

$$a) \sigma'(t) = (2t, 3t^2, 3t^3) \quad t \in [1, 4]$$

obteniendo el t_0 $\sigma(t_0) = (4, 9, 7) = (t^2, t^3+1, t^3-1)$, verificando $\sigma(2) = (2^2, 2^3+1, 2^3-1) = (4, 9, 7)$
 $t^2 = 4 \Leftrightarrow |t| = 2, t = 2$

verificar tangente: $\sigma'(2) = (4, 12, 12) \rightarrow$ lo usamos como director de la recta tangente
 uso $(1, 3, 3)$ como normal del plano normal

Recta tangente o curva en $\sigma(2)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

Plano normal: $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x + 3y + 3z = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 + 27 + 21 = 52$
 $x + 3y + 3z = 52$

b) $t_0 = 2, \|\sigma'(2)\| = \|(4, 12, 12)\| = \sqrt{16 + 144 + 144} = \sqrt{304} \approx 17.4$

c) $\sigma(t) = (t^2, t^3+1, t^3-1), t \in [1, 4]$

verificamos que es una curva plana, hay un plano que la contiene

$\overline{PA} = \overline{A-P}$ ✓

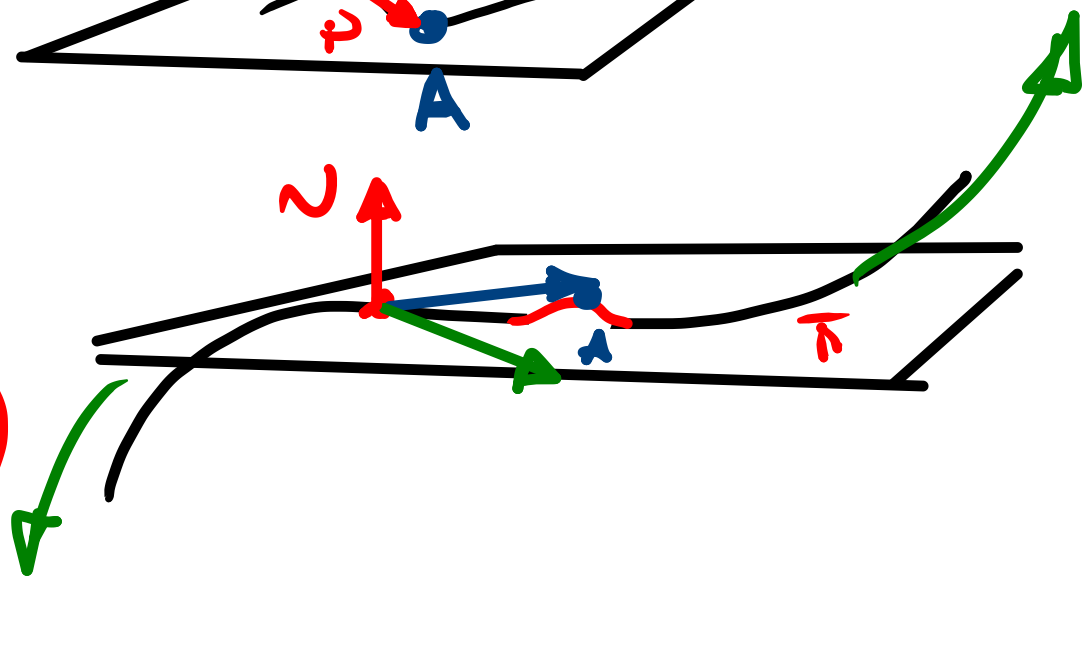
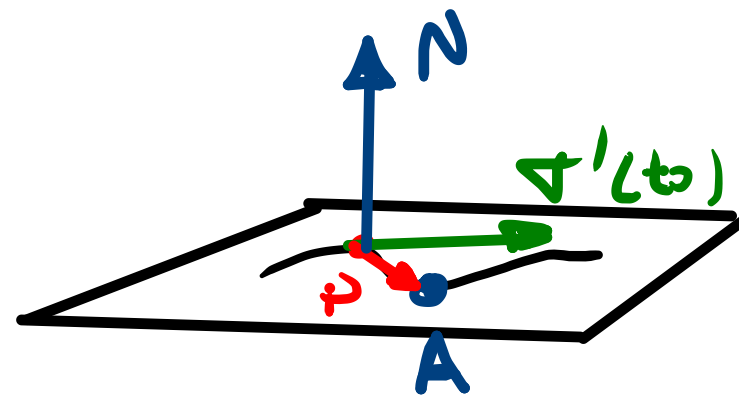
1. Hallar π
 2. verificar $\forall t$

$\nabla(1) = (1, 2, 0)$

$\overline{A} = (1, 2, 0)$

$P = (4, 9, 7)$ ✓

$\nabla'(t_0) = (4, 12, 12)$ ✓



$$\vec{PA} = (1, 2, 0) - (4, 9, 7) = (-3, -7, -7)$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 12 & 12 \end{vmatrix} = (0; -7 \cdot 4 + 3 \cdot 12; -3 \cdot 12 + 7 \cdot 4)$$

$$\vec{N} = (0; 8; -8)$$

$$\vec{N} \cdot (x - \vec{P}) = 0$$

$$(0; 8; -8) \cdot (x, y, z) = (0; 8; -8) \cdot (4; 9; 7)$$

$$8y - 8z = 16 \rightarrow \boxed{y - z = 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = t^3 + 1 \\ z = t^3 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow t^3 + 1 - (t^3 - 1) = 2 \quad \checkmark$$

como se cumple $\forall t \in [1, 4]$

$\Rightarrow$ la curva es plana

10. En los siguientes casos, halle una parametrización regular de la curva definida por el par de ecuaciones y obtenga una ecuación para su recta tangente en el punto que se indica.

- a) $y = 4 - x, z = 4 - x^2, A = (1, 3, 3)$
- b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z = \sqrt{x^2 + y^2}, A = (0, 1, 1)$
- c) $z = x + y^2, x = y^2, A = (4, 2, 8)$
- d) $x^2 + y^2 + z^2 = 6, z = x^2 + y^2, A = (1, 1, 2)$

Definición 1.3 Llamaremos *representación paramétrica regular* (abreviadamente, parametrización regular) a toda aplicación $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, que cumpla:

- (i) σ es de clase C^1 .
- (ii) $\sigma'(t) = (\sigma'_1(t), \dots, \sigma'_n(t)) \neq \underline{0}$ para todo $t \in I$.

las funciones derivadas $\sigma'_1(t), \sigma'_2(t), \dots$ sean funciones continuas

entonces podemos considerar las siguientes parametrizaciones de C :

(a) $\sigma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto \sigma(t) = (t, 0);$

$\sigma'(t) = (1; 0) \stackrel{?}{=} (0; 0)$ regular ✓
 cont. cont.

(b) $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto \varphi(t) = (e^t, 0);$

(c) $\phi : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto \phi(t) = (t^3 + 1, 0);$

$\varphi'(t) = (\underbrace{e^t}_{\text{cont.}}; 0) \stackrel{?}{=} (0; 0)$ regular

(d) $g : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto g(t) = \begin{cases} (t+1, 0) & \text{si } -1 < t < 0, \\ (1, 0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ (t, 0) & \text{si } 1 < t; \end{cases}$

$\phi'(t) = (\underbrace{3t^2}_{\text{cont.}}; 0) \stackrel{?}{=} (0; 0)$ NO es regular
 $t=0 \rightarrow \bar{0}$
 $\hookrightarrow \in \text{Dominio de } \phi(t)$

entonces podemos considerar las siguientes parametrizaciones de C :

(a)

$$\begin{aligned}\sigma : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \sigma(t) = (t, 0); \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi(t) = (e^t, 0); \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\phi : (-1, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \phi(t) = (t^3 + 1, 0); \end{aligned}$$

(d)

$$g : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto g(t) = \begin{cases} (t+1, 0) & \text{si } -1 < t < 0, \\ (1, 0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ (t, 0) & \text{si } 1 < t; \end{cases}$$

$$g'(t) = \begin{cases} (1; 0) \\ (0; 0) \\ (1; 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -1 < t < 0 \\ 0 < t < 1 \\ t > 1 \\ t = 0? \\ t = 1? \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g'(t) = (0; 0) \quad \updownarrow \neq \quad \text{no existe l.}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g'(t) = (1; 0) \quad \Rightarrow \text{no es continuo}$$

$g(t)$ no es regular

(e)

$$f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto f(t) = \begin{cases} (1-t, 0) & \text{si } 0 < t < 1, \\ (t, 0) & \text{si } 1 \leq t; \end{cases}$$

$\rightarrow$

(f)

$$h : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto h(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } 0 < t < 1, \\ (2t-1, 0) & \text{si } 1 \leq t. \end{cases}$$

$$f'(t) = \begin{cases} (-1; 0) & 0 < t < 1 \\ (1; 0) & t > 1 \\ \text{no existe} & t = 1 \end{cases}$$

no es continua $\Rightarrow$
no es regular

10. En los siguientes casos, halle una parametrización regular de la curva definida por el par de ecuaciones y obtenga una ecuación para su recta tangente en el punto que se indica.

a) $y = 4 - x, z = 4 - x^2, A = (1, 3, 3)$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z = \sqrt{x^2 + y^2}, A = (0, 1, 1)$

c) $z = x + y^2, x = y^2, A = (4, 2, 8)$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 6, z = x^2 + y^2, A = (1, 1, 2)$

(a) $C = \begin{cases} y = 4 - x \\ z = 4 - x^2 \end{cases}$

$\gamma(t) = (t; 4 - t; 4 - t^2)$

$\gamma'(t) = (1; -1; -2t)$

continuas ✓

$\neq \vec{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
 γ es regular

$x = t$

$y = 4 - t$

$z = 4 - t^2$

r_{t_0} :

$\lambda \cdot \gamma'(t_0) +$

$\gamma(t_0) A$

$\lambda \in \mathbb{R}$

10. En los siguientes casos, halle una parametrización regular de la curva definida por el par de ecuaciones y obtenga una ecuación para su recta tangente en el punto que se indica.

a) $y = 4 - x$, $z = 4 - x^2$, $A = (1, 3, 3)$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A = (0, 1, 1)$

c) $z = x + y^2$, $x = y^2$, $A = (4, 2, 8)$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $z = x^2 + y^2$, $A = (1, 1, 2)$

$C = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \rightarrow \text{esfera} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \text{cono} \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \text{¿?}$

$z^2 + z^2 = 2$

$z^2 = 1$

$\hookrightarrow z = 1$

$\hookrightarrow \cancel{z = -1}$

$$x^2 + y^2 + 1 = 2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

circulo

$$\boxed{R=1}$$

$$t \in [0; 2\pi)$$

$$\gamma(t) = (1 \cdot \cos(t); \underbrace{2 \sin(t)}_{\text{continua}}; 1)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin(t); \cos(t); 0)$$

$$\neq \vec{0} \quad \forall t \in [0; 2\pi)$$

es regular

10. En los siguientes casos, halle una parametrización regular de la curva definida por el par de ecuaciones y obtenga una ecuación para su recta tangente en el punto que se indica.

a) $y = 4 - x$, $z = 4 - x^2$, $A = (1, 3, 3)$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A = (0, 1, 1)$

c) $z = x + y^2$, $x = y^2$, $A = (4, 2, 8)$

d) $\underbrace{x^2 + y^2}_{z} + z^2 = 6$, $z = \underbrace{x^2 + y^2}$, $A = (1, 1, 2)$

$$C = \begin{cases} z = x + y^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\boxed{z = 2y^2}$$

$$x = y^2$$

$$y = y$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} z &= 2t^2 \\ x &= t^2 \\ y &= t \end{aligned}$$

$$\gamma(t) = (t^2; t; 2t^2)$$

$$\gamma'(t) = (\underbrace{2t; 1; 4t}_{\text{continua}}) \neq 0 \text{ es regular}$$

1. Conjuntos de nivel

1. En los siguientes casos, determine y grafique el dominio natural de f y analice si es un conjunto cerrado, abierto, acotado. Describa también los conjuntos de nivel de f y esboce su gráfico.

— a) $f(x, y) = 3(1 - x/2 - y/2)$ — b) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

— c) $f(x, y) = 25 - x^2$ — d) $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$

— e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ — [f) $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 16)^{-1/2}$]

— [g) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$] — h) $f(x, y, z) = \ln(4 - x - y)$

→ i) $f(x, y, z) = x + y + 2z$ → j) $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 - z^2}$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y), f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / z = f(x, y)$$

Dominió de la función → conjunto en $\mathbb{R}^2$

Imagen de $f \rightarrow$ en $\mathbb{R}^3$

C_k : son los puntos del dominio de f /

$$f(x, y) = k \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = 3 \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right) = z$$

$$\text{Dom}(f): \mathbb{R}^2$$

- abierto
- NO acotado

$$C_k: \quad K = 3 \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right)$$

$$\frac{K}{3} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 - \frac{K}{3}$$

$$\boxed{x + y = 2 - \frac{2K}{3}}$$

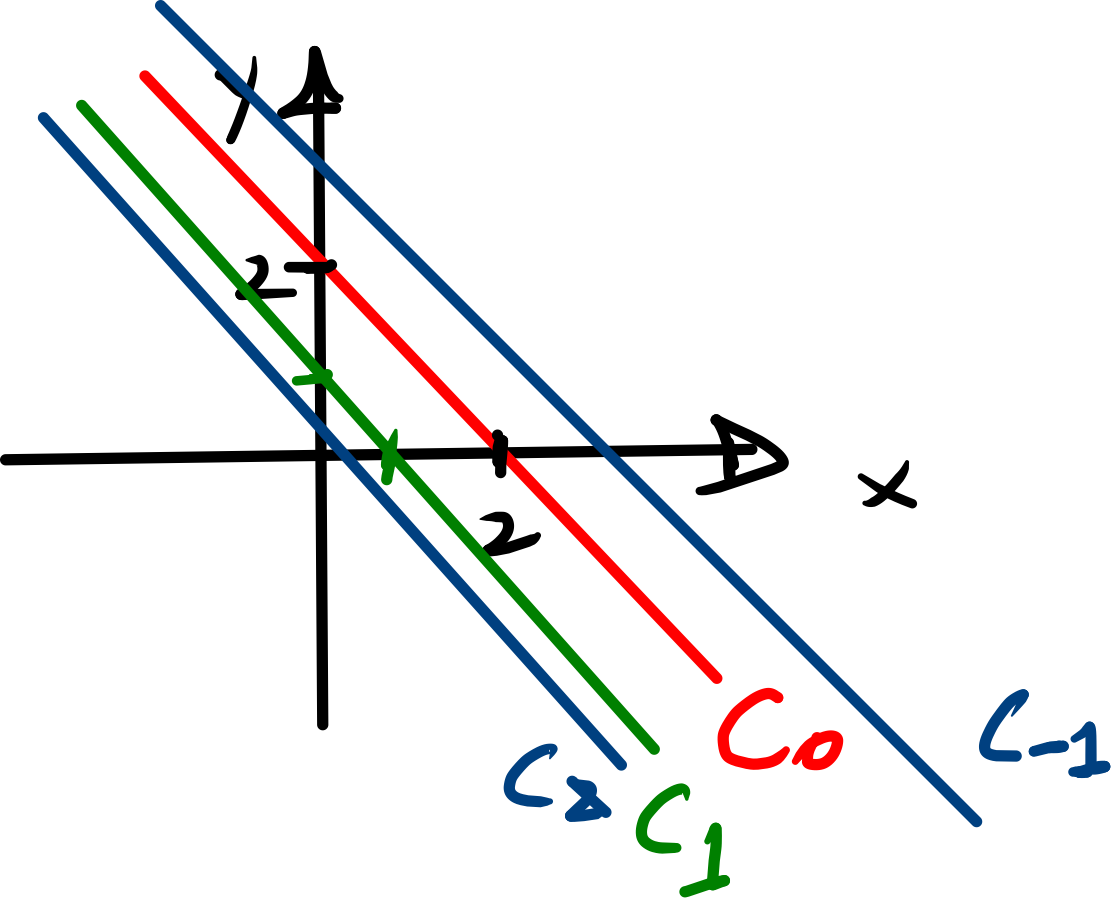
Conjunto de nivel cero

$$K=0 \rightarrow x+y=2$$

$$C_0: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=2\}$$

nivel 1: $K=1$

$$x+y=\frac{4}{3} \rightarrow C_1: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=\frac{4}{3}\}$$



$$f) f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 16}} > 0$$

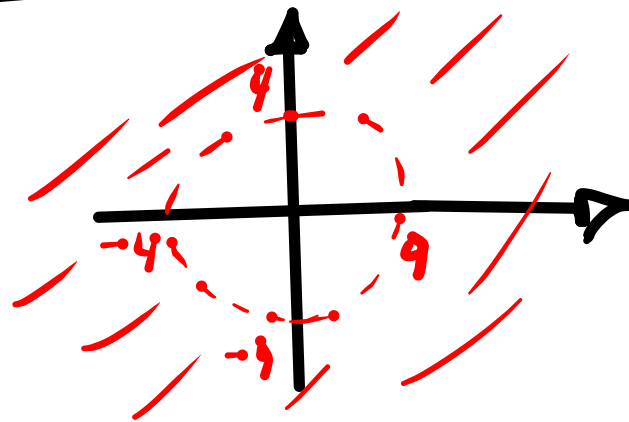
dominio

$$x^2 + y^2 - 16 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 16 \quad 4^2$$

• abierto

• no acotado



$$\underline{\underline{C_K}}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 16}}$$

$$K^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 - 16}$$

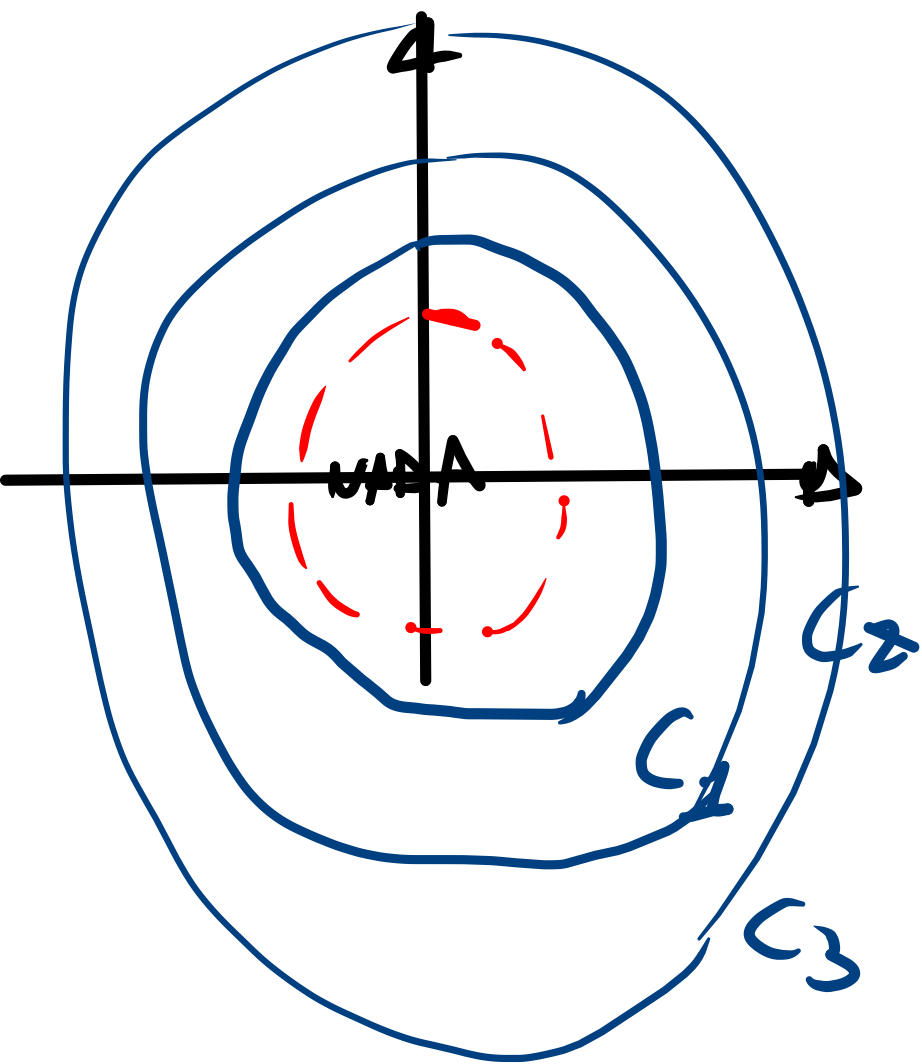
$$x^2 + y^2 - 16 = \frac{1}{K^2}$$

$$x^2 + y^2 = 16 + \frac{1}{K^2}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 4^2 + \left(\frac{1}{K}\right)^2$$

$$C_0 = i?$$

$$C_0 = \emptyset$$



$$f(x, y, z) = \ln(\underbrace{4 - x - y}_{> 0})$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Dom}(f): A \subset \mathbb{R}^3$$

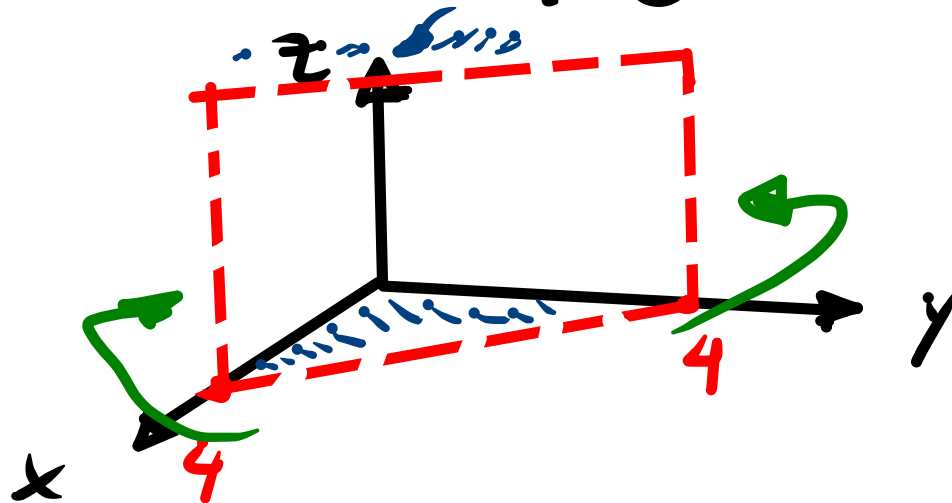
plane

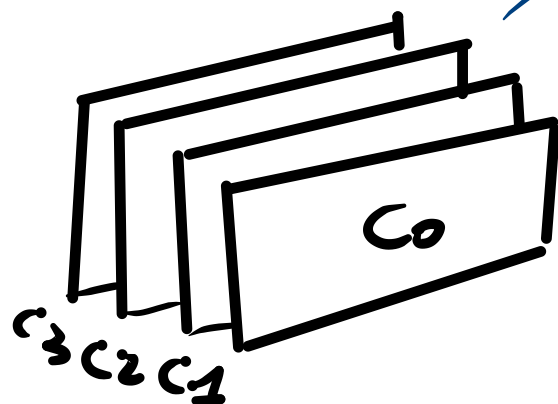
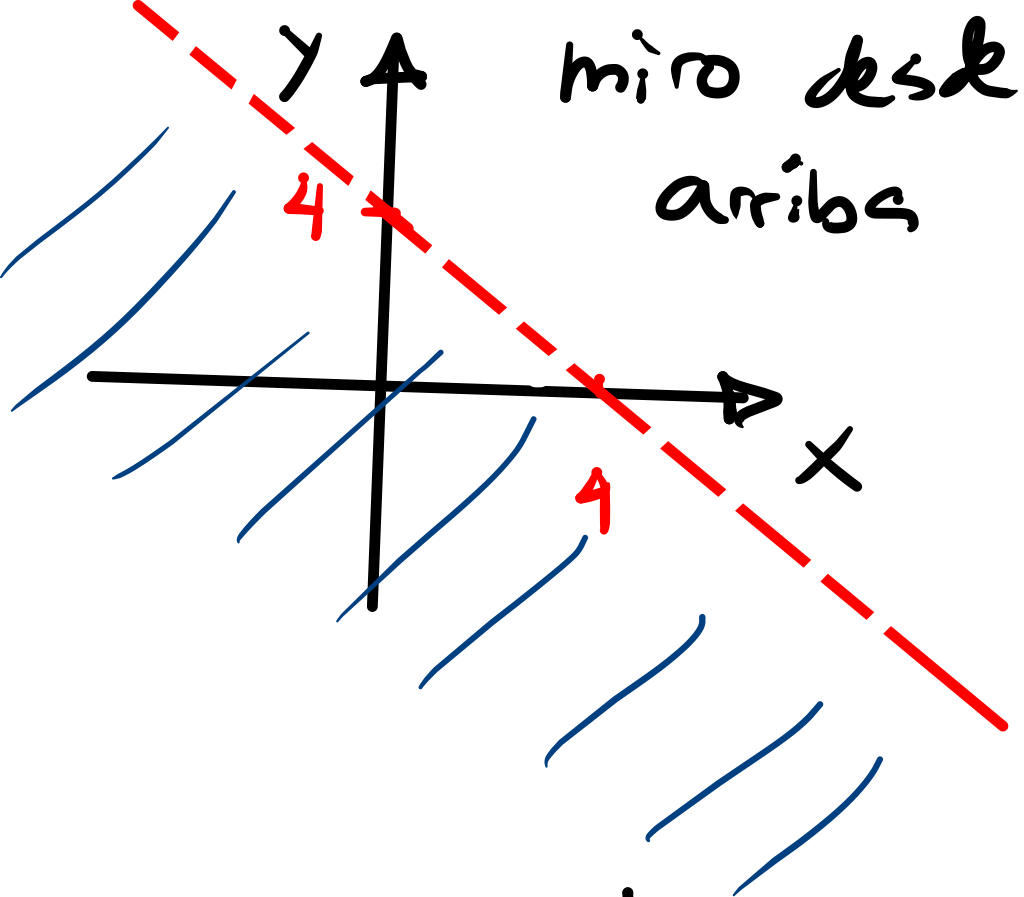
$$4 - x - y > 0$$

$$\rightarrow 4 > x + y$$

$$(0, 0, 0)$$

$$4 > 0 \checkmark$$





$$\begin{aligned}
 & \underline{C_K} \\
 & K = \ln(4 - x - y) \\
 & e^K = 4 - x - y \\
 & \boxed{x + y = 4 - e^K}
 \end{aligned}$$

$C_0 \checkmark \quad C_0: \{(x, y, z) \in \text{Dom}(f) /$
 $\quad \quad \quad x + y = 3\}$