

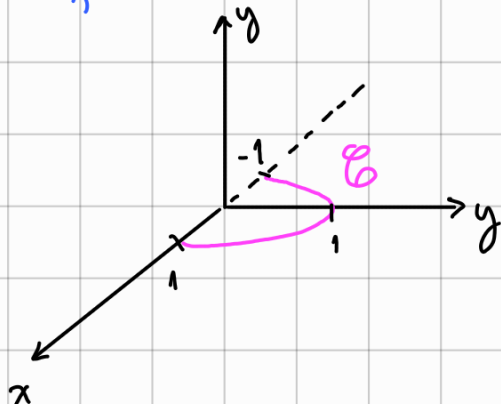
Ejercicio (de completar con una curva)

Sea $f(x, y, z) = (e^y - z, xe^y, e^z)$ calcular $\int_C f \cdot d\vec{l}$ siendo C la curva imagen de $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 /$

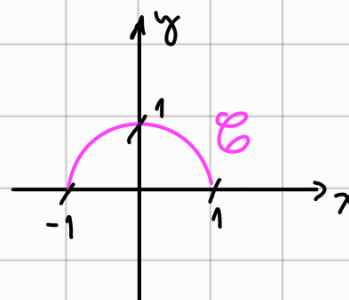
$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

ojo! Copié mal el enunciado :

Gráfico de $\mathcal{C}$:



Proyección de $\mathcal{C}$ en el plano xy



- Como $f(x,y,z)$ es una función vectorial difícil de integrar usando el T. de Stokes, para lo cual necesitamos "cerrar" la curva. Definimos $\mathcal{C}_2$ el segmento que va desde $(1,0,0)$ a $(-1,0,0)$
 $\rightarrow \Gamma = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_2$ es una curva cerrada

Definimos $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0, x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}$
 $\rightarrow \Gamma = \partial \Sigma$.

Veamos que Γ, Σ y f satisfacen las hipótesis del T. de Stokes:

- Γ es una curva cerrada, simple y suave en 2 trozos.
- Σ es una mp. abierta, suave, orientable y tal que $\partial \Sigma = \Gamma$
- $f \in C^1(H)$, $H = \mathbb{R}^3 \rightarrow \Sigma \cup \Gamma \subset H$.

$$\therefore \text{vale que } \underbrace{\oint_{\Gamma} f \cdot d\vec{s}}_{\text{I}} = \underbrace{\iint_{\Sigma} \text{rot}(f) \cdot \vec{n} \cdot d\sigma}_{\text{II}}$$

C.Aux: $\text{rot}(\vec{f}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^y - z & x e^y & e^z \end{vmatrix} = (0, -1, e^y - e^z) = (0, -1, 0)$

C.Aux: Demos una parametrizaci3n para Σ :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} r \in [0, 1] \\ \theta \in [0, \pi] \end{matrix}$$

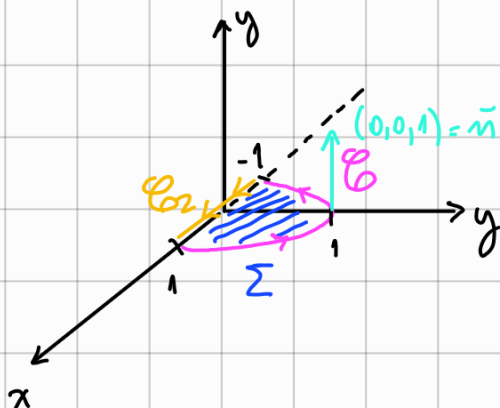
$$\rightarrow \sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$$

$$\sigma'_r(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$\sigma'_\theta(r, \theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

$$\Rightarrow \sigma'_r \times \sigma'_\theta = (0, 0, r)$$

este normal apunta
para arriba!



$$\therefore \textcircled{\text{II}} = \int_0^1 \int_0^\pi \underbrace{(0, -1, 0) \cdot (0, 0, r)}_{=0} d\theta dr = 0$$

$$\textcircled{\text{I}} = \int_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \int_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

le restamos en otro C.Aux.
y le pasamos restando.

C. Aux

Parametrizemos C_2 : $\vec{r}_2(t) = (t, 0, 0)$, $t \in [-1, 1]$ $\rightarrow$
 $\vec{r}'_2(t) = (1, 0, 0)$

tome el sentido de recorrido deseado.

$$\therefore \int_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^1 \underbrace{(e^0 - 0, t \cdot e^0, e^0)}_{(1, t, 1)} \cdot (1, 0, 0) dt$$

$$= \int_{-1}^1 1 dt = t \Big|_{-1}^1 = \boxed{2}$$

Rta:

$$\int_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 - 2$$