Ejercicio de 2do parcial

Sea $\mathscr{C}$ la porción de línea del campo vectorial $\vec{g}(x,y) = (9y, -x)$ que pasa por $(0,1)$ y está contenida en el plano $x - 3y \leq 0$. Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x,y) = (x + xy^2, 2 + x^2 y)$ a lo largo de $\mathscr{C}$. Indique en un gráfico la orientación elegida.

Resolución

- Buscamos $\mathscr{C}$, que como es una línea de campo vale que

$$\frac{dx}{9y} = \frac{dy}{-x} \iff \int -x\,dx = \int 9y\,dy$$

$$-\frac{x^2}{2} + C = \frac{9}{2} y^2$$

$$C = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2/9}$$

Punto $(0,0)$ si $C = 0$

Elipse si $C > 0$

Para que pase por $(0,1)$ $\Rightarrow$ $C = \frac{0^2}{2} + \frac{1^2}{2/9}$

$$\rightarrow C = \frac{9}{2}$$

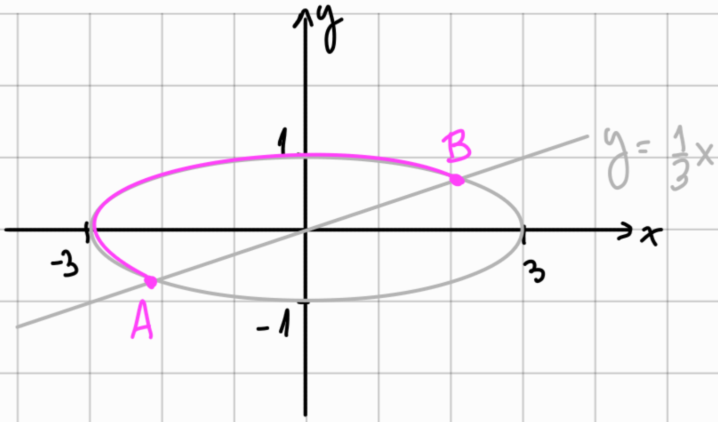
$\therefore \mathscr{C}$: $\frac{9}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2/9}$

divido por $\frac{9}{2}$

$$1 = \frac{x^2}{9} + y^2$$

Elipse de centro $(0,0)$ y semiejes $a = 3$ $b = 1$

Pero falta ver que esté contenida en el plano $x - 3y \leq 0$



$x - 3y \leq 0 \Longrightarrow \underbrace{y \geq \frac{1}{3}x}_{\text{arriba de la recta}}$

• Buscamos los valores de A y B intersecando la recta $y = \frac{1}{3}x$ con la elipse de ecuación $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{9} = 1$$

$$\frac{2}{9}x^2 = 1 \quad \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \Longrightarrow B = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \Longrightarrow A = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

• Buscamos una parametrización para $\mathscr{C}$:

$$\bar{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2 \,/\, \bar{\gamma}(t) = (3\cos t, \ \operatorname{sen} t)$$
$$\Longrightarrow \bar{\gamma}'(t) = (-3\operatorname{sen} t, \ \cos t)$$

Para hallar el intervalo I pedimos que $y = \frac{1}{3}x$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{sen} t = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\cos t$$

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = 1$$

$$\operatorname{tg}(t) = 1 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{4} \ \text{ o } \ t = \frac{5}{4}\pi \qquad \therefore I = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$$

$$\therefore \int_{\mathcal{C}} \bar{f}\cdot d\bar{s} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \bar{f}(\bar{\gamma}(t))\cdot \bar{\gamma}'(t)\, dt$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (3\cos t + 3\cos t \cdot \text{sen}^2 t,\ 2 + 8\cos^2 t \cdot \text{sen}\, t)\cdot(-3\,\text{sen}\, t,\ \cos t)\, dt$$

$$= \int_{\pi/4}^{5/4\pi} -6\,\text{sen}\, t\cdot\cos t + 3\cos t\cdot\text{sen}^3 t + 2\cos t + 8\cos^3 t\cdot\text{sen}\, t\, dt$$

$$= \left(-6\cdot\frac{\text{sen}^2 t}{2} + \frac{3}{4}\,\text{sen}^4 t + 2\,\text{sen}\, t - \frac{8}{4}\cos^4 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$

sustitución en tres términos

$$= \left[\cancel{-3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \cancel{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4} + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \cancel{\frac{8}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}\right] - \left[\cancel{-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \cancel{\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4} + 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \cancel{\frac{8}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}\right]$$

$$= \boxed{-2\sqrt{2}}$$