5. Calcule la masa de un alambre cuya forma es la de la curva intersección de las superficies de ecuaciones $z = 2 - x^2 - 2y^2$ y $z = x^2$ entre $(0,1,0)$ y $(1,0,1)$ en el primer octante, si su densidad es $\delta(x,y,z) = k\,x\,y$ con k constante.

• Analizamos la curva $\mathscr{C}: \begin{cases} z = 2 - x^2 - 2y^2 \\ z = x^2 \end{cases}$

Modificamos las ecuaciones por otras equivalentes que nos permitan parametrizar:

$\mathscr{C}: \begin{cases} x^2 = 2 - x^2 - 2y^2 \longrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \\ z = x^2 \end{cases}$

Proponemos una parametrización:

$\vec{\gamma}: I \to \mathbb{R}^3 \;/\; \vec{\gamma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos^2 t)$

$\Rightarrow \vec{\gamma}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -2\cos t \cdot \operatorname{sen} t)$

$\therefore \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1 + 4\cdot\cos^2 t \cdot \operatorname{sen}^2 t}$

Buscamos el intervalo sabiendo que un extremo de la curva es $(0,1,0)$ y el otro es $(1,0,1)$

$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \vec{\gamma}(t) = (0,1,0) \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ \text{Si } \vec{\gamma}(t) = (1,0,1) \Rightarrow t = 0 \end{array}\right\} \therefore I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

• Para calcular la masa de $\mathscr{C}$ usamos que:

$$\text{Masa}(\mathscr{C}) = \int_{\mathscr{C}} \delta \cdot ds = \int_0^{\pi/2} \delta(\vec{\gamma}(t)) \cdot \|\vec{\gamma}'(t)\|\, dt = (*)$$

$$\circledast = \int_0^{\pi/2} k \cdot \cos t \cdot \operatorname{sen} t \cdot \sqrt{1+4\cos^2 t \cdot \operatorname{sen}^2 t}\, dt = \circledast_2$$

Desde acá empieza el cálculo de la integral indefinida que habría quedado como tarea:

$$\int k \underbrace{\cos t \cdot \operatorname{sen} t}\cdot \sqrt{1+4\cos^2 t \cdot \operatorname{sen}^2 t}\, dt = \circledast$$

idea! Esto es la derivada de $\operatorname{sen}^2 t$, así que llevo todo a una forma donde aparezca sólo $\operatorname{sen}^2 t$.

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\text{C. Aux}}: \; 1+4\underbrace{\cos^2 t}_{1-\operatorname{sen}^2 t} \cdot \operatorname{sen}^2 t &= 1+4\cdot(1-\operatorname{sen}^2 t)\cdot \operatorname{sen}^2 t \\ &= 1+4\operatorname{sen}^2 t - 4(\operatorname{sen}^2 t)^2 \end{aligned}}$$

$$\circledast = \int k \cos t \cdot \operatorname{sen} t \cdot \sqrt{1+4\operatorname{sen}^2 t - 4(\operatorname{sen}^2 t)^2}\, dt =$$

sustitución

$u = \operatorname{sen}^2 t$

$du = 2\operatorname{sen} t \cos t \, dt$

$\frac{du}{2} = \operatorname{sen} t \cdot \cos t\, dt$

$$= \int k \cdot \sqrt{1+4u-4u^2}\, \frac{du}{2} = \frac{k}{2} \cdot \int \underbrace{\sqrt{1+4u-4u^2}}_{\text{completar cuadrados!}}\, du = \circledast$$

C.Aux: $1+4u-4u^2 = 1-4\left(u^2-u+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = 1-4\cdot\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$

$= 1-4\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+1 = 2-4\left(u-\frac{1}{2}\right)^2$

(*) $= \frac{k}{2}\cdot\int\sqrt{2-4\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}\,du = \int\sqrt{2-4x^2}\,dx$

lo llevo a la forma $\int\sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-b^2x^2}+\frac{a^2}{2b}\cdot\operatorname{arcsen}\left(\frac{bx}{a}\right)$

(pues eso está en la tabla)

otra sustitución! $\left\{\begin{array}{l} x = u-\frac{1}{2} \\ dx = du \end{array}\right.$

$= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{2-4x^2}+\frac{2}{2\cdot 2}\cdot\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)+C =$

tabla! Tomando $a^2=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$

$b^2=4 \Rightarrow b=2$

vuelvo a variable u

$= \frac{u-1/2}{2}\cdot\sqrt{2-4\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{2}\left(u-\frac{1}{2}\right)\right)+C$

$= \frac{\operatorname{sen}^2 t-1/2}{2}\cdot\sqrt{2-4\left(\operatorname{sen}^2 t-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{2}\left(\operatorname{sen}^2 t-\frac{1}{2}\right)\right)+C$

vuelvo a variable t

Acá termina la integral!
Ahora falta evaluarla!

$$(*)_2 = \frac{\operatorname{sen}^2 t - 1/2}{2}\sqrt{2-4\left(\operatorname{sen}^2 t-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{2}\left(\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \left[\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] - \left[-\frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right] - \left[\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$