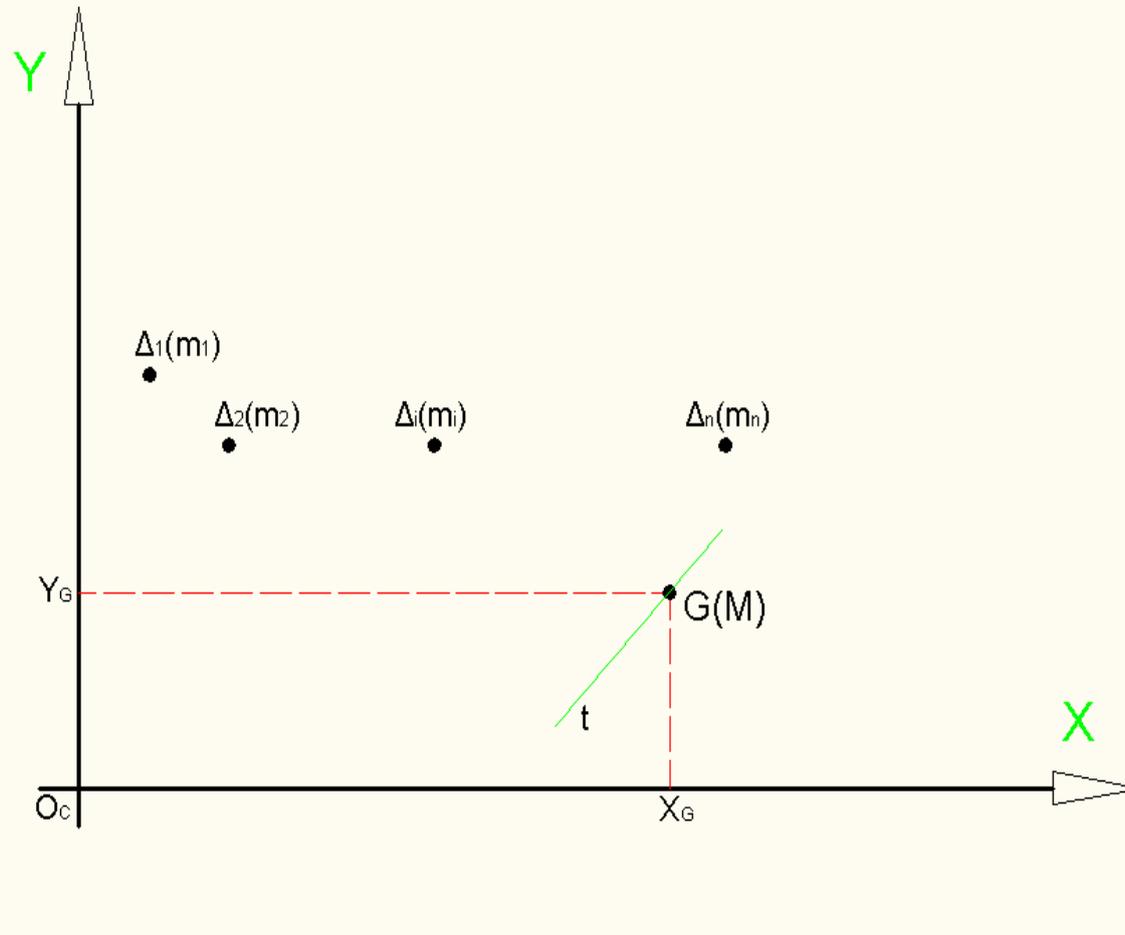
Como puede verse, la dificultad en encontrar el baricentro de la figura, o el centro de masas del cuerpo reside simplemente en el problema matemático que supone **definir los límites de integración**



# En el caso de los sistemas coplanares:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$



Nota: el momento estático de un sistema de masas respecto de cualquier eje que pasa por el baricentro es igual a cero

$$\bar{S}_t = 0$$

## Centro de masas (3D) - Baricentro (2D)

Es un punto donde se puede considerar concentrada la masa total del sistema de masas puntuales (3D) - o el área total del sistema (2D)

Para calcular el centro de masa (CM):

$$(G - O)M = \sum_{i=1}^n (A_i - O).m_i$$

Y para el (CM) de un continuo...?:

## Centro de gravedad (3D)

Si consideramos los pesos de cada una de las masas elementales (que integran un continuo de masas), tendremos un sistema de fuerzas paralelas. La resultante de dicho sistema (que es el peso del cuerpo) pasará por el centro de gravedad.

$$dp = g.dm$$

$$z_G = \frac{\int z.dp}{\int dp}$$

$$x_G = \frac{\int x.dp}{\int dp}$$

$$y_G = \frac{\int y.dp}{\int dp}$$

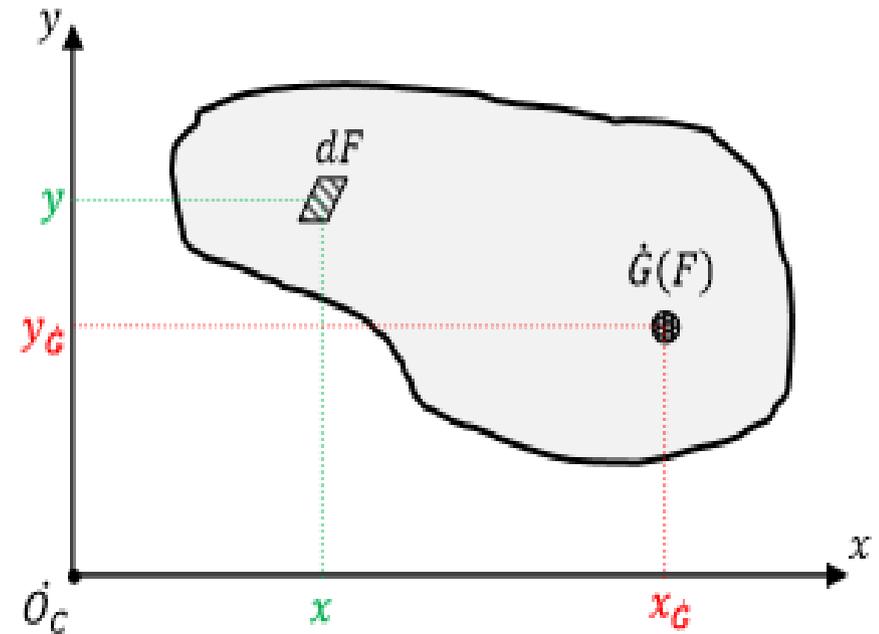
# Baricentros de superficies

Si consideramos una superficie en el plano  $x y$ : el concepto es aplicable, por ejemplo, a una chapa plana de espesor y densidad constantes.

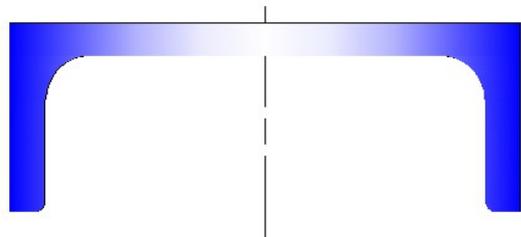
(será asimilable a áreas o superficies)

$$x_G = \frac{\int x \cdot dF}{\int dF} \quad y_G = \frac{\int y \cdot dF}{\int dF}$$

La integral de  $x \cdot dF$  y la integral de  $y \cdot dF$  definen, cada una, el momento estático de la sección respecto al eje desde el que se mide la distancia..



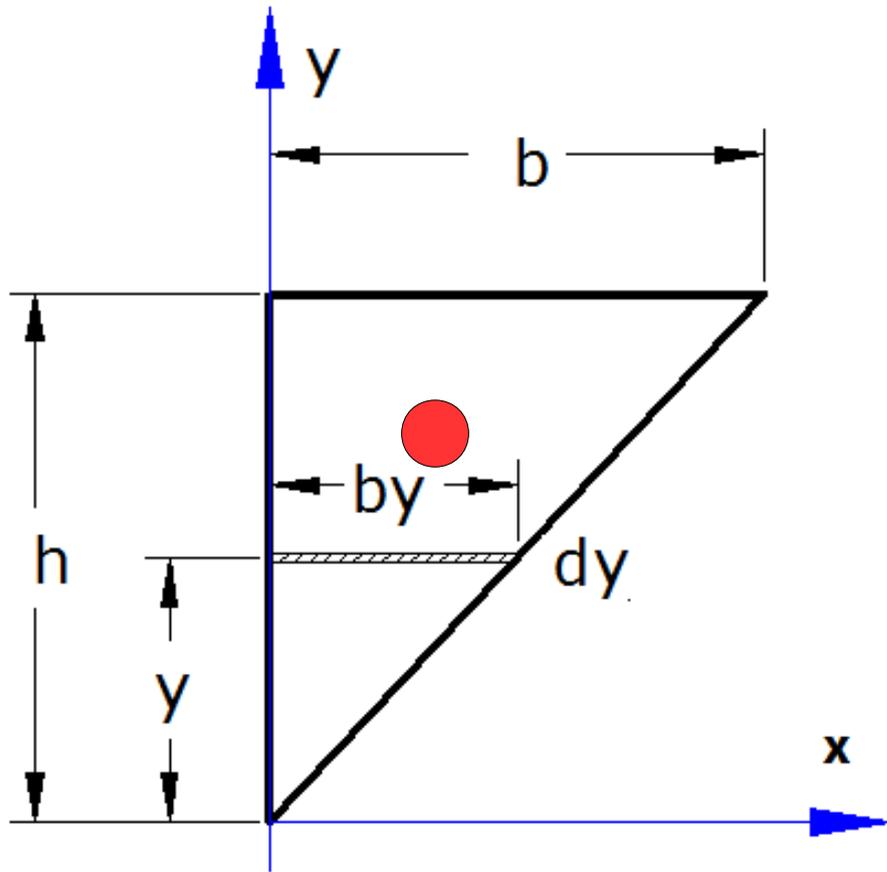
El momento estático de una figura plana respecto de un eje que pasa por el baricentro es **nulo**.



Cuando una figura plana posee un eje de simetría, su baricentro pertenece a ese eje.

# Ejemplo 1

## Baricentro de la superficie de un triángulo



$$y_G = \frac{\int y \cdot dF}{F} = \frac{\int_0^h y \cdot dy \cdot b_y}{F}$$

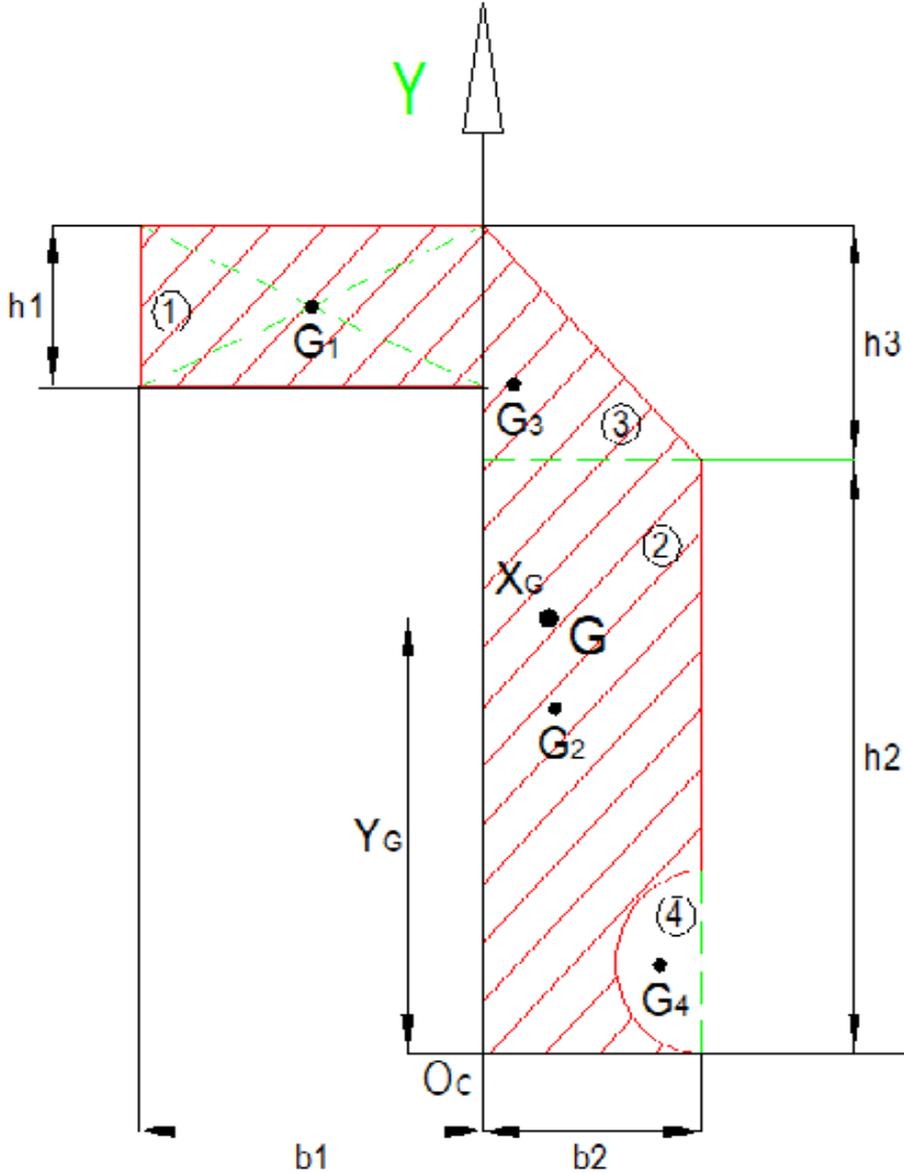
$$b_y = y \cdot \frac{b}{h}$$

$$y_G = \frac{\int_0^h y \cdot y \cdot \frac{b}{h} \cdot dy}{F} = \frac{\frac{b}{h} \cdot \frac{h^3}{3}}{b \cdot h / 2}$$

$$y_G = \frac{2}{3} \cdot h$$

# Cálculo del baricentro de una figura de contorno regular

Se parte de un conjunto **continuo** de área (área total) a otro conjunto equivalente y **discreto** de áreas ( $n$  áreas regulares).



$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

# Momentos de 2do Orden

Momento de 2do orden de una superficie plana "F" respecto de 2 ejes (en este caso x;y).

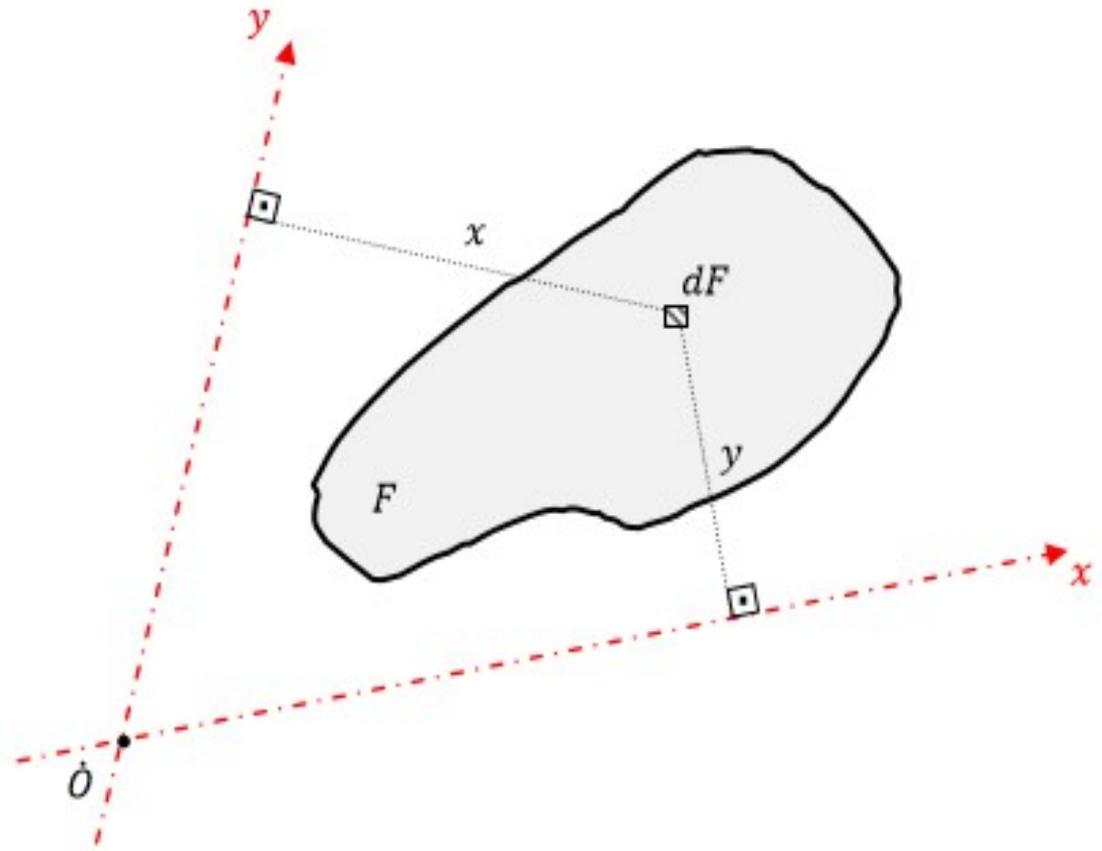
Se denomina **momento centrífugo** Y su notación será

$$J_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF$$

El momento de un  $dF$  respecto de x e y será:

$$dJ_{xy} = x \cdot y \cdot dF$$

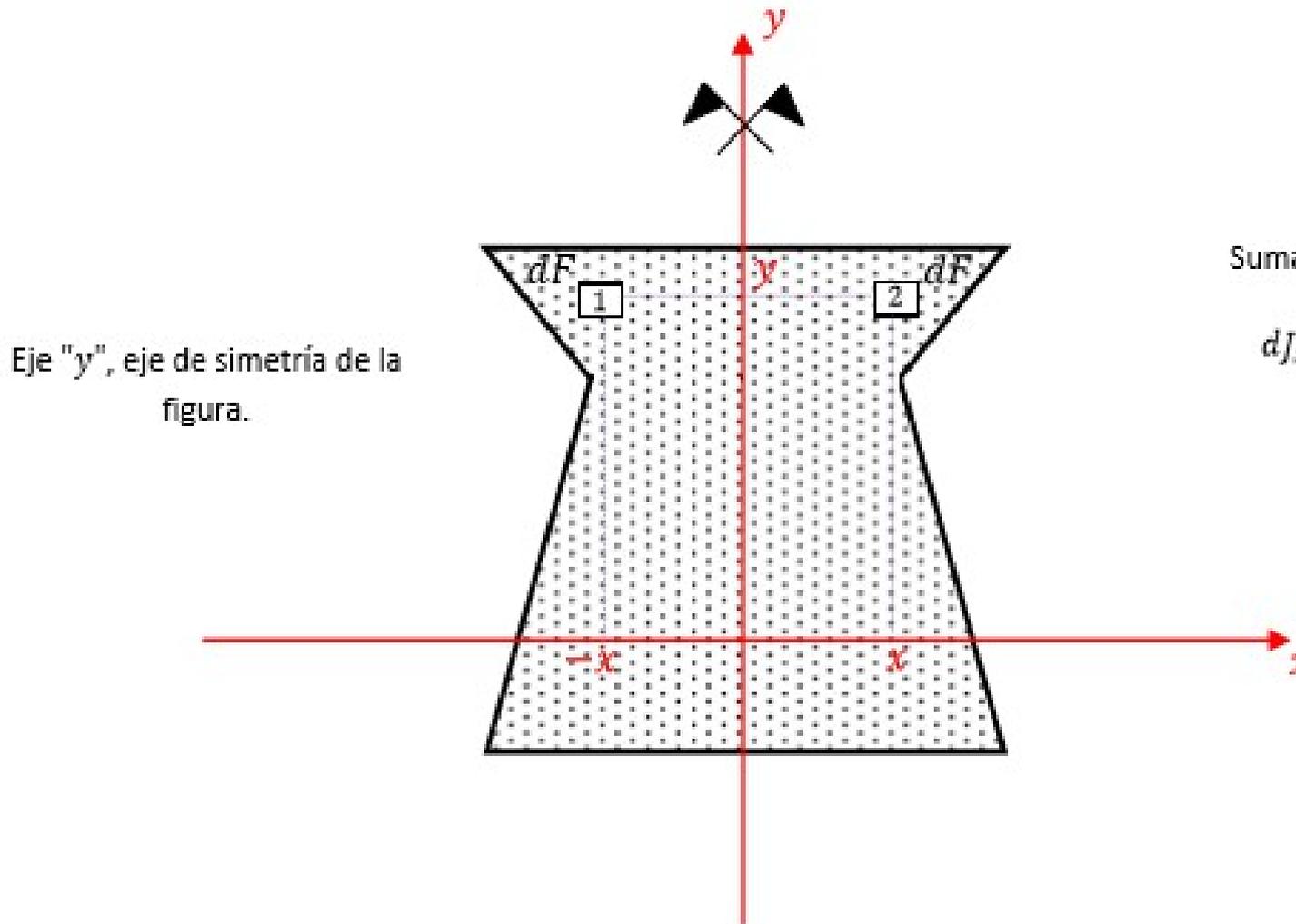
$$J_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF$$



$$[J_{xy}] = Long.^4$$

# Momento centrífugos

**Observación:** En el caso particular de que uno de los ejes coordenados sea un eje de simetría de la sección, se observa lo siguiente:



Eje "y", eje de simetría de la figura.

$$dJ_{xy_1} = -x \cdot y \cdot dF$$

$$dJ_{xy_2} = x \cdot y \cdot dF$$

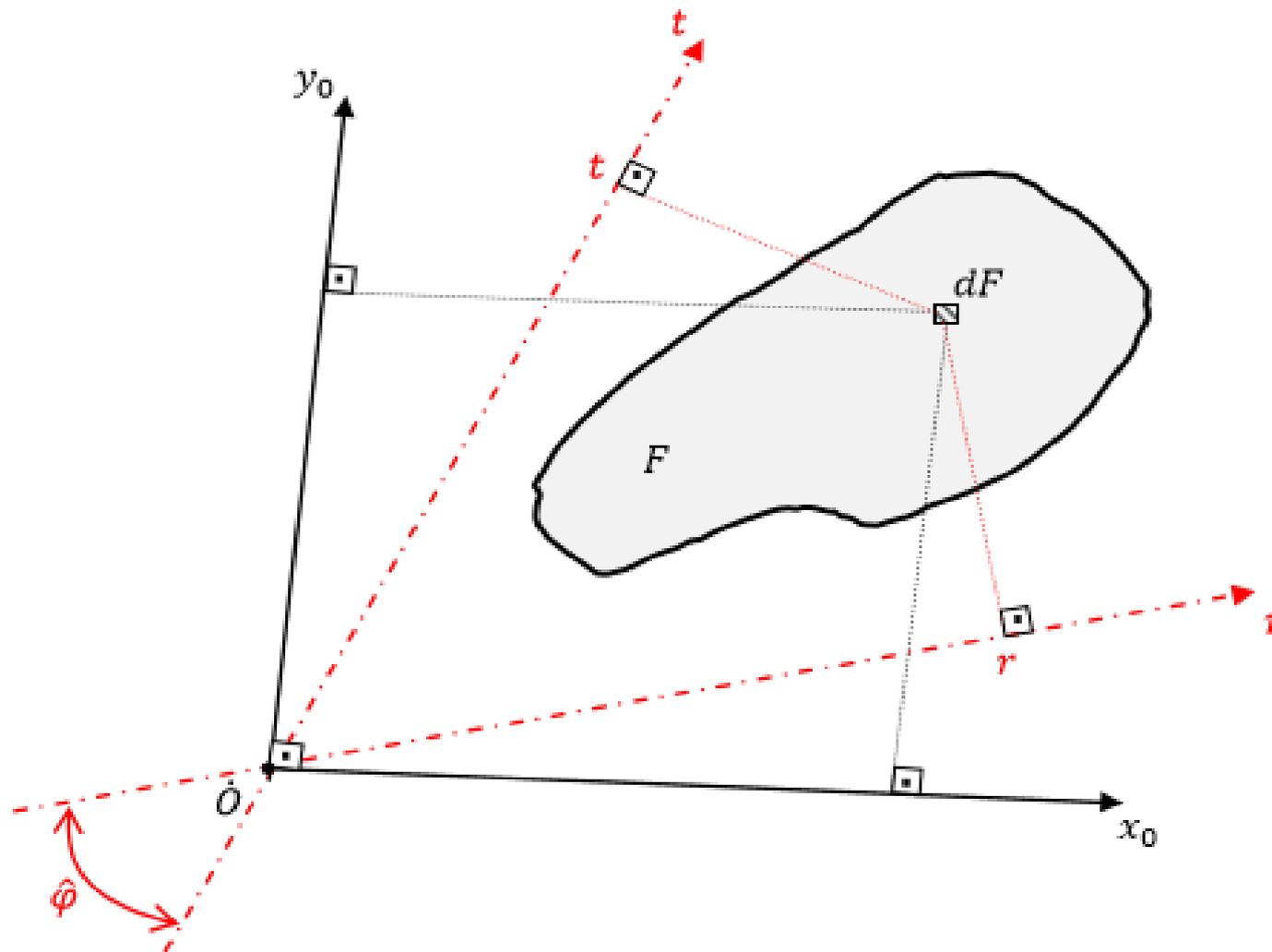
Sumando miembro a miembro:

$$dJ_{xy_1} + dJ_{xy_2} = dJ_{xy} = 0$$

Integrando:

$$J_{xy} = \int_F dJ_{xy} = 0$$

# Ejes conjugados de inercia



Condiciones de ejes  
conjugados de inercia

$$J_{rt} = 0$$

**Observación:** Para un punto cualquiera ( $\dot{O}$ ), contenido en el plano de la figura, existen infinitos pares de ejes que pasen por dicho punto y que cumplan con la condición de que  $J_{rt} = 0$ . Dichos ejes se denominan ejes conjugados de inercia de la sección.

# Momentos de inercia

Momento de inercia del área  
"F" respecto del eje  $x$

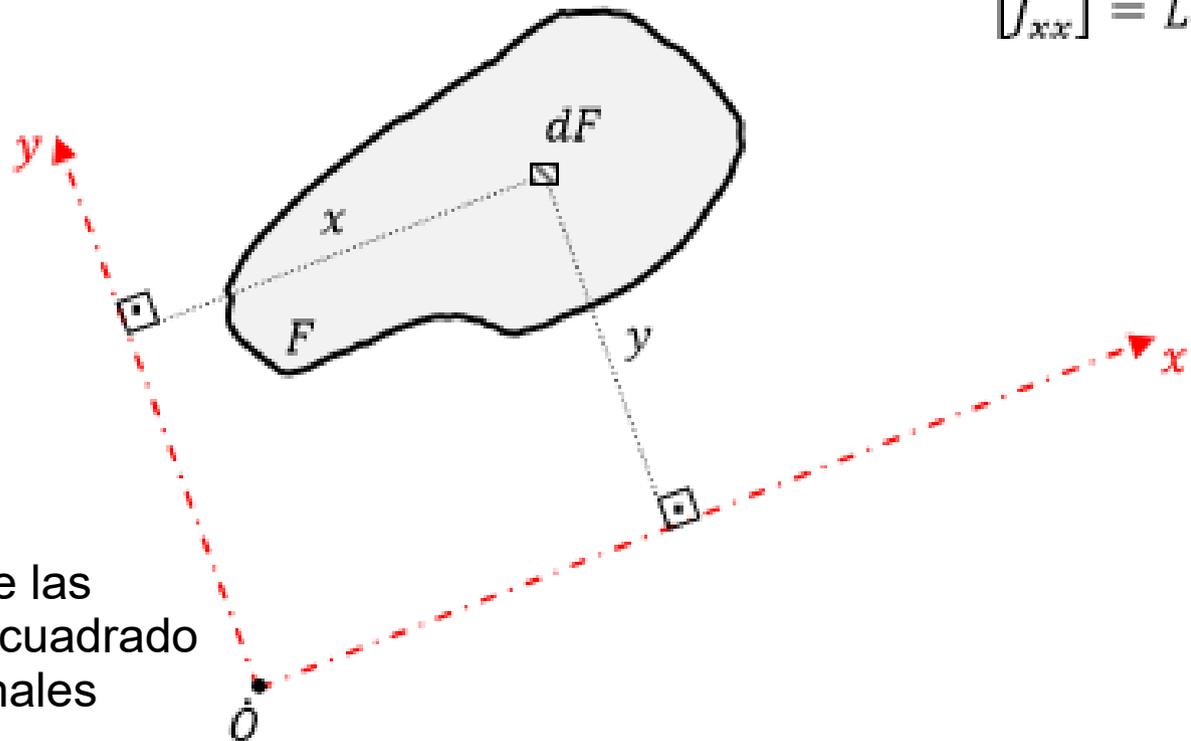
$$dJ_{xx} = y^2 \cdot dF$$

$$J_{xx} = \int_F y^2 \cdot dF$$

$$[J_{xx}] = \text{Long.}^4$$

Para un eje  $y$  será,  
análogamente:

$$J_{yy} = \int_F x^2 \cdot dF$$



NOTAS:

- Siempre serán positivos, ya que las coordenadas están elevadas al cuadrado
- Los ejes pueden no ser ortogonales

# Resumiendo....

## Momentos de 2do orden de superficies planas

Momentos de inercia

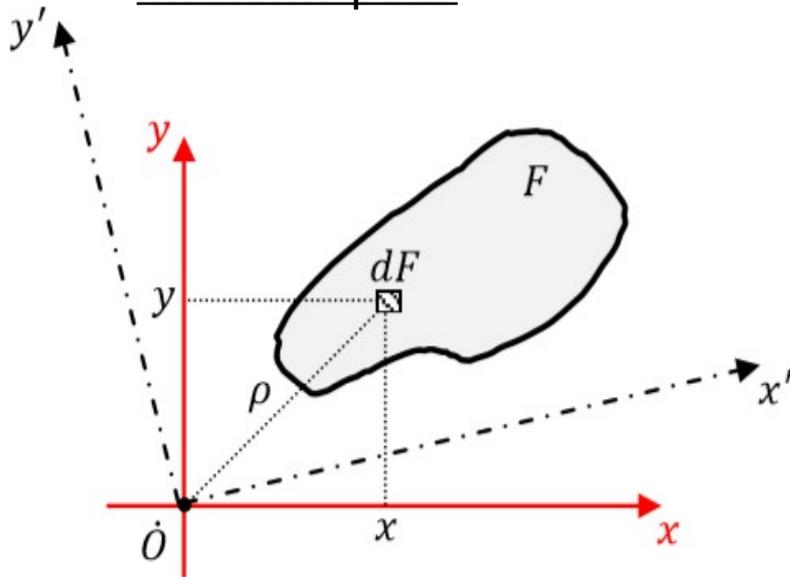
$$J_{xx} = \int_F y^2 \cdot dF$$

$$J_{yy} = \int_F x^2 \cdot dF$$

Momento centrífugo

$$J_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF$$

Momento polar



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$J_O = \int_F \rho^2 \cdot dF$$

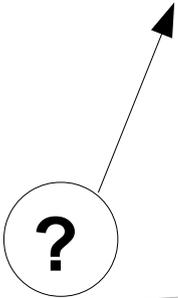
$$J_O = \int_F (x^2 + y^2) \cdot dF$$

$$J_O = \int_F x^2 \cdot dF + \int_F y^2 \cdot dF$$

$$J_O = J_{yy} + J_{xx}$$

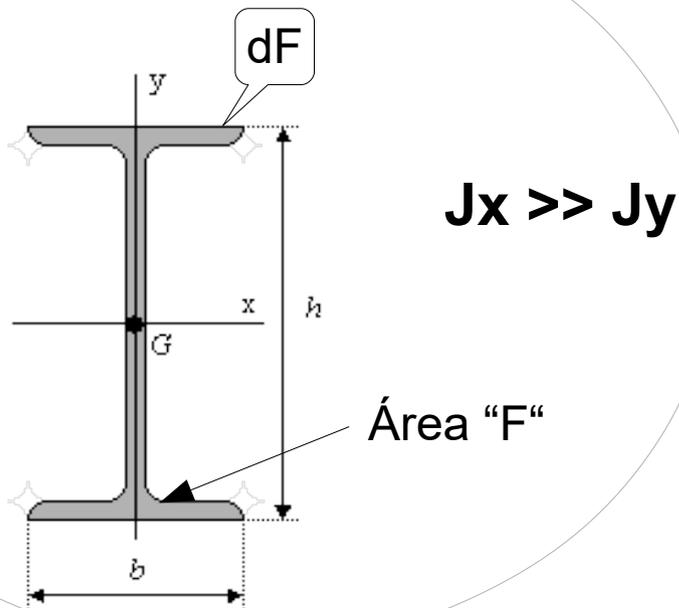
# Momentos de 2do orden de superficies planas

Momentos de *inercia*



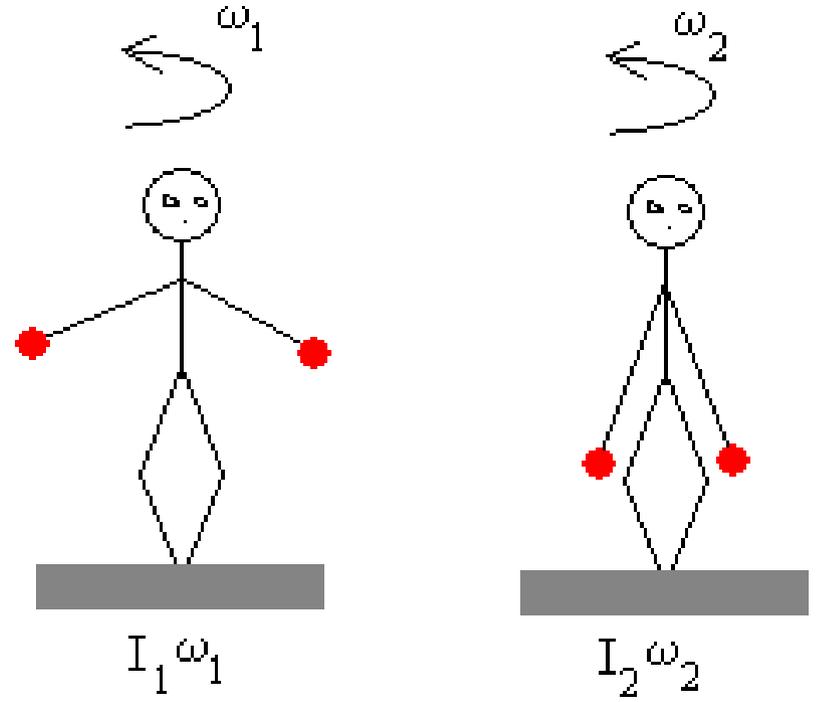
$$J_{xx} = \int_F y^2 \cdot dF$$

$$J_{yy} = \int_F x^2 \cdot dF$$



Conservación del momento angular:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

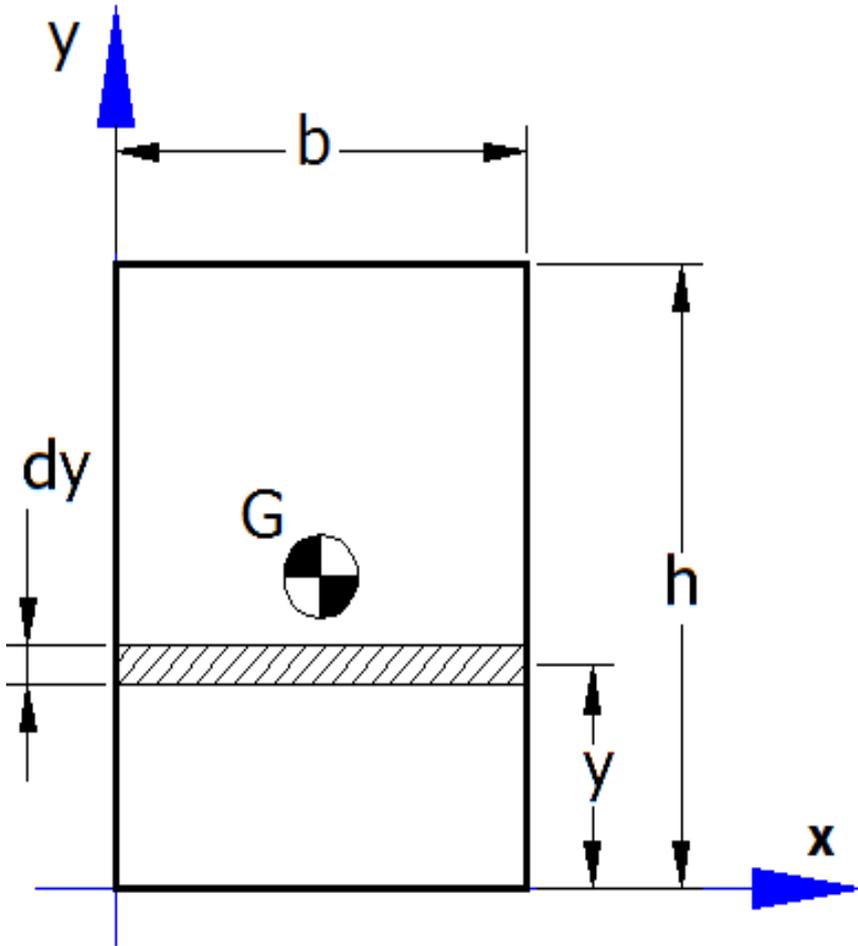


Nomenclatura:

$$I_x = J_x = I_{xx} = J_{xx}$$

# Ejemplo 2

**Determinar el momento de inercia respecto del eje x de la siguiente figura**



$$J_x = \int y^2 dF = \int_0^h y^2 b dy$$
$$J_x = \frac{by^3}{3} \Big|_0^h = \frac{b[(h)^3 - 0]}{3}$$

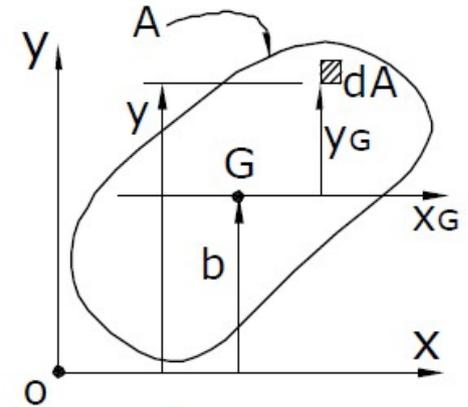
$$J_x = \frac{bh^3}{3}$$

# TEOREMA DE STEINER (o *transposición paralela*)

Relaciona los momentos de inercia entre ejes paralelos, cuando uno de ellos contiene al baricentro de la figura.

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_A (b + y_G)^2 \cdot dA = \int_A b^2 \cdot dA + \int_A 2 \cdot b \cdot y_G \cdot dA + \int_A y_G^2 \cdot dA$$

$$I_x = b^2 \int_A dA + 2 \cdot b \cdot \int_A y_G \cdot dA + \int_A y_G^2 \cdot dA = b^2 \cdot A + 2 \cdot b \cdot 0 + I_{x_G}$$



El momento de inercia  $I_x$  de una superficie de área  $A$  con respecto a un eje "X" cualquiera es igual a la suma del momento de inercia baricéntrico de la figura respecto de un eje paralelo al dado y separado una distancia "b" uno del otro más el producto del cuadrado de la distancia "b" con el área de  $A$ .

$$y = b + y_G$$

$$I_x = \int y^2 \cdot dA$$

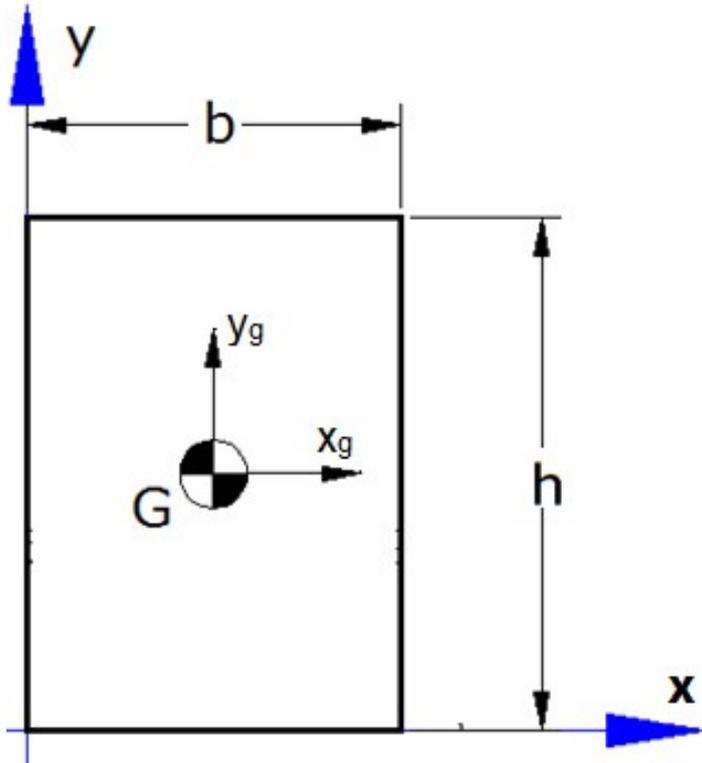
$$\boxed{I_x = I_{x_G} + A \cdot b^2} \quad \boxed{I_y = I_{y_G} + A \cdot a^2}$$

## TEOREMA DE STEINER PARA EL MOMENTO CENTRÍFUGO:

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA \quad \begin{matrix} y = b + y_G \\ x = a + x_G \end{matrix} \quad \boxed{I_{xy} = I_{x_G y_G} + a \cdot b \cdot A}$$

# Ejemplo 3

Determinar el momento de inercia respecto de un eje baricéntrico paralelo al eje  $x$  considerando el resultado obtenido en la resolución del ejemplo 2, siendo  $b$  la base del rectángulo y  $h$  la altura del mismo



De acuerdo al teorema de Steiner:

$$J_x = J_{xg} + F \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$J_{xg} = J_x - F \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} - b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$J_{xG} = \frac{bh^3}{12}$$

# Fórmulas de transposición angular:

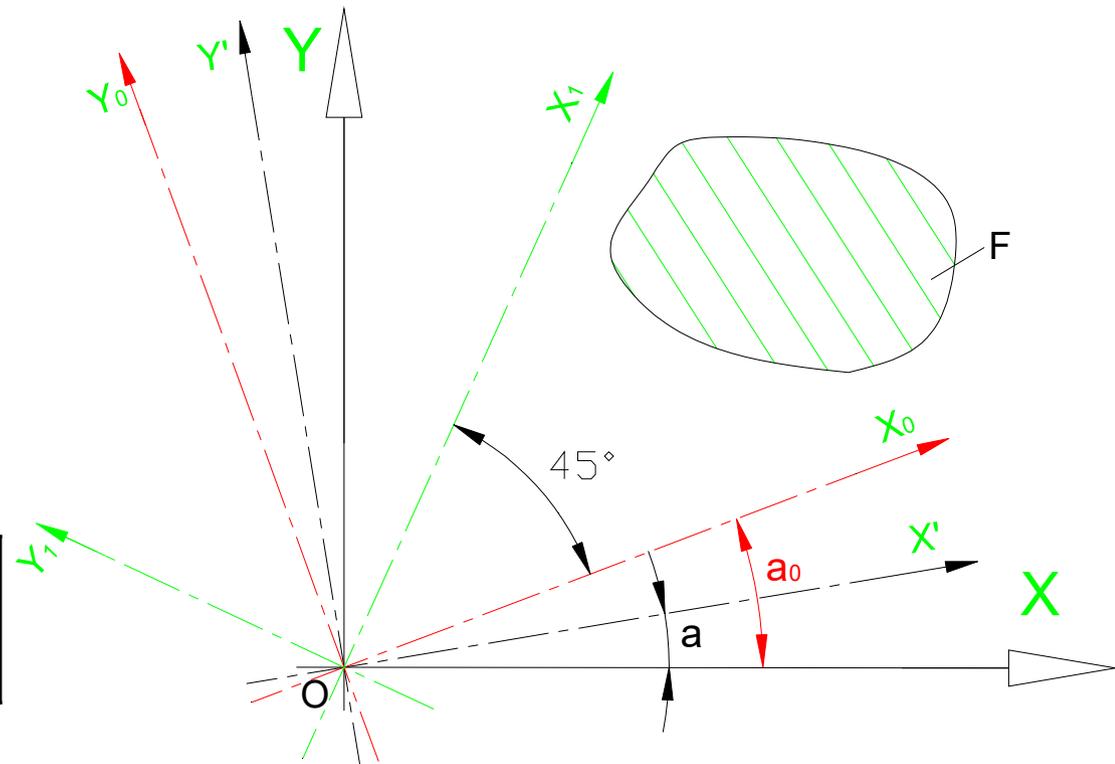
*Datos:*      *Incógnitas:*

|          |            |
|----------|------------|
| $J_x$    | $J_{x'}$   |
| $J_y$    | $J_{y'}$   |
| $J_{xy}$ | $J_{x'y'}$ |
| $\alpha$ |            |

$$J_{x'y'} = \frac{J_x - J_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$J_{x'} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \operatorname{sen}^2 \alpha - J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (1)$$

$$J_{y'} = J_y \cos^2 \alpha + J_x \operatorname{sen}^2 \alpha + J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (2)$$



# Cálculo de los ejes principales de inercia y $J_{máx}$ y $J_{mín}$

Estos ejes deben cumplir la siguiente condición:

$$J_{x_0y_0} = 0 \rightarrow \text{Ejes conjugados de inercia} \quad J_{máx} = J_I$$

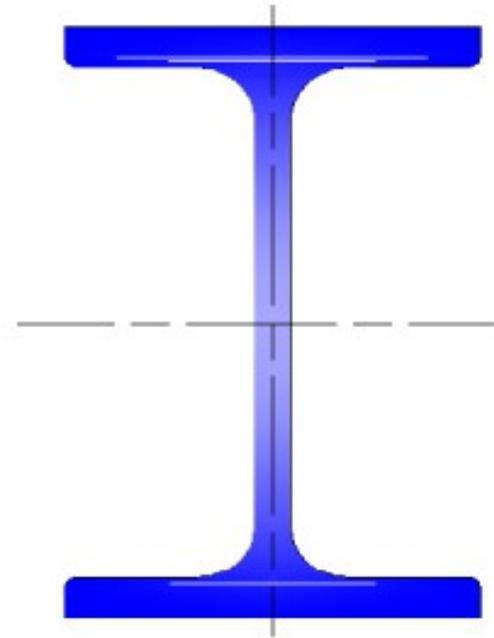
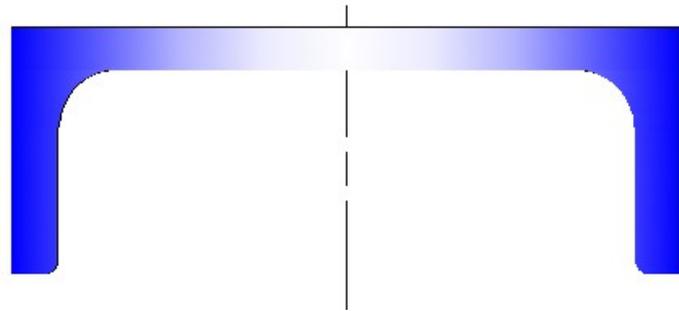
$$\varphi = 90^\circ \rightarrow \text{Ortogonales} \quad J_{mín} = J_{II}$$

$$\left| \frac{dJ_{x'}}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \rightarrow \boxed{tg 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}}$$

Reemplazando el valor de  $\alpha$  en la ecuación (1) y (2) obtenemos  $J_{máx}$  y  $J_{mín}$

$$\boxed{J_{I,II} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}}$$

# Momentos Principales de inercia



Si una figura admite eje de simetría, éste es a la vez eje principal de inercia, pues si determinamos el momento centrífugo respecto a un par de ejes ortogonales con uno coincidente con el eje de simetría, el momento centrífugo será nulo.

# Módulo Resistente

## Concepto

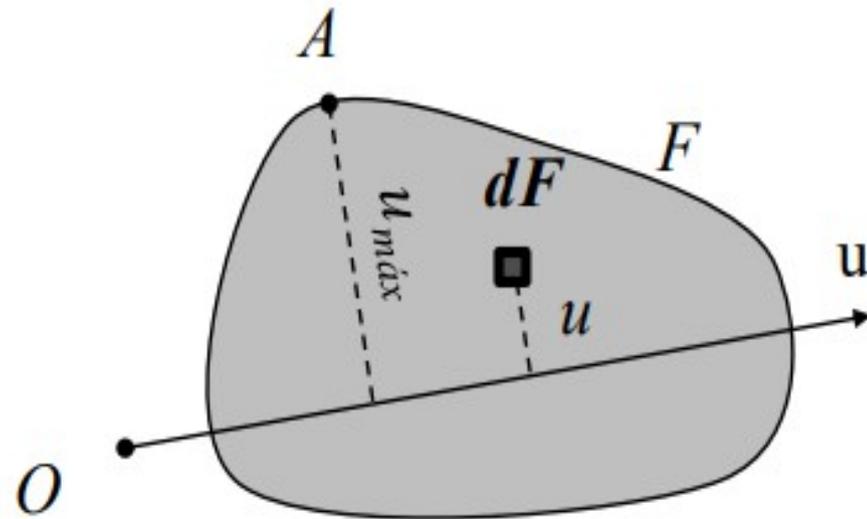
Considérese ahora una figura y un cierto eje  $u$ . Llámese  $u_{\max}$  la distancia desde el eje  $u$  hasta el punto más alejado dentro de la figura,  $A$ .

Se define como módulo resistente ó módulo resistente elástico axial  $W_u$  (ó  $S_u$ ) de la figura con respecto al eje  $u$ :

$$W_u = \frac{J_u}{u_{\max}}$$

Siendo

$$J_u = \iint_F u^2 dF$$



Veremos más adelante, en Resistencia de materiales, la importancia del módulo resistente  $W_u$  de una figura con respecto a un eje  $u$ . Las distancias extremas ( $u_{\max}$ ) de los puntos de cualquier figura sometida a Flexión, respecto a un eje en particular (eje neutro de la sollicitación x flexión), serán las más tensionadas y determinantes para el dimensionamiento.

# Radio de giro

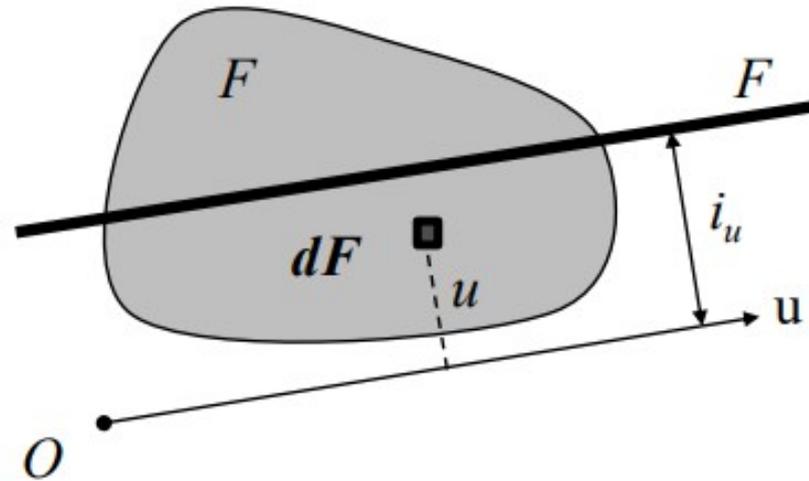
## Concepto

Se define como Radio de Giro Axial  $i_u$  de la figura con respecto al eje "u" :

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}$$

Siendo

$$J_u = \iint_F u^2 dF$$



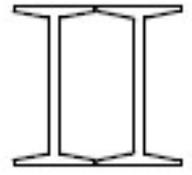
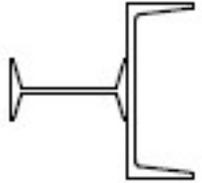
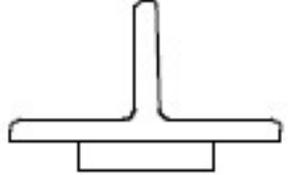
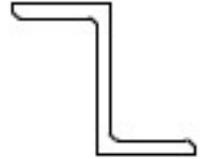
Obsérvese que un fleje de misma área  $F$  paralelo al eje  $u$ , a una distancia  $i_u$ , posee el mismo momento de inercia axial:

$$J_u = \iint_F i_u^2 dF = i_u^2 \iint_F dF = i_u^2 F$$

De donde

$$i_u^2 = \frac{J_u}{F}$$

# RESUMEN

| CÁLCULOS<br>A<br>REALIZAR   | FORMAS  |   |  |   |   |
|---|---|---|--|---|---|
|   | DOBLE<br>SIMETRÍA   | SIMPLE SIMETRÍA   |  | SIMETRÍA<br>CENTRAL   | SIN SIMETRÍA  |
|  |  |  |  |    |  |
| POSICION<br>DEL<br>CENTROIDE:<br>$x_G$ $y_G$                                      | No se<br>calcula  | Se calcula sólo<br>1 coordenada   |  | No se calcula.  | Se calculan<br>2 coordenadas  |
|   |   | $x_G$   | $y_G$  |   |   |
| Momentos de<br>2º<br>Orden:<br>$I_x$ $I_y$ $I_{xy}$                               | Se calculan sólo: $I_x$ , $I_y$<br>ya que $I_{xy}=0$                              |   |  | Se calcula:<br>$I_x$ $I_y$ $I_{xy}$   |   |
| Momentos<br>Principales:<br>$I_{máx}$ $I_{mín}$                                   | Son $I_x$ e $I_y$<br>calculados previamente                                       |   |  | $I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}$ $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$ |   |

# SECCIONES REGULARES CONOCIDAS DE USO FRECUENTE

Notación:

$\bar{x}, \bar{y}$  = coordenadas del centroide,  $C$ .

$A$  = área.

$I_x, I_y$  = momentos de inercia con respecto a los ejes  $x, y$ .

$I_{xy}$  = producto de inercia con respecto a los ejes  $x, y$ .

$J = I_x + I_y$  = momento polar de inercia.

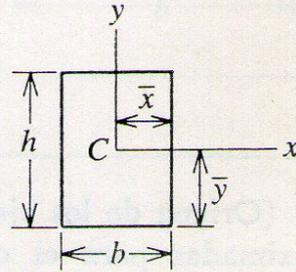
$I_{BB}$  = momento de inercia con respecto al eje  $B-B$ .

$$I_x = I_{x_G} + A \cdot b^2$$

$$I_y = I_{y_G} + A \cdot a^2$$

$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + a \cdot b \cdot A$$

1.



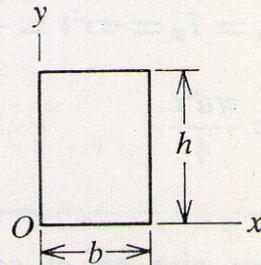
**Rectángulo.** (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = bh \quad \bar{x} = \frac{b}{2} \quad \bar{y} = \frac{h}{2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2)$$

2.

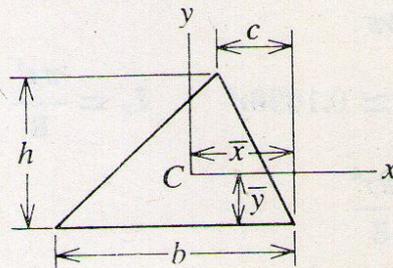


**Rectángulo.** (Origen de los ejes en un vértice.)

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \quad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4} \quad J = \frac{bh}{3} (h^2 + b^2)$$

3.



**Triángulo.** (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = \frac{bh}{2} \quad \bar{x} = \frac{b+c}{3} \quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_y = \frac{bh}{36} (b^2 - bc + c^2)$$

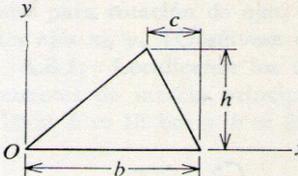
$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72} (b - 2c) \quad J = \frac{bh}{36} (h^2 + b^2 - bc + c^2)$$

**SECCIONES  
REGULARES  
CONOCIDAS DE  
USO FRECUENTE**

$$I_x = I_{x_G} + A \cdot b^2$$

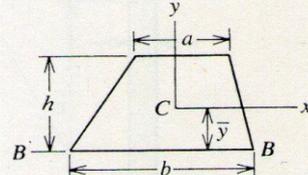
$$I_y = I_{y_G} + A \cdot a^2$$

$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + a \cdot b \cdot A$$

4.  **Triángulo.** (Origen de los ejes en un vértice.)

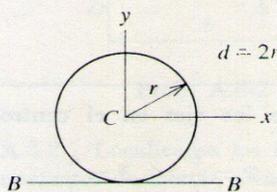
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{bh}{12} (3b^2 - 3bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24} (3b - 2c) \quad J = \frac{bh}{12} (h^2 + 3b^2 - 3bc + c^2)$$

5.  **Trapezio.** (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = \frac{h(a+b)}{2} \quad \bar{y} = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

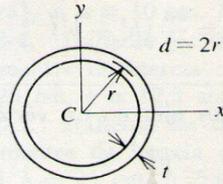
$$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} \quad I_{BB} = \frac{h^3(3a+b)}{12}$$

6.  **Círculo.** (Origen de los ejes en el centro.)

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \quad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

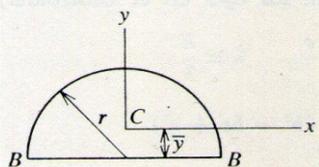
$$I_{xy} = 0 \quad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$

7.  **Corona (o anillo) circular.** (Origen de los ejes en el centro.) Fórmulas aproximadas para el caso en que t es pequeño.

$$A = 2\pi r t = \pi d t \quad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$$

8.  **Semicírculo.** (Origen de los ejes en el centroide.)

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0.1098r^4 \quad I_y = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \quad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$

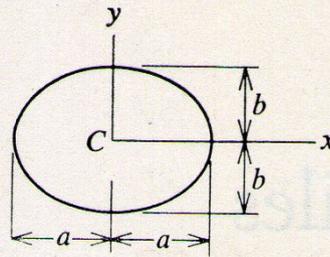
**SECCIONES  
REGULARES  
CONOCIDAS DE  
USO FRECUENTE**

$$I_x = I_{x_G} + A \cdot b^2$$

$$I_y = I_{y_G} + A \cdot a^2$$

$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + a \cdot b \cdot A$$

9.

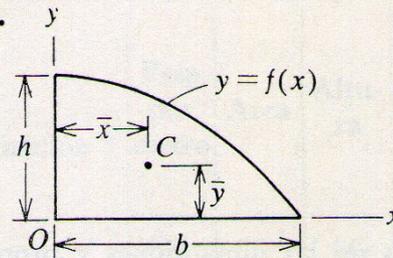


Superficie elíptica. (Origen de los ejes en el centro.)

$$A = \pi ab \quad I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \quad I_y = \frac{\pi ba^3}{4}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = \frac{\pi ab}{4} (b^2 + a^2)$$

10.

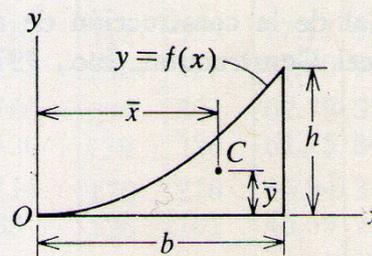


Superficie parabólica.

$$y = f(x) = h \left( 1 - \frac{x^2}{b^2} \right)$$

$$A = \frac{2bh}{3} \quad \bar{x} = \frac{3b}{8} \quad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

11.



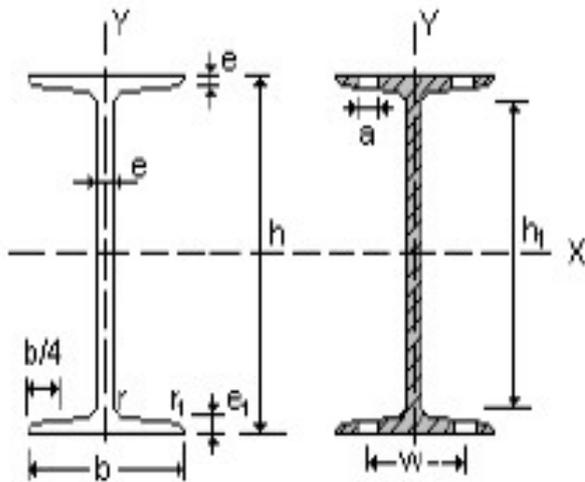
Embecadura (o enjuta) parabólica. (Origen de los ejes en un vértice.)

$$y = f(x) = \frac{hx^2}{b^2}$$

$$A = \frac{bh}{3} \quad \bar{x} = \frac{3b}{4} \quad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

## SECCIONES REGULARES CONOCIDAS DE USO FRECUENTE

**Tabla 2.A1.1.- Perfiles IPN**



$A$  = Area de la sección

$S_x$  = Momento estático de media sección, respecto a X.

$I_x$  = Momento de inercia de la sección, respecto a X.

$W_x = 2I_x : h$ . Módulo resistente de la sección, respecto a X.

$i_x = (I_x : A)^{1/2}$ . Radio de giro de la sección, respecto a X.

$I_y$  = Momento de inercia de la sección, respecto a Y.

$W_y = 2I_y : b$ . Módulo resistente de la sección, respecto a Y.

$i_y = (I_y : A)^{1/2}$ . Radio de giro de la sección, respecto a Y

$I_t$  = Módulo de torsión de la sección.

$I_a$  = Módulo de alabeo de la sección.

$u$  = Perímetro de la sección.  
 $a$  = Diámetro del agujero del roblón normal.

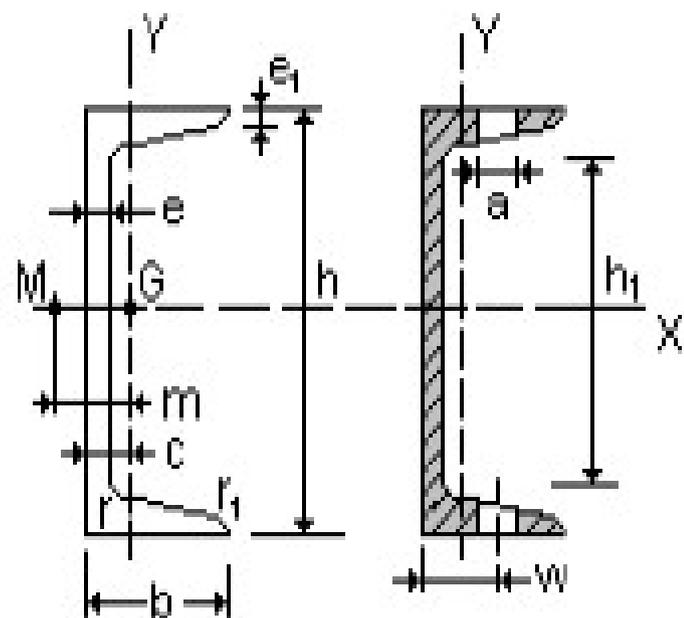
$w$  = Gramil, distancia entre ejes de agujeros.

$h_1$  = Altura de la parte plana del alma.

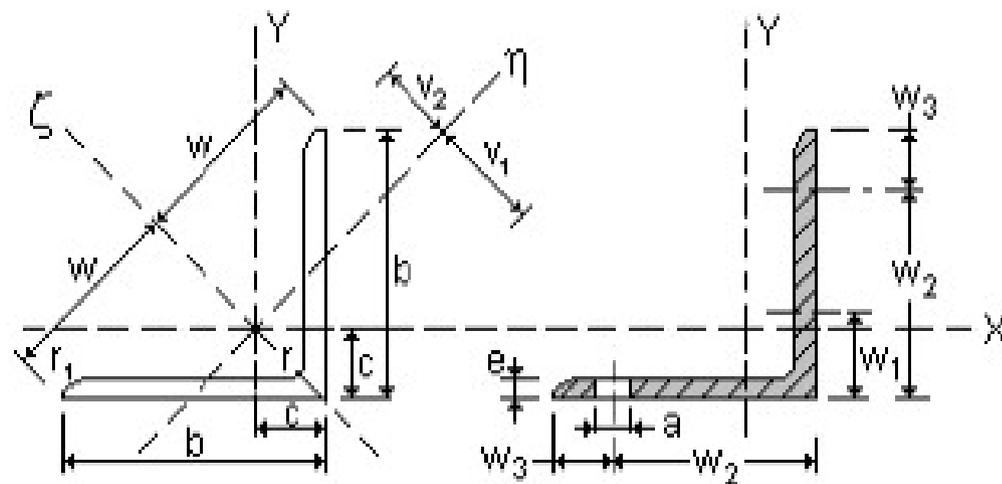
$e_2$  = Espesor del ala en el eje del agujero.

$p$  = Peso por metro.

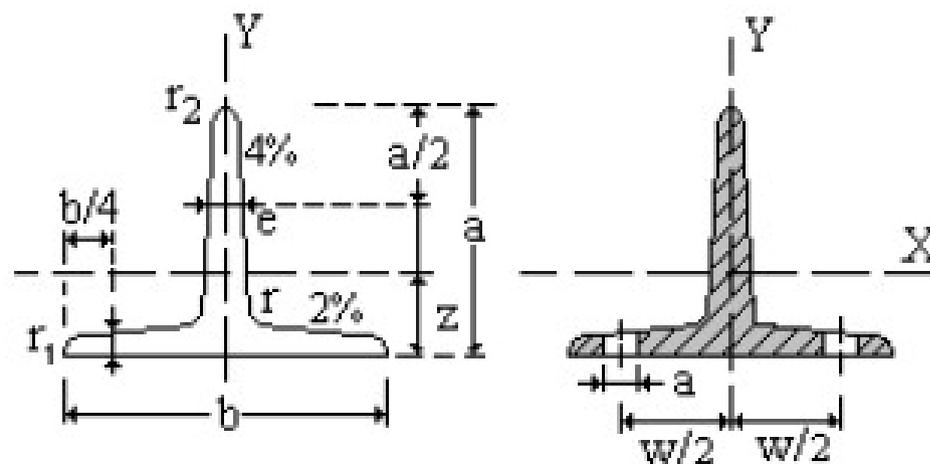
**Tabla 2.A1.4.- Perfiles UPN**



**Tabla 2.A1.5.- Perfiles L**



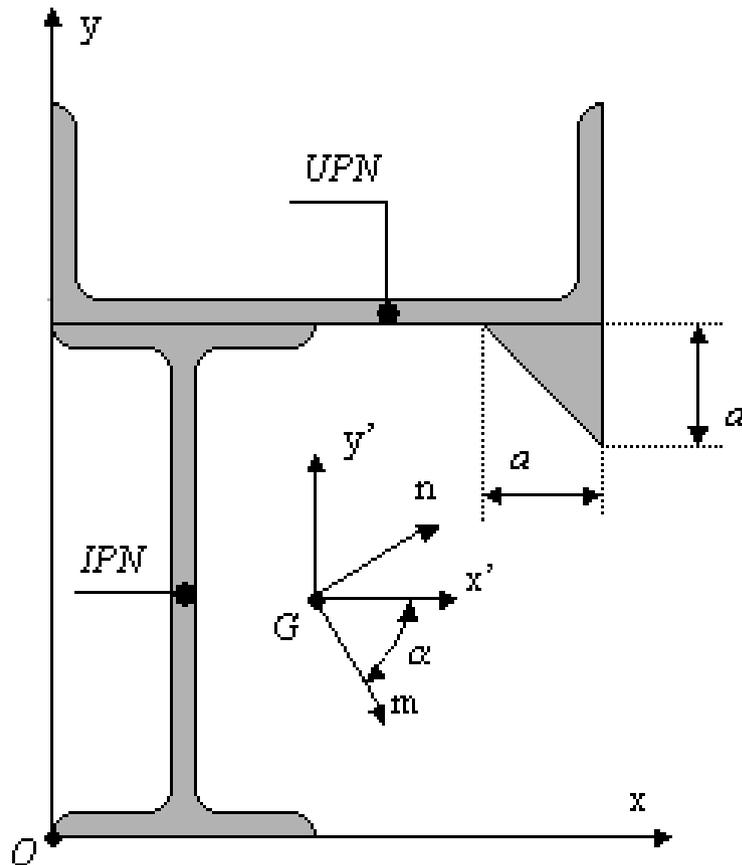
**Tabla 2.A1.7.- Perfiles T**



# Ejercicio ejemplo

Dada la sección de una columna como la que se indica, y cuyos datos están tabulados:

| IPN | UPN | a<br>cm | $\alpha$<br>° |
|-----|-----|---------|---------------|
| 300 | 260 | 8       | 55            |



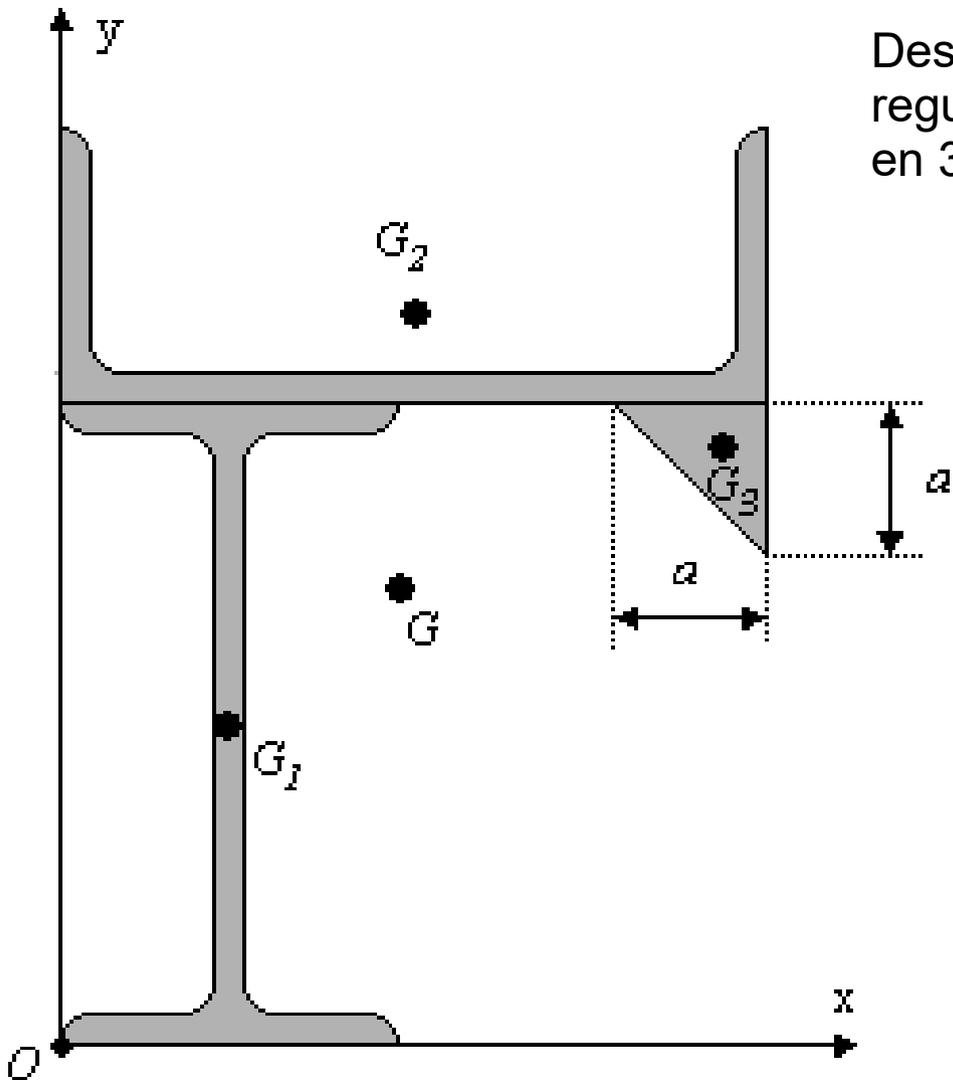
**Se solicita:**

- 1) Hallar la posición del baricentro
- 2) Determinar analíticamente los momentos de segundo orden respecto del par de ejes no baricéntricos  $x$  e  $y$  pasantes por  $O$ .
- 3) Aplicando el teorema de Steiner, y a partir de los valores calculados en (1) y (2), calcular los momentos de segundo orden, respecto del par de ejes baricéntricos ortogonales  $x'$  e  $y'$ , paralelos a  $x$  e  $y$ , respectivamente.

- 4) Determinar la posición de los ejes principales de inercia de la figura dada y los valores de los respectivos momentos de segundo orden analíticamente.
- 5) Determinar el valor de los momentos de inercia y centrífugo respecto del par de ejes ortogonales  $m$  y  $n$  en forma analítica.
- 6) Hallar la posición del eje  $u$ , conjugado al eje  $m$  y su respectivo momento de inercia  $I_u$  en forma analítica.

## Hallar el baricentro

Aplicamos las fórmulas de Momento Estático de 1er orden de superficies planas (recordando que el baricentro de un área es el punto donde se puede suponer concentrada **TODA** el área)



Descomponemos nuestra figura en “n” figuras regulares: en este caso a la figura la descomponemos en 3: un IPN, un UPN y un triángulo rectángulo

$$y_G = \frac{y_{G1} \cdot F_1 + y_{G2} \cdot F_2 + y_{G3} \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

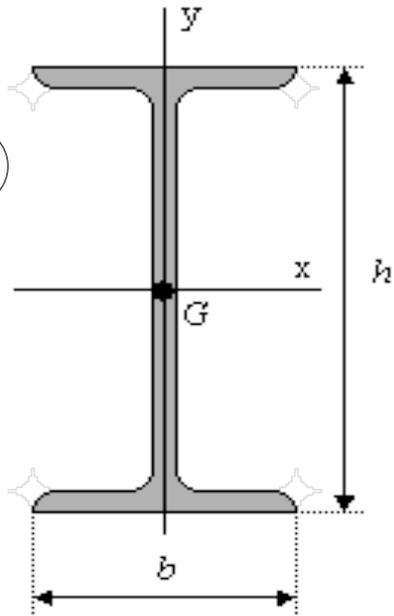
$$x_G = \frac{x_{G1} \cdot F_1 + x_{G2} \cdot F_2 + x_{G3} \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

Los baricentros de figuras regulares (en este caso G1, G2 y G3) están tabulados

# Datos tabulados

1



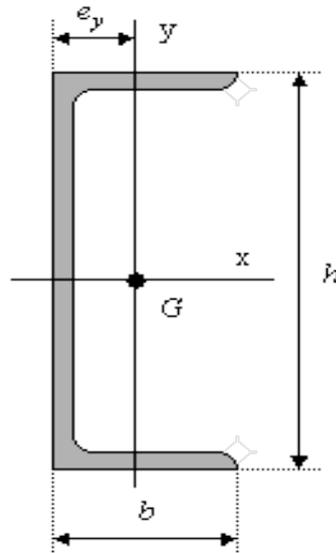
| b<br>cm | h<br>cm | $J_x$<br>cm <sup>4</sup> | $J_y$<br>cm <sup>4</sup> | F<br>cm <sup>2</sup> |
|---------|---------|--------------------------|--------------------------|----------------------|
| 12,5    | 30      | 9800                     | 451                      | 69                   |

$$x_{G1} = \frac{[b]_{IPN}}{2}$$

$$F_1 = [F]_{IPN}$$

$$y_{G1} = \frac{[h]_{IPN}}{2}$$

2



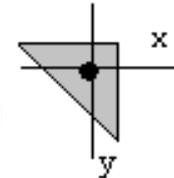
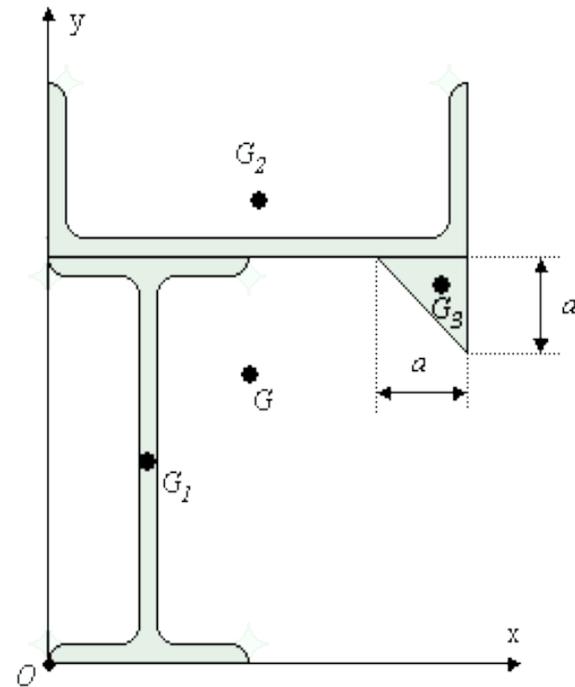
| h<br>cm | b<br>cm | $J_x$<br>cm <sup>4</sup> | $J_y$<br>cm <sup>4</sup> | F<br>cm <sup>2</sup> | $e_y$<br>cm |
|---------|---------|--------------------------|--------------------------|----------------------|-------------|
| 26      | 9       | 4820                     | 317                      | 48,3                 | 2,36        |

$$x_{G2} = \frac{[h]_{UPN}}{2}$$

$$F_2 = [F]_{UPN}$$

$$y_{G2} = [h]_{IPN} + [e_y]_{IPN}$$

3



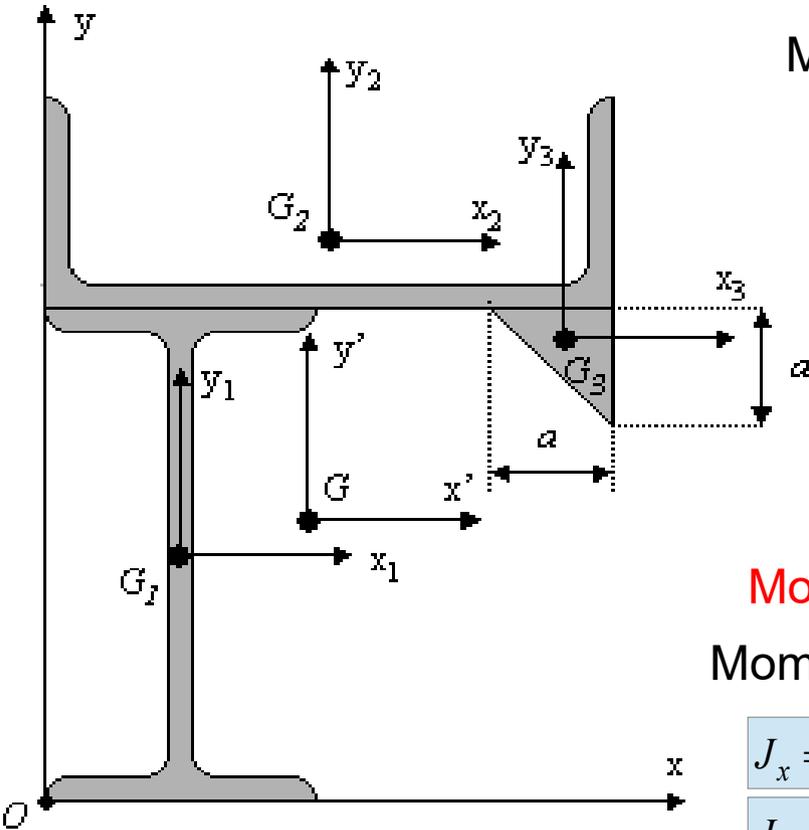
$$x_{G3} = [h]_{UPN} - \frac{a}{3}$$

$$F_3 = \frac{a^2}{2}$$

$$y_{G3} = [h]_{IPN} - \frac{a}{3}$$

| $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | F     | $x_{G1}$ | $y_{G1}$ | $x_{G2}$ | $y_{G2}$ | $x_{G3}$ | $y_{G3}$ | $x_G$ | $y_G$ |
|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|
| cm    | cm    | cm    | cm    | cm       | cm       | cm       | cm       | cm       | cm       | cm    | cm    |
| 69    | 48,3  | 32    | 149,3 | 6,25     | 15       | 13       | 32,36    | 23,33    | 27,33    | 12,1  | 23,3  |

# 2.-Momentos de 2do orden respecto del par de ejes no baricéntricos x e y



Momentos respecto de ejes baricéntricos individuales:

|                                    |                              |                |
|------------------------------------|------------------------------|----------------|
| $J_{x1} = [J_x]_{IPN}$             | $J_{y1} = [J_y]_{IPN}$       | $J_{x1y1} = 0$ |
| $J_{x2} = [J_y]_{UPN}$             | $J_{y2} = [J_x]_{UPN}$       | $J_{x2y2} = 0$ |
| $J_{x3} = J_{y3} = \frac{a^4}{36}$ | $J_{x3y3} = -\frac{a^4}{72}$ |                |

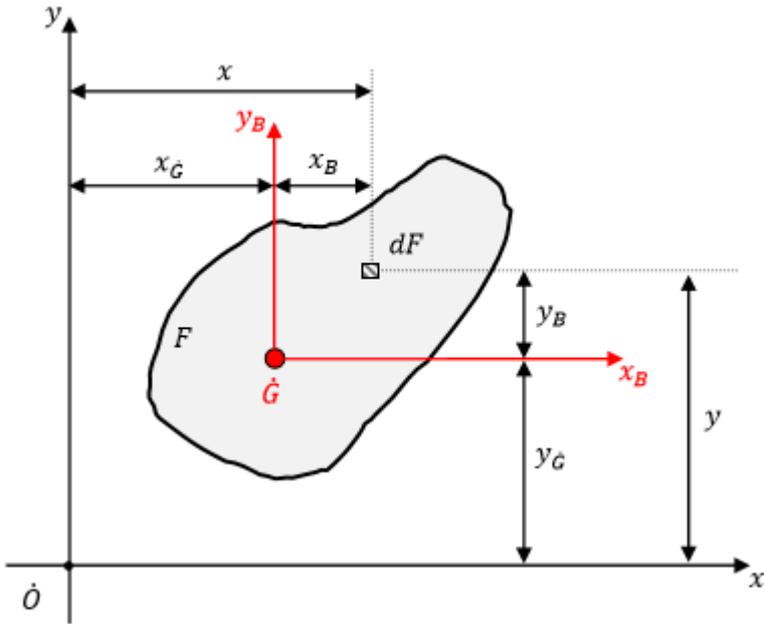
Momentos centrífugos respecto de ejes conjugados

Momentos respecto de ejes no baricéntricos x e y:

|   |
|---|
| $J_x = J_{x1} + y_{G1}^2 \cdot F_1 + J_{x2} + y_{G2}^2 \cdot F_2 + J_{x3} + y_{G3}^2 \cdot F_3$   |
| $J_y = J_{y1} + x_{G1}^2 \cdot F_1 + J_{y2} + x_{G2}^2 \cdot F_2 + J_{y3} + x_{G3}^2 \cdot F_3$   |
| $J_{xy} = J_{x1y1} + x_{G1} \cdot y_{G1} \cdot F_1 + J_{x2y2} + x_{G2} \cdot y_{G2} \cdot F_2 + J_{x3y3} + x_{G3} \cdot y_{G3} \cdot F_3$ |
| $J_O = J_x + J_y$   |

| $J_{x1}$        | $J_{y1}$        | $J_{x1y1}$      | $J_{x2}$        | $J_{y2}$        | $J_{x2y2}$      | $J_{x3}$        | $J_{y3}$        | $J_{x3y3}$      | $J_x$           | $J_y$           | $J_{yx}$        | $J_O$           |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| cm <sup>4</sup> |
| 9800            | 451             | 0               | 317             | 4820            | 0               | 114             | 114             | -57             | 100242          | 33665           | 47156           | 133907          |

### 3.- Momentos de 2do orden respecto de ejes baricéntricos ortogonales $x'$ e $y'$ , paralelos a $x$ e $y$ , respectivamente.



$$x = x_B + x_G \quad (1)$$

$$y = y_B + y_G \quad (2)$$

$$J_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF \quad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

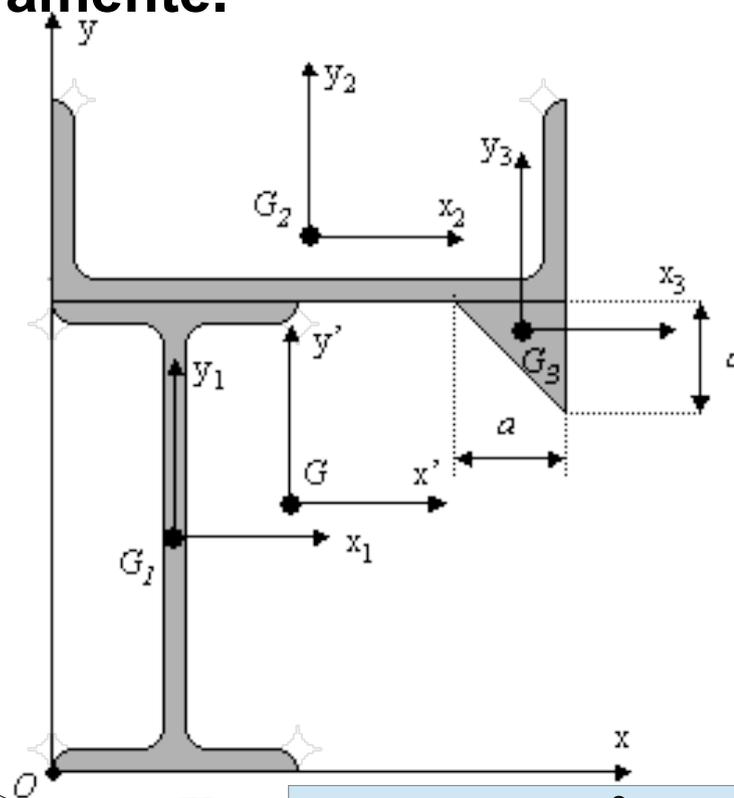
$$J_{xy} = \int_F (x_B + x_G) \cdot (y_B + y_G) \cdot dF$$

$$J_{xy} = \int_F x_B \cdot y_B \cdot dF + \int_F x_B \cdot y_G \cdot dF + \int_F x_G \cdot y_B \cdot dF + \int_F x_G \cdot y_G \cdot dF$$

$$J_{xy} = \underbrace{\int_F x_B \cdot y_B \cdot dF}_{J_{x_B y_B}} + \cancel{y_G \cdot \int_F x_B \cdot dF}_{S_{y_B} = 0} + \cancel{x_G \cdot \int_F y_B \cdot dF}_{S_{x_B} = 0} + x_G \cdot y_G \cdot \underbrace{\int_F dF}_F$$

Teorema de Steiner:  
 $J_{xy} = J_{x_B y_B} + x_G \cdot y_G \cdot F$

$$\begin{aligned} J_{x'} &= J_x - F \cdot y_G^2 \\ J_{y'} &= J_y - F \cdot x_G^2 \\ J_{y'x'} &= J_{xy} - F \cdot x_G \cdot y_G \\ J_G &= J_{y'} + J_{x'} \end{aligned}$$



| $J_{x'}$      | $J_{y'}$      | $J_{y'x'}$    | $J_G$         |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\text{cm}^4$ | $\text{cm}^4$ | $\text{cm}^4$ | $\text{cm}^4$ |
| 19469         | 11823         | 5153,06       | 31292         |

## 4.- Determinar los ejes principales y los valores de $J_I$ y $J_{II}$

$$J_{I,II} = \frac{1}{2} \cdot (J_{x'} + J_{y'}) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{x'} - J_{y'})^2 + 4 \cdot J_{x'y'}^2}$$

El ángulo  $\tilde{\alpha}_0$  que forma uno de los ejes principales con el eje x es:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left( \frac{2 \cdot J_{x'y'}}{J_{y'} - J_{x'}} \right)$$

| $\alpha_{oI}$ | $\alpha_{oII}$ | $J_I$           | $J_{II}$        |
|---------------|----------------|-----------------|-----------------|
| 0             | 0              | cm <sup>4</sup> | cm <sup>4</sup> |
| -27           | 63             | 22063           | 9230            |

$$J_o = J_x + J_y = J_I + J_{II}$$

## 5.- Determinar el valor de los momentos de inercia y centrífugo respecto del par de ejes ortogonales $m$ y $n$

$$J_m = J_{x'} \cdot \cos^2(-\alpha) + J_{y'} \cdot \sin^2(-\alpha) - J_{x'y'} \cdot \sin(-2 \cdot \alpha)$$

$$J_n = J_{x'} \cdot \cos^2(90^\circ - \alpha) + J_{y'} \cdot \sin^2(90^\circ - \alpha) - J_{x'y'} \cdot \sin(180^\circ - 2 \cdot \alpha)$$

$$J_{mn} = \frac{J_{x'} - J_{y'}}{2} \cdot \sin(-2 \cdot \alpha) + J_{x'y'} \cdot \cos(-2 \cdot \alpha)$$

| $J_m$         | $J_n$         | $J_{mn}$      |
|---------------|---------------|---------------|
| $\text{cm}^4$ | $\text{cm}^4$ | $\text{cm}^4$ |
| 19181         | 12111         | -5355         |

$$J_o = J_x + J_y = J_I + J_{II} = J_m + J_n$$

## 6.- Hallar la posición del eje conjugado al eje $m$ y su respectivo momento de inercia

$$J_u = J_{x'} \cdot \cos^2(\beta) + J_{y'} \cdot \sin^2(\beta) - J_{x'y'} \sin(2 \cdot \beta)$$

El ángulo  $\beta$  que forma el eje  $u$  conjugado de  $m$  :

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{J_{x'} - J_{x'y'} \cdot \tan(-\alpha)}{J_{x'y'} - J_{y'} \cdot \tan(-\alpha)} \right)$$

| $\beta$ | $J_u$           | $J_m$           |
|---------|-----------------|-----------------|
| °       | cm <sup>4</sup> | cm <sup>4</sup> |
| 51      | 9849            | 19181           |

$$J_o = J_m + J_n \neq J_m + J_u$$