ejercicio

para $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-2)(x-1)^2}{(y-2)+(x-1)^2} & \text{si } (y-2)+(x-1)^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } (y-2)+(x-1)^2 = 0 \end{cases}$

analizar continuidad

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$
- si $(y-2)+(x-1)^2 \neq 0 \Rightarrow f$ continua por f racional con denominador $\neq 0$
- si $(y-2)+(x-1)^2 = 0$, se trata de una parábola

supongamos un punto de la parábola (x_0,y_0)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(y-2)(x-1)^2}{(y-2)+(x-1)^2}$$

si no va por la parábola

esto puede o no tender a cero

esto tiende a 0

$(y-2)(x-1)^2 = 0 \iff y=2$ o $x=1$

la intersección de estas 2 rectas con la parábola es solo en el $(1,2)$

Luego si el punto $(x_0,y_0) \neq (1,2)$, el límite da infinito $\Rightarrow$ no es continua (pues en la parábola es cero)

- veamos para $(x_0,y_0) = (1,2)$

$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 0$ por la parábola

- veamos por rectas $(y-2) = m(x-1)$

$$\lim_{\substack{y=2+m(x-1)\\x\to1}} f(x,y) = \lim_{x\to1} \frac{m(x-1)^3}{m(x-1)+(x-1)^2} = \lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)}\, m\,\overbrace{(x-1)^2}^{\to 0}}{\cancel{(x-1)}\underbrace{(m+(x-1))}_{\to m}} = 0$$

- veamos por parábolas $(y-2) = a(x-1)^2$ con $a \neq -1$

$$\lim_{\substack{(y-2)=a(x-1)^2\\x\to1}} f(x,y) = \lim_{x\to1} \frac{a(x-1)^4}{a(x-1)^2+(x-1)^2} = \lim_{x\to1} \frac{\cancel{(x-1)^2}\, a(x-1)^2}{\cancel{(x-1)^2}\underbrace{(a+1)}_{\neq 0}} = 0$$

- veamos parábolas $(x-1) = b(y-2)^2$

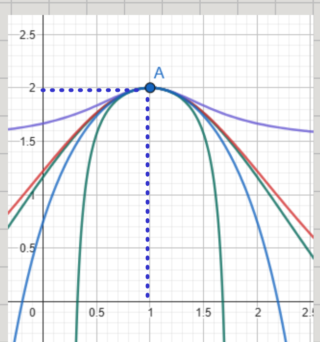
$$\lim_{\substack{(x-1)=b(y-2)^2\\y\to2}} f(x,y) = \lim_{y\to2} \frac{(y-2)^5 b^2}{(y-2)+b^2(y-2)^4} = \lim_{y\to2} \frac{\cancel{(y-2)}\, b^2 (y-2)^4}{\cancel{(y-2)}\underbrace{(1+b^2(y-2)^3)}_{\to 1}} = 0$$

veamos si sirve plantear curvas de nivel

serviría para acercarse al $(1,2)$ por distintas curvas en las que f vale distinto pero constante

$$\frac{(y-2)(x-1)^2}{(y-2)+(x-1)^2} = k \iff$$

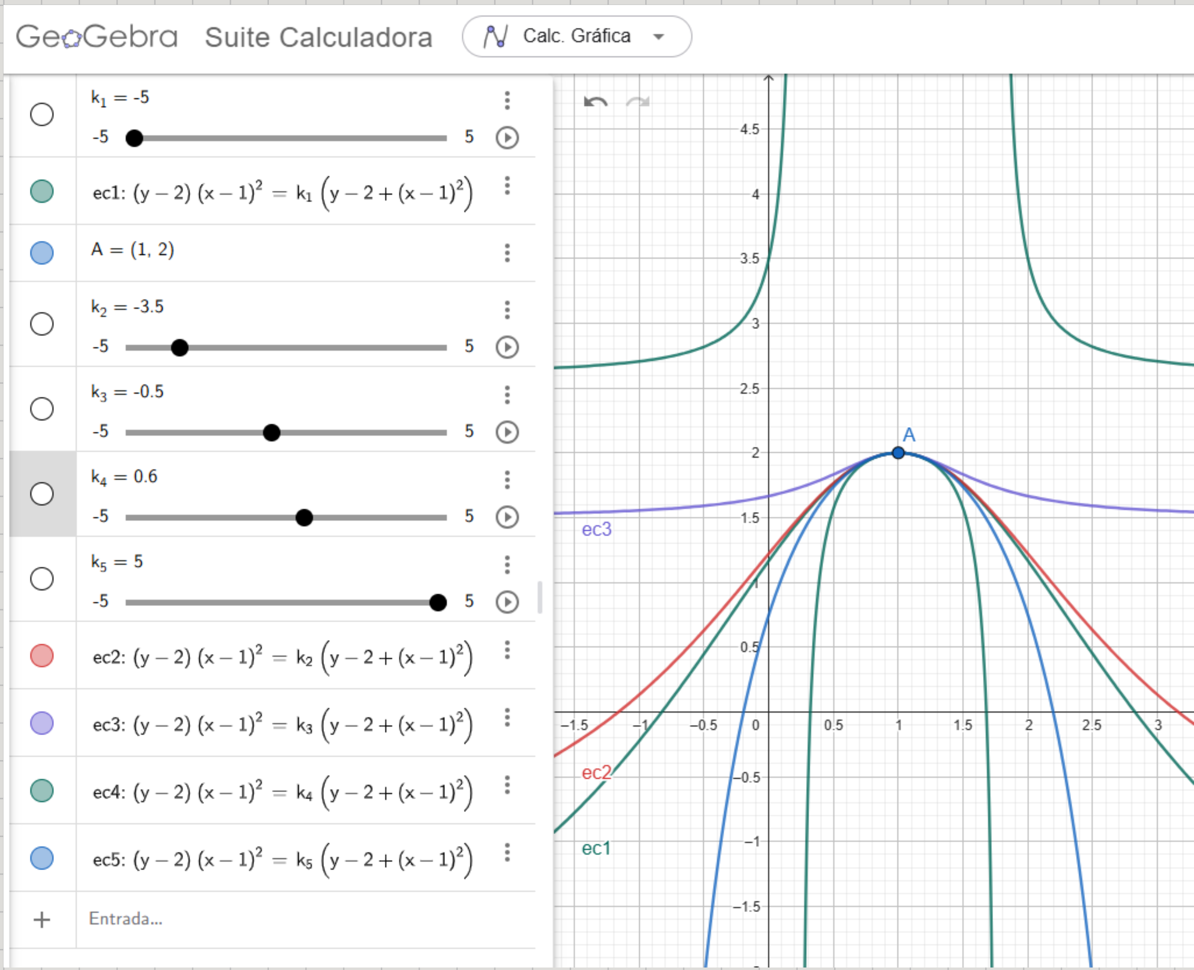
$$(y-2)(x-1)^2 = k[(y-2)+(x-1)^2]$$



todas estas curvas se acercan al punto $(1,2)$

luego, $\lim_{\substack{(x,y)\to(1,2)\\(x,y)\in N_k}} f(x,y) = k \quad \therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$

$\boxed{\text{la función NO es continua en ningún punto de la parábola}}$


GeoGebra
Suite Calculadora
Calc. Gráfica
$k_1 = -5$
-5 5
ec1: $(y-2)(x-1)^2 = k_1\left(y-2+(x-1)^2\right)$
A = (1, 2)
$k_2 = -3.5$
-5 5
$k_3 = -0.5$
-5 5
$k_4 = 0.6$
-5 5
$k_5 = 5$
-5 5
ec2: $(y-2)(x-1)^2 = k_2\left(y-2+(x-1)^2\right)$
ec3: $(y-2)(x-1)^2 = k_3\left(y-2+(x-1)^2\right)$
ec4: $(y-2)(x-1)^2 = k_4\left(y-2+(x-1)^2\right)$
ec5: $(y-2)(x-1)^2 = k_5\left(y-2+(x-1)^2\right)$
Entrada...
A
ec3
ec2
ec1