Ejercicio

Decidir si la recta intersección entre los planos tangentes a $\Sigma_1: \ x^3+2xy^2-zy=1$ en $(1,1,z_0)$ y $\Sigma_2: \ \bar{X}=(u^2+uv, v-1, uv^3)$ en $(0,0,-1)$ es paralela al plano $xy$.

- Busco el plano tangente a $\Sigma_1$ en $(1,1,z_0)$:

Se considera $F(x,y,z) = x^3+2xy^2-zy-1$

Como $F \in C^1 \Rightarrow \nabla F(1,1,z_0) \perp C_0(F)$ con $\underbrace{F(1,1,z_0)=0}$

De aquí averiguamos $z_0$

$$1^3+2.1.1-z_0.1-1=0$$
$$2-z_0=0$$
$$z_0=2$$

Calculamos $\nabla F(x,y,z) = (3x^2+2y^2, 4xy-z, -y)$

$\Rightarrow \nabla F(1,1,2) = (5,2,-1)$

$\therefore \ \vec{N}_{\Pi_{\Sigma_1}} = (5,2,-1)$

- Buscamos el plano tg. a $\Sigma_2$ en $\underbrace{(0,0,-1)}_{=\bar{X}(u_0,v_0)}$

Averiguamos el valor de $(u_0,v_0)$ / $\bar{X}(u_0,v_0)=(0,0,-1)$

$$(u^2+uv, v-1, uv^3) = (0,0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{lr} u^2+uv=0 & (1) \\ v-1=0 & (2) \\ uv^3=-1 & (3) \end{array}\right\}$$

De (2) sale que $v=1 \Rightarrow$ de (3) sale que $u=-1$, y con esos valores se verifica (1). Por lo tanto $(u_0, v_0) = (-1, 1)$

Para hallar el plano tangente a $\Sigma_2$ definimos
$G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, G(u,v) = (u^2 + uv,\ v-1,\ uv^3)$

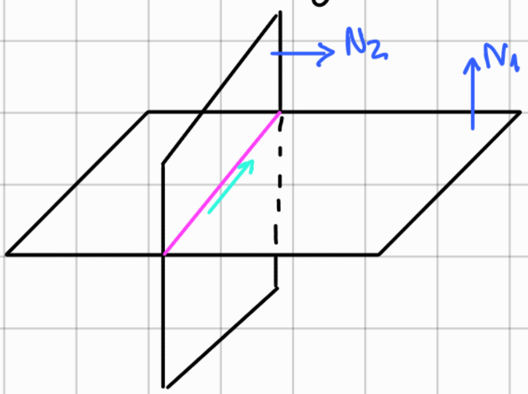
$\Rightarrow \vec{N} = G'_u(-1,1) \times G'_v(-1,1)$

C.Aux $= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1, -4, -1)$

C.Aux:
$G'_u(u,v) = (2u+v,\ 0,\ v^3)$
$\Rightarrow G'_u(-1,1) = (-1, 0, 1)$

$G'_v(u,v) = (u,\ 1,\ 3uv^2)$
$\Rightarrow G'_v(-1,1) = (-1, 1, -3)$

- Interpretación geométrica:




En rosa, la recta intersección
En azul, las normales de c/ plano
En verde, el director de la recta, que resulta ortogonal a $N_1$ y $N_2$

$\Rightarrow \vec{d} = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (-6, 6, -18) \parallel (1, -1, 3)$

Segunda idea geométrica: el plano xy tiene normal $(0,0,1)$
$\rightarrow$


Rta: Como $\vec{d} = (1,-1,3)$ es el director de la recta y no es ortogonal al vector normal al plano xy $(0,0,1)$ (pues su producto escalar no da cero $\rightarrow$ la recta no es paralela al plano xy.

## Ejercicio

Sean $\Sigma_1$ la superficie de ec. vectorial $X = (u+v, v^2, u-v)$ $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y $\Sigma_2: x^2+y^2+z^2=3$. Sea $\pi$ el plano tangente a $\Sigma_1$ en $A=(0,1,2)$. Halle los puntos $P \in \Sigma_2$ para los cuales el plano tangente a $\Sigma_2$ en $P$ es paralelo a $\pi$.

## Resolución:

- Buscamos la ecuación de $\pi$ (plano tg a $\Sigma_1$ en $A=(0,1,2)$)

Definimos $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ / \ F(u,v) = (u+v, v^2, u-v) \Rightarrow \mathrm{Im}(F) = \Sigma_1$

Debemos calcular $(u_0, v_0) \ / \ F(u_0,v_0) = A$

$$(u+v, v^2, u-v) = (0,1,2)$$

$$\rightarrow \begin{cases} u+v=0 & (1) \\ v^2 = 1 & (2) \\ u-v = 2 & (3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1)+(3): \ 2u = 2 \rightarrow u = 1 \\ (1)-(3): \ 2v = -2 \Rightarrow v = -1 \end{array}\right\} \text{ y estos valores satisfacen } (2)$$

$$\therefore \ \vec{N} = F'_u(1,-1) \times F'_v(1,-1)$$

CAux

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (2,2,-2) \rightarrow \ // \ (1,1,-1)$$

CAux

$F'_u(u,v) = (1,0,1)$

$\Rightarrow F'_u(1,-1) = (1,0,1)$

$F'_v(u,v) = (1, 2v, -1)$

$\rightarrow F'_v(1,-1) = (1,-2,-1)$

$\therefore$ cualquier plano paralelo a $\pi$ tendrá como normal un múltiplo de $(1,1,-1)$ ⊛

- Buscamos el plano tg a $\Sigma_2$ en $P$

Definimos $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3$

$\Rightarrow$ $P \in C_0(G) = \Sigma_2$ importante!

$\Rightarrow \overline{\nabla} G(P) \perp C_0(G)$ , es decir $\vec{N} = \overline{\nabla} G(P) = (2x, 2y, 2z)$

Pero como no conozco el punto $P$, primero planteamos ⊛

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(1,1,-1) \longrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ 2z = -\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \lambda/2 \\ y = \lambda/2 \\ z = -\lambda/2 \end{cases}$$

$$\therefore \; P = (x,y,z) = \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$$

Y como $P \in \Sigma_2$ $\Rightarrow$ satisface su ecuación:

$$x^2+y^2+z^2 = 3$$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 = 3$$

$$\frac{3}{4}\lambda^2 = 3 \longrightarrow \boxed{\lambda = \pm 2}$$

Rta: $\underset{\lambda = 2}{P_1} = (1,1,-1)$ , $\underset{\lambda=-2}{P_2} = (-1,-1,1)$