Nombre y Apellido: Número de Padrón:

Curso:

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

La evaluación se aprueba con 3 (tres) ejercicios bien resueltos.

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Sea D el dominio de

$$f(x,y) = \frac{\ln(2-y-x^2)}{\sqrt{x-y}}.$$

  a) Grafique por separado D y su frontera. Indique si D es abierto, cerrado y/o conexo.

  b) Grafique por separado el conjunto de nivel 0 de f.

- **Ejercicio 2.** Sean $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1\}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ con $f(x,y) = x^2y + x^2 + 2y^2 + 1$. Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

- **Ejercicio 3.** Pruebe que en un entorno de $(1,2,2)$, la ecuación

$$xz + yz + e^{x+z-3} = 7$$

  define implícitamente una función $z = f(x,y)$ de clase C^1. Halle **todos los versores** $\breve{v}$ para los cuales $f'((1,2),\breve{v}) = 0$.

- **Ejercicio 4.** Sea $f(u,v)$ una función de clase C^1 tal que $L(u,v) = 1+2u-v$ es su aproximación lineal en $(1,-1)$. Sea $g(x,y) = f(\cos(xy)+x, e^x y)$. Halle una ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(0,-1,g(0,-1))$.

- **Ejercicio 5.** Sean Σ la superficie de ecuación vectorial

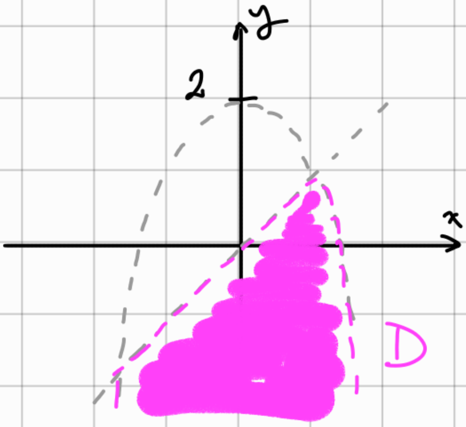
$$\vec{X} = (uv, u+v, 2u-v), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

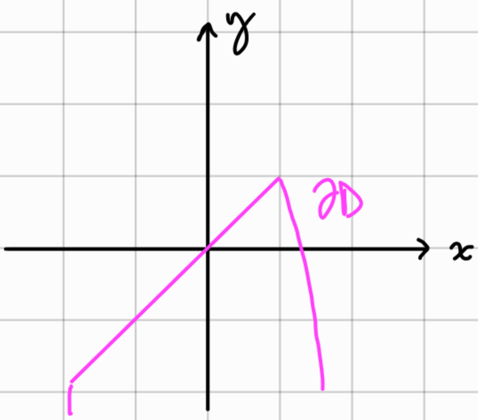
  y C la curva definida por las ecuaciones $xy + z^2 = 1$, $x^2+y^2+z = 0$. Halle el o los puntos $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P es paralelo al plano normal a C en $(1,0,-1)$.

Análisis Matemático II - 1º parcial - 18/10/2025

$\boxed{1}$ $f(x,y) = \dfrac{\ln(2-y-x^2)}{\sqrt{x-y}}$

a) $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{2-y-x^2>0}_{2-x^2>y} \wedge \underbrace{x-y>0}_{x>y}\}$



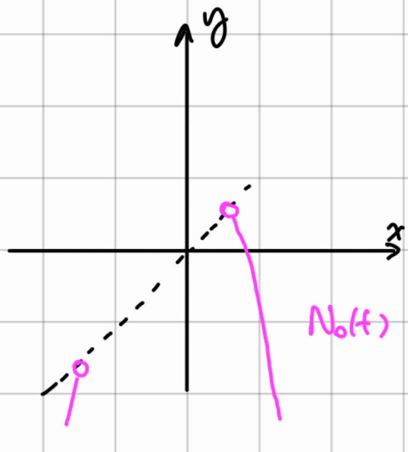


- D es abierto, pues todos sus puntos son interiores
- D no es cerrado, pues su complemento no es abierto
- D es arco-conexo pues cualesquiera dos puntos de D pueden conectarse con un arco completamente contenido en D.

b) $N_0(f) = \{(x,y)\in D \,/\, f(x,y)=0\}$

$$\frac{\ln(2-y-x^2)}{\sqrt{x-y}} = 0 \iff \ln(2-y-x^2)=0 \wedge x\neq y \iff$$

$$2-y-x^2=1 \wedge x\neq y \iff y = 1-x^2 \,,\; x\neq y$$



$\boxed{2}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x > -1\}$ es abierto.

$f: D \to \mathbb{R} / \ f(x,y) = x^2y + x^2 + 2y^2 + 1$

Como D es abierto $\Rightarrow$ se puede usar el criterio de la derivada segunda:

i) $\bar{\nabla} f(x,y) = (2xy + 2x, \ x^2 + 4y)$

ii) $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2xy + 2x = 0 & \to 2x(y+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \\ x^2 + 4y = 0 & (2) \end{cases}$

Si $x = 0 \Rightarrow (2) \ y = 0$

Si $y = -1 \Rightarrow (2) \ x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x = 2 \ \vee \ x = -2$

$\therefore$ $P_1 = (0,0) \to$ Punto crítico

$P_2 = (2,-1) \to$ Punto crítico

$P_3 = (-2,-1) \notin Dom(f) \Rightarrow$ lo descarto

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$

$\to Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow H_2 = 8 > 0 \longrightarrow$ hay extremo

$H_1 = 2 > 0 \Rightarrow$ es mínimo!

$Hf(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to H_2 = -16 < 0 \to$ hay un punto silla!

Rta: f alcanza un mínimo en $(0,0)$ y vale $f(0) = 1$

f tiene un punto silla en $(2,-1, f(2,-1)) = (2,-1,-1)$

$\boxed{3}$ Sea $F(x,y,z) = xz + yz + e^{x+z-3} - 7$ y sea $P = (1,2,2)$

Veamos que F satisface las condiciones del TFI:

i) $F(P) = 2+2+1-7 = 0$ ✓

ii) $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ por ser suma y composición de pol. y exp.

$\Rightarrow$ F es C^1 en un entorno de P

Aux: $\nabla F(x,y,z) = (z + e^{x+z-3}, z, x+y+e^{x+z-3})$

$\Rightarrow \nabla F(P) = (3, 2, 4)$

iii) $F'_z(P) = 4 \neq 0$

$\therefore$ la ecuación $xz + yz + e^{x+z-3} = 7$ define implícitamente a $z = f(x,y)$ en un entorno de $(1,2)$ donde resulta C^1 y además vale que $f(1,2) = 2$,

$$f'_x(1,2) = \frac{-3}{4} \quad , \quad f'_y(1,2) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Como $f \in C^1(E(1,2)) \Rightarrow$ vale que $f'((1,2), \check{v}) = \nabla f(1,2) \cdot \check{v}$

$\Rightarrow \check{v}$ / la derivada es nula es ortogonal a $\nabla f(1,2) = \left(\frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}\right)$

$\therefore \vec{v} = (-2, 3) \quad , \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{13}$

$$\Rightarrow \check{v}_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) \quad , \quad \check{v}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

$\boxed{4}$ $f = f(u,v)$, C^1 / $L(u,v) = 1+2u-v$ es su aprox. lineal en $(1,-1)$ (i.e. su pol. de Taylor de orden 1)

$\Rightarrow f(1,-1) = L(1,-1) = 4$

$f'_u(1,-1) = L'_u(1,-1) = 2 \longleftarrow$ CAux: $L'_u(u,v) = 2$

$f'_v(1,-1) = L'_v(1,-1) = -1 \longleftarrow$ CAux: $L'_v(u,v) = -1$

Sea $g(x,y) = f(\cos(xy) + x,\ e^x y)$

Llamamos $w: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $w(x,y) = (\cos(xy) + x,\ e^x y)$

$\Rightarrow g(x,y) = f \circ w\ (x,y) \in C^1$ pues $f \in C^1$, $w \in C^\infty$

$\therefore$ Plano tangente al gráfico de g en $(0,-1, g(0,-1))$ tiene ecuación:

$$\Pi_{tg}: \quad z = g(0,-1) + g'_x(0,-1)(x-0) + g'_y(0,-1)\cdot(y+1)$$

CAux: $g(0,-1) = f(w(0,-1)) = f(1,-1) = 4$

Como $g \in C^1 \Rightarrow$ vale la regla de la cadena:

$$Dg(0,-1) = \underbrace{Df(w(0,-1))}_{1} \cdot \underbrace{Dw(0,-1)}_{2} = (*)$$

1 $Df(w(0,-1)) = Df(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$② \quad Dw(x,y) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(xy)\cdot y + 1 & -\operatorname{sen}(xy)\cdot x \\ e^x y & e^x \end{pmatrix}$$

$$\to Dw(0,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(*) = Dg(0,-1) = (2 \quad -1)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (3 \quad -1)$$

$$\boxed{\text{Rta}: \quad \Pi_{tg}(g) : \quad z = 4 + 3\cdot(x-0) - 1\cdot(y+1)}$$

$\boxed{5}$ $\Sigma : \ X = (uv,\ u+v,\ 2u-v) \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{C} : \begin{cases} xy + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + z = 0 \end{cases} \qquad / \ (1,0,-1) \in \mathcal{C}$$

i) Buscamos el plano normal a $\mathcal{C}$ en $(1,0,-1)$:

Sean $F(x,y,z) = xy + z^2 - 1$ y $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$

$\Rightarrow \nabla F(1,0,-1) \times \nabla G(1,0,-1) = \vec{n}$ la normal del plano normal a $\mathcal{C}$.

C Aux: $\nabla F(x,y,z) = (y,\ x,\ 2z) \Rightarrow \nabla F(1,0,-1) = (0,\ 1,\ -2)$

$\nabla G(x,y,z) = (2x,\ 2y,\ 1) \Rightarrow \nabla G(1,0,-1) = (2,\ 0,\ 1)$

$$\therefore \ \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,\ -4,\ -2)$$

2°) Dos planos son paralelos si sus normales son múltiplos.

Calculamos $\vec{n}_{\Sigma}$:

Definimos $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, H(u,v) = (uv,\ u+v,\ 2u-v)$

$\rightarrow \vec{n}_{\Sigma} = H'_u(u_0,v_0) \times H'_v(u_0,v_0)$

Cuex: $\left.\begin{array}{l} H'_u(u,v) = (v, 1, 2) \\ H'_v(u,v) = (u, 1, -1) \end{array}\right\}$

$\rightarrow H'_u(u,v) \times H'_v(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v & 1 & 2 \\ u & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3,\ 2u+v,\ v-u)$

$\therefore \quad (-3,\ 2u+v,\ v-u) = \lambda(1,-4,-2)$

$\rightarrow \begin{cases} -3 = \lambda & (1) \\ 2u+v = -4\lambda & (2) \\ v-u = -2\lambda & (3) \end{cases}$

Reemplazando (1) en (2): $\quad 2u+v = 12$

" (1) en (3): $\quad v-u = 6$

resto: $3u = 6$

$\boxed{u=2}$

$\rightarrow \boxed{v=8}$

$\therefore \boxed{P = H(2,8) = (16, 10, -4)}$