75.12 / 95.04 – ANÁLISIS NUMÉRICO I
CB051 / 95.10 – MODELACIÓN NUMÉRICA

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRÁCTICO
2do. cuatrimestre 2025

Integración numérica y resolución de problemas valores iniciales no lineales

Introducción:

Si un péndulo ideal es apartado de su posición de equilibrio y es soltado sin velocidad inicial adquiere un movimiento que puede ser descrito mediante el ángulo ϕ que forma la varilla del péndulo con la vertical del punto de sujeción. La evolución temporal de ϕ se obtiene integrando el siguiente problema no-lineal de valor inicial

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\phi = 0 \quad \text{con} \quad \phi_{(0)} = A \quad \text{y} \quad \left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{(0)} = 0 \tag{1}$$

donde g = 9.81 m/s^2, L es la longitud del péndulo en metros y A la amplitud angular. Dicho movimiento es periódico pudiendo calcularse su periodo (T) mediante la integral definida[1] :

$$T = 4\sqrt{L/g}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - sen^2(A/2)\; sen^2\phi]^{-\frac{1}{2}} d\phi \quad si \quad 0 \le A < \pi \tag{2}$$

Cuando la amplitud de la oscilación es pequeña el periodo puede calcularse en forma aproximada mediante

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \tag{3}$$

Datos:

L = 1 m
Resolver para ángulos A = 0.1*π, A = 0.5*π, A = 0.9*π

[1] Brauer and Nohel, *The qualitative theory of ordinary differential equations,* 1969, Dover Publications, New York

Resolución:

1) Implementar la integración numérica de la formula (2) usando el método del trapecio compuesto, de forma tal de asegurar un resultado con tres dígitos significativos correctos.
2) Verificar la implementación anterior calculando el periodo T para amplitudes pequeñas.
3) Implementar uno o más programas que permitan integrar el problema de valores iniciales no lineal (1) utilizando a) Método de Runge-Kutta de orden 2 y b) Método de Newmark (usando el método de Taylor como predictor).
4) Utilizando los datos indicados, calcular el periodo T utilizando la integración numérica implementada en 1). Este valor servirá como referencia para los puntos siguientes.
5) Integrar el problema de valores iniciales durante al menos dos periodos utilizando distintos pasos de tiempo (que se identificarán como fracciones enteras del periodo previamente calculado) a los efectos de poder comparar el comportamiento de las soluciones numéricas obtenidas con los dos métodos propuestos.
6) Al momento de redactar las conclusiones es importante tener en cuenta que se trata de un problema físico conservativo y que uno de los métodos implementados no es numéricamente conservativo. Este hecho debe ser notorio al momento de comparar las amplitudes de las soluciones numéricas obtenidas por ambos métodos y con distintos pasos de tiempo. También se pide comparar el periodo de las soluciones numéricas tomando como referencia el valor previamente calculado a partir de la integración de (2).

Discretización directa de Problemas de Valores Iniciales de primer orden

Método de Runge-Kutta:

$y' = f(t, y)$

$u_{n+1/2} = u_n + k/2\, f(u_n, t_n)$
$u_{n+1} = u_n + k\, f(u_{n+1/2}, t_{n+1/2})$

Discretización directa de Problemas de Valores Iniciales de segundo orden

$y'' = f(t, y', y)$
$y(t_0) = y_0$
$y'(t_0) = y'_0$

Variables discretas: u_n para y
v_n para y'

Método de Taylor:

$u_{n+1} = u_n + k\, v_n + k^2/2\, f(t, v_n, u_n)$
$v_{n+1} = v_n + k/2\, [\, f(t, v_n, u_n) + f(t, v_{n+1}, u_{n+1})\,]$

Método de Newmark:

$u_{n+1} = u_n + k\, v_n + k^2/4\, [\, f(t, v_n, u_n) + f(t, v_{n+1}, u_{n+1})\,]$
$v_{n+1} = v_n + k/2\, [\, f(t, v_n, u_n) + f(t, v_{n+1}, u_{n+1})\,]$