

Derivada de función de una variable

Dada $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y un punto a interior a D , si existe y tiene norma finita el límite que se indica,

$$f'(a) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ es la derivada de } f \text{ en } a.$$

Para funciones escalares las propiedades de las derivadas son las que se han estudiado en un primer curso de Análisis Matemático (función real de una variable real).

Teorema: Dada $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $m > 1$,

$$\exists \vec{f}'(a) \Leftrightarrow \exists f'_k(a), k = 1, \dots, m$$

$$\text{siendo } \vec{f}'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$$

Un vector es derivable si, y sólo si, sus componentes son derivables.

La derivada del vector se obtiene derivando sus componentes.

a) $\vec{g}'(0)$, si $\vec{g}(t) = (2 \sin(t), t \cos(t))$ con $t \in \mathbb{R}$

b) $\vec{\sigma}'(0)$, si $\vec{\sigma}(t) = \begin{cases} (\sin(t)/t, 2e^t) & \text{si } t \neq 0 \\ (1, 2) & \text{si } t = 0 \end{cases}$

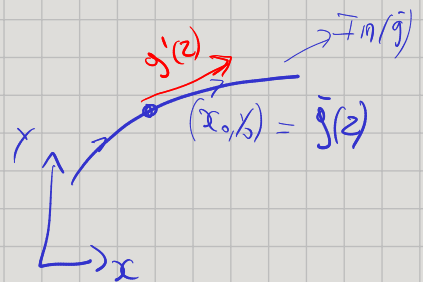
c) $\vec{g}'(\pi)$, si $\vec{g}(t) = \left(\frac{\sin(2t)}{t - \pi}, \cos(t/2) \right)$ con $t \in \mathbb{R} - \{\pi\}$, siendo $\vec{g}(\pi) = (2, 0)$

d) $\vec{\sigma}'(0)$, si $\vec{\sigma}(x) = \begin{cases} (x, x^2) & \text{si } x \geq 0 \\ (x, x^2 + 1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

va) $\vec{g}(t) = (\underbrace{3 \cdot \cos(t^2+1)}_{x(t)}, \underbrace{t \cdot \sin(2t)}_{y(t)}) \quad t \in \mathbb{R}$
 definir $\vec{g}(2)$

$$\vec{g}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-3 \sin(t^2+1) \cdot 2t, \sin(2t) + 2t \cdot \cos(2t))$$

$$\boxed{\vec{g}'(2) = (-12 \cdot \sin(5), \sin(4) + 4 \cdot \cos(4))}$$

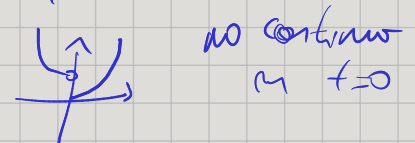


d) $\vec{\sigma}(t) = \begin{cases} (t, t^2) & \text{si } t \geq 0 \\ (t, t^2+1) & \text{si } t < 0 \end{cases}$

¿ $\vec{\sigma}(t)$ es cont. en $t=0$?

Componente y de $\vec{\sigma}(t)$

$$y(t) = \begin{cases} t^2 & t \geq 0 \\ t^2+1 & t < 0 \end{cases}$$



no continuo en $t=0$

$\sigma(t)$ es cont. en $t=t_0 \Leftrightarrow$

i) $\exists \vec{\sigma}(t_0)$

ii) $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\sigma}(t)$

iii) $\textcircled{i} = \textcircled{ii}$

$y(t)$ no es derivable en $t=0 \Rightarrow \nexists \vec{\sigma}'(0)$

Recta tangente a una curva

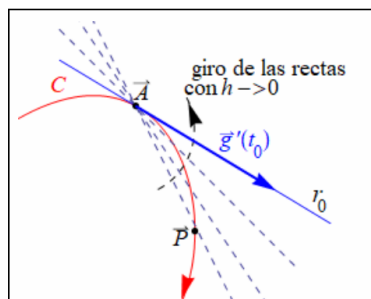
Sea la curva $C \subset \mathbb{R}^m$ de ecuación $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in I$.

En todo punto simple y regular $\vec{A} = \vec{g}(t_0) \in C$, la curva admite recta tangente de ecuación:

$$\vec{X} = \vec{A} + u \vec{g}'(t_0) \text{ con } u \in \mathbb{R}.$$

Dicha recta r_0 es la que pasa por $\vec{A} = \vec{g}(t_0)$ y está dirigida por $\vec{g}'(t_0)$, como se observa en el dibujo de la derecha.

Observe que $\vec{g}'(t_0)$ es tangente a C en $\vec{A}$ y está orientado en el sentido de los arcos crecientes (flecha roja sobre la curva).



5. Sea C la curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (R \cos(t), R \sin(t)), t \in [0, 2\pi), R > 0$ constante. Halle la ecuación de su recta tangente en $\vec{\sigma}(\pi/4)$. Grafique la curva y la recta tangente indicando el sentido de recorrido de la curva.

Pto de pazo: $\vec{\sigma}(\pi/4) = (R \cdot \cos(\pi/4), R \cdot \sin(\pi/4)) = \left(R \frac{\sqrt{2}}{2}, R \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \vec{\sigma}(\pi/4)$

Dirección de la recta tg: $\vec{\sigma}'(\pi/4)$

$$\vec{\sigma}'(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))$$

$$\vec{\sigma}'(\pi/4) = R \frac{\sqrt{2}}{2} (-1, 1)$$

ec. de la recta: $(x, y) = R \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1) + t \cdot (-1, 1) \quad t > 0$

(Bonus) rapidez de recorrido

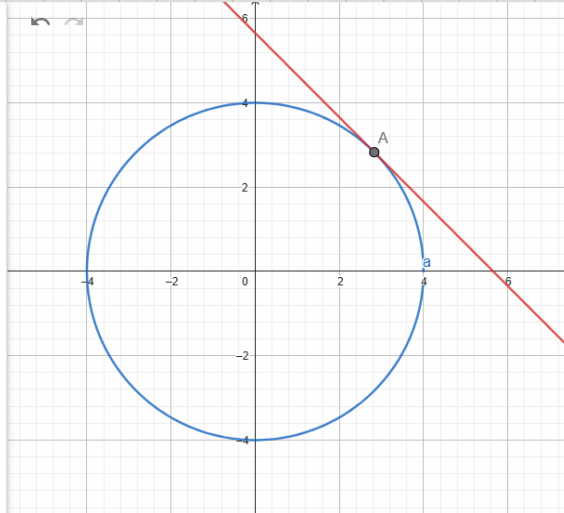
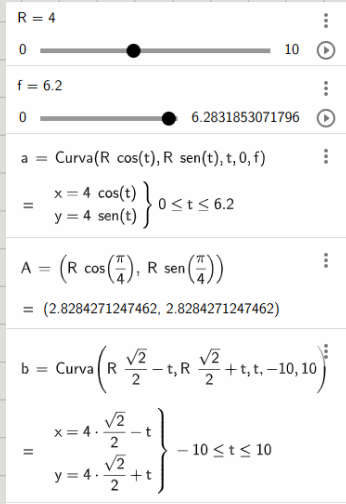
$$\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{(R \sin(t))^2 + (R \cos(t))^2} = \sqrt{R^2 (\sin^2(t) + \cos^2(t))} = R$$

$$\|\vec{\sigma}'(t)\| = R \quad (\text{no depende de } t)$$

$$\vec{\sigma}_2(t) = R \cdot (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t))$$

$$\vec{\sigma}'_2(t) = -R (-\sin(2\pi - t), \cos(2\pi - t))$$

$$\|\vec{\sigma}'_2(t)\| = R$$



6. Sea Γ la curva parametrizada por $\vec{\sigma}(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi)$. Halle los puntos de Γ para los cuales la recta tangente a la curva en ellos sea paralela a la recta de ecuación $x + 2y = 1$.

$\vec{\sigma}'(t)$: dirección de la recta tg.

$$\vec{\sigma}'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) = k(1, -1/2) \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} -\sin(t) = k \\ \cos(t) = -\frac{1}{2}k \end{cases} \Rightarrow -\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -2 \Rightarrow \tan(t) = 2$$

$$\tan(t) = 2$$

$$t_0 = 63.4^\circ \rightarrow +180^\circ$$

$$\text{también } t_1 = 243.4^\circ$$

los puntos son

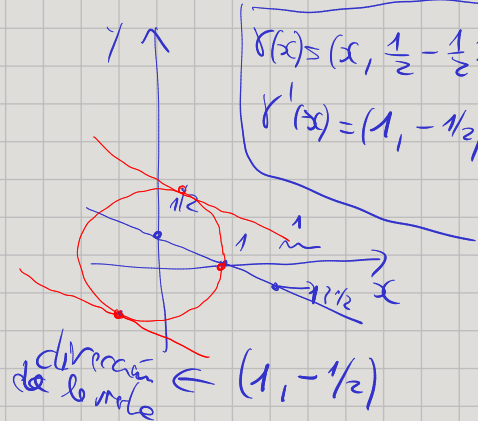
$$P_1 = (\cos(63.4^\circ), \sin(63.4^\circ))$$

$$P_2 = (\cos(243.4^\circ), \sin(243.4^\circ))$$

$$\Rightarrow y = \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$\gamma(x) = (x, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x)$$

$$\gamma'(x) = (1, -1/2)$$



7. Sea C la curva imagen de la función vectorial $\vec{\sigma}(t) = (t^2, t^3 + 1, t^3 - 1), t \in [1, 4]$.

- Halle la ecuación de su recta tangente y su plano normal en el punto $(4, 9, 7) = \vec{\sigma}(2)$
- Calcule el módulo de su vector tangente $\vec{\sigma}'(t_0)$, si $\vec{\sigma}(t_0) = (4, 9, 7)$.
- Verifique que C es una curva plana.
- Halle la intersección de C con el plano de ecuación $y + z = 2$.
- Halle los puntos de C para los cuales la recta tangente a C en ellos es ortogonal al plano de ecuación $x + 9y + 3z = 0$.

Curva en $\mathbb{R}^3$, plano normal

Supongamos por ejemplo la curva C de ecuación es $\vec{X} = \vec{g}(t)$ con $t \in I$, en el espacio xyz .

De acuerdo a lo visto, si $\vec{A} = \vec{g}(t_0)$ es punto simple y regular de C , tenemos la siguiente ecuación.

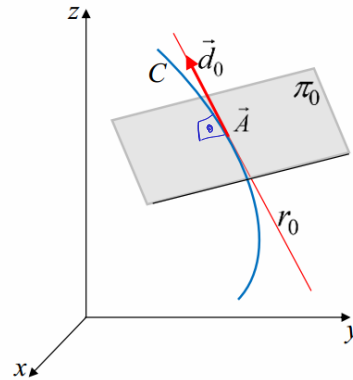
recta tangente r_0 en $\vec{A}$: $\vec{X} = \vec{A} + u \vec{g}'(t_0)$ con $u \in \mathbb{R}$,

donde $\vec{d}_0 = \vec{g}'(t_0) \neq \vec{0}$ es un vector director de r_0 .

El **plano normal** π_0 a la curva en $\vec{A}$, es perpendicular a r_0 en dicho punto.

Entonces $\vec{d}_0$ es ortogonal al plano (ver gráfico), de donde, una ecuación cartesiana para dicho plano normal es:

plano normal π_0 en $\vec{A}$: $(\vec{X} - \vec{A}) \cdot \vec{d}_0 = 0$.



$$a) \vec{\sigma}'(t) = (2t, 3t^2, 3t^2) \quad t \in [1, 4]$$

obtengo el t_0 / $\vec{\sigma}(t_0) = (4, 9, 7) = (t^2, t^3 + 1, t^3 - 1)$, verifico $\vec{\sigma}(2) = (2^2, 2^3 + 1, 2^3 - 1) = (4, 9, 7)$
 $t^2 = 4 \Leftrightarrow |t| = 2, t = 2$

vector tangente: $\vec{\sigma}'(2) = (4, 12, 12) \rightarrow$ lo uso como director de la recta t_0
 uso $(1, 3, 3)$ y como normal del plano normal

Recta tangente o curva en $\vec{\sigma}(2)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

Plano normal: $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x + 3y + 3z = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 + 27 + 21$
 $x + 3y + 3z = 52$

b) $t_0 = 2, \|\vec{\sigma}'(2)\| = \|(4, 12, 12)\| = \sqrt{16 + 144 + 144} = \sqrt{304} \approx 17.4$

c) $\vec{\sigma}(t) = (t^2, t^3 + 1, t^3 - 1), t \in [1, 4]$

verifico que es una curva plana, hay un plano que la contiene.

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 + 1 \\ z = t^3 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t^3 = y - 1 \\ t^3 = z + 1 \end{cases} \rightarrow y - 1 = z + 1$$

$$\boxed{y - z = 2}$$

el plano $y - z = 2$ contiene a la curva $\vec{\sigma}(t)$, pues satisface la ec.
 $(t^3 + 1) - (t^3 - 1) = 2 \quad \checkmark$