Análisis II

Ejercicios de repaso para el parcial

1) Para cada uno de los siguientes campos graficar su dominio D, el interior y la frontera de D. Indicar si el dominio es abierto, cerrado, conexo, acotado y/o compacto.

a) $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / F(x, y) = \dfrac{2 - \sqrt{9 - x^2 - 9y^2}}{x^2 - y}$

b) $\bar{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \bar{F}(x, y) = \left(\ln\left(-6 - 2x^2 + 8x - 8y^2\right), \sqrt{x + y - 2}, \dfrac{1}{xy} \right)$

2) Para cada uno de los siguientes campos graficar su dominio D y los conjuntos de nivel N_0, N_1, N_{-1} si es posible

a) $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / F(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + \dfrac{y^2}{4}}$

b) $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / F(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x}}$

3) a) Analizar si la siguiente función es continua y la existencia de derivadas direccionales en el origen:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

b) Analizar la existencia de derivadas direccionales en el origen y decidir si existe alguna dirección donde la derivada sea nula

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{5x^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

4) Para las siguientes superficies dar la ecuación del plano tangente y la recta normal en el punto indicado:

a) $S:\ x^4 + 2y^4 - z^2 = 2$ en $P = (0,1,0)$

b) $S:\ X = \left(uv, u^2 - v^2, \dfrac{u}{v+1} \right)$ con $(u, v) \in \mathbb{R} \times \left[-\dfrac{1}{2}, 1 \right]$ en $P = (0,4,2)$

c) $S = Graf(F)$ donde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / F(x, y) = x^2 y + (2y - 1)^3$ en el punto $P = (1,1,F(1,1))$

5) Para las siguientes curvas dar la ecuación de la recta tangente y el plano normal en el punto indicado:

a) $C = \operatorname{Im}(\bar{g})$ donde $\bar{g} : [-1,1] \to \mathbb{R}^3 / \bar{g}(t) = \left(t^2 - 1, 2t, t^3\right)$ en $P = (-1,0,0)$

b) $C = S_1 \cap S_2$ donde $S_1:\ x^3 + y^2 - z^2 = 1$ y $S_2:\ x - y^2 - 2z^2 = -2$ en $P = (1,1,1)$

6) Justificar mediante el teorema de la función implícita por qué la ecuación $xyz^2 + e^{zx} - \ln(y + z) = 1$ define a $z = f(x, y)$ en un entorno de $P = (0,2,-1)$ y luego calcular el polinomio de Taylor de orden 1 para $g(u, v) = \left(u^2 - 2uv\right) \cdot f(u + v, u - v)$ alrededor de $(1,-1)$. Justifique por qué la función g admite polinomio de Taylor de orden 1.

7) Justificar mediante el teorema de la función implícita por qué la ecuación $e^{u-2v+w} - usen(uw) = 1$ define a $w = f(u,v)$ en un entorno de $P = (2,1,0)$ y luego decidir si la recta normal al gráfico de h en el punto $(1,1,h(1,1))$ interseca al plano xz, siendo $h = f \circ g$ y $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, g(x,y) = (3x-y, x^2+y-1)$.
¿Se puede usar la regla de la cadena? Justifique

8) Sea $\overline{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \overline{F}(2,3) = (-1,1)$ y además $J\overline{F}(2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, y sea $G:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que el plano tangente a su gráfico en el punto $(-1,1,G(-1,1))$ es $2x+3y+z=2$, calcular el polinomio de Taylor de orden 1 para $G \circ \overline{F}$ en el punto $(2,3)$

9) Hallar los puntos críticos de $f(x,y) = \ln(x) + x^2y + \dfrac{x}{2} - 4y$ y clasificarlos.

10) Hallar los valores de $a,b \in \mathbb{R}$ para que $f(x,y) = a(x-y)^2 + b(2x-y)^2$ tenga un extremo en el punto $P=(1,2)$. Para los valores hallados decidir si el extremo alcanzado es un máximo o un mínimo.

11) Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2+y^2+2x-2y-1$ sobre $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2=1\}$

12) Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = xy$ que se encuentran en el triángulo de vértices $(-2,-2),(2,-2),(2,3)$ (interior y frontera)