Transformaciones lineales

Introducción

Definición

Sean $\mathbb{V}_K$ y $\mathbb{W}_K$ dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo de escalares K.

La función $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ es una transformación lineal si y sólo si cumple:

$*$

i. $T(x+y) = T(x) + T(y), \ \forall x, y \in \mathbb{V}_K$

ii. $T(\alpha x) = \alpha T(x), \ \forall \alpha \in K, \forall x \in \mathbb{V}_K$

$$* \quad T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

Ejemplos

La función $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1)^2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$ *no* es una transformación lineal; en efecto:

sean por ejemplo $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$T(x+y) = T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ pero $T(x)+T(y) = T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, es decir,

$$T(x+y) \neq T(x) + T(y)$$

La función $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = \begin{pmatrix} x & 2x \end{pmatrix}^T$ *es* una transformación lineal porque

i. $T(x+y) = \begin{pmatrix} x+y & 2(x+y) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x+y & 2x+2y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x & 2x \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} y & 2y \end{pmatrix}^T =$
$= T(x) + T(y), \ \forall x, y \in \mathbb{V}_K$

ii. $T(\alpha x) = \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha(2x) \end{pmatrix}^T = \alpha \begin{pmatrix} x & 2x \end{pmatrix}^T = \alpha T(x), \ \forall \alpha \in K, \forall x \in \mathbb{V}_K$

Dos ejemplos muy importantes

Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

y también:

$$\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \alpha \in \mathbb{R}$$

Sean f y g funciones derivables, y $\alpha \in \mathbb{K}, (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f + g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g)$$

y también:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha f) = \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)$$

Transformaciones lineales especiales

- Transformación identidad

$$I_{\mathbb{V}_K} : \mathbb{V}_K \to \mathbb{V}_K : I_{\mathbb{V}_K}(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{V}_K$$

$$I_{\mathbb{W}_K} : \mathbb{W}_K \to \mathbb{W}_K : I_{\mathbb{W}_K}(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{W}_K$$

- Transformación nula

$$O_{\mathcal{L}} : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K : O_{\mathcal{L}}(x) = 0_{\mathbb{W}_K} \quad \forall x \in \mathbb{V}_K$$

- Transformaciones matriciales

Dada la matriz $A \in K^{m\times n}$ la aplicación $T : K^n \to K^m : T(x) = Ax$ es una transformación lineal.

Funcional lineal

Definición: Sea $\mathbb{V}_K$ un espacio vectorial definido sobre el cuerpo de escalares K.

Se llama *funcional lineal* sobre $\mathbb{V}_K$ a una función $f : \mathbb{V}_K \to K$ que cumple:

i. $f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{V}_K$

ii. $f(\alpha x) = \alpha f(x), \ \forall \alpha \in K, \forall x \in \mathbb{V}_K$

$\mathbb{V} = \mathbb{K}$

Ejemplo: la traza de una matriz

Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y K es un cuerpo, dada la matriz $A \in K^{n\times n} = (a_{ij}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, se define la *traza* de la matriz A como:

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$$

La aplicación $\operatorname{tr} : K^{n\times n} \to K$ es un funcional lineal. En efecto, sean $A, B \in K^{n\times n}, \alpha \in K$,

i. $\operatorname{tr}(A + B) = (a_{11} + b_{11}) + \ldots + (a_{nn} + b_{nn}) = (a_{11} + \ldots + a_{nn}) + (b_{11} + \ldots + b_{nn}) =$
$= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$

ii. $\operatorname{tr}(\alpha \mathrm{A}) = \alpha a_{11} + \ldots + \alpha a_{nn} = \alpha (a_{11} + \ldots + a_{nn}) = \alpha \operatorname{tr}(A)$

Un ejemplo muy importante: la función de coordenadas

Sea $\mathbb{V}_K$ un K-espacio vectorial de dimensión finita n y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathbb{V}_K$. Sabemos que todo vector $v \in \mathbb{V}_K$ se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de B: $v \doteq x_1 v_1 + ... + x_n v_n$.

Entonces, para cada j: $1 \leq j \leq n$, sea $\phi_j : \mathbb{V}_K \to K$ definida por

$$\phi_j(v) = x_j$$

Las aplicaciones $\phi_1, ..., \phi_n$ son funcionales lineales sobre $\mathbb{V}_K$. En efecto, si $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$ y $w = y_1 v_1 + ... + y_n v_n$ se cumple que para cada j: $1 \leq j \leq n$,

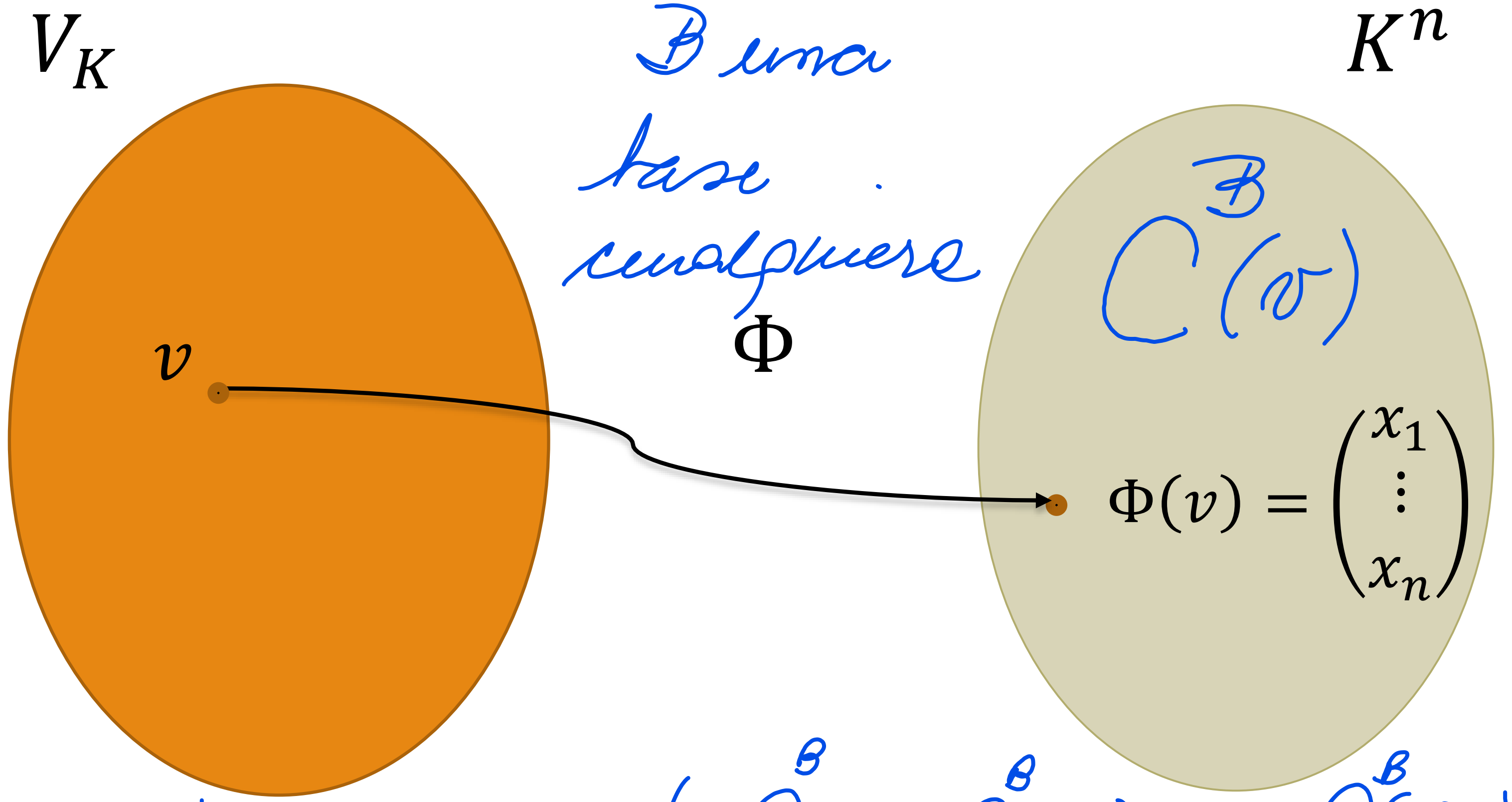
i. $\phi_j(v + w) = x_j + y_j = \phi_j(v) + \phi_j(w), \ \forall v, w \in \mathbb{V}_K$

ii. $\phi_j(\alpha v) = \alpha x_j = \alpha \phi_j(v), \ \forall \alpha \in K, \forall v \in \mathbb{V}_K$

Observamos que el funcional ϕ_j asigna a cada vector $v \in \mathbb{V}_K$ la componente j-ésima de su vector de coordenadas en la base B.

La función de coordenadas

De este modo, la aplicación $\Phi : \mathbb{V}_K \to K^n$ es la transformación lineal que asigna a cada vector de $\mathbb{V}_K$ su vector de coordenadas en la base B.



$\{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ LI $\Rightarrow \{C^{\mathcal{B}}(v_1)\ C^{\mathcal{B}}(v_2) \ldots C^{\mathcal{B}}(v_n)\}$ LI

Propiedades de las transformaciones lineales

1. $T_{\mathbb{V}_K} : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ es una transformación lineal, entonces $T\left(0_{\mathbb{V}_K}\right) = 0_{\mathbb{W}_K}$.

Demostración: Podemos escribir $0_{\mathbb{V}_K} = 0_{\mathbb{V}_K} + 0_{\mathbb{V}_K}$
Aplicando la transformación T a ambos miembros: $T\left(0_{\mathbb{V}_K}\right) = T\left(0_{\mathbb{V}_K} + 0_{\mathbb{V}_K}\right)$; como T es lineal resulta:

$$T\left(0_{\mathbb{V}_K}\right) = T\left(0_{\mathbb{V}_K}\right) + T\left(0_{\mathbb{V}_K}\right)$$

es decir,

$$T\left(0_{\mathbb{V}_K}\right) - T\left(0_{\mathbb{V}_K}\right) = T\left(0_{\mathbb{V}_K}\right)$$

Luego

$$0_{\mathbb{W}_K} = T\left(0_{\mathbb{V}_K}\right)$$

También se cumple, en virtud de la linealidad de T,

$$T\left(\alpha 0_{\mathbb{V}_K}\right) = \alpha T\left(0_{\mathbb{V}_K}\right) = \alpha 0_{\mathbb{W}_K} = 0_{\mathbb{W}_K}, \quad \forall \alpha \in K$$

Propiedades de las transformaciones lineales

2. Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}_K$. Entonces

Preserva las comb. lineales

$$T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(v_i), \alpha_i \in K$$

3. Sean $f : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ y $g : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ dos transformaciones lineales sobre el mismo cuerpo K. Las funciones $f \pm g : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ son transformaciones lineales.

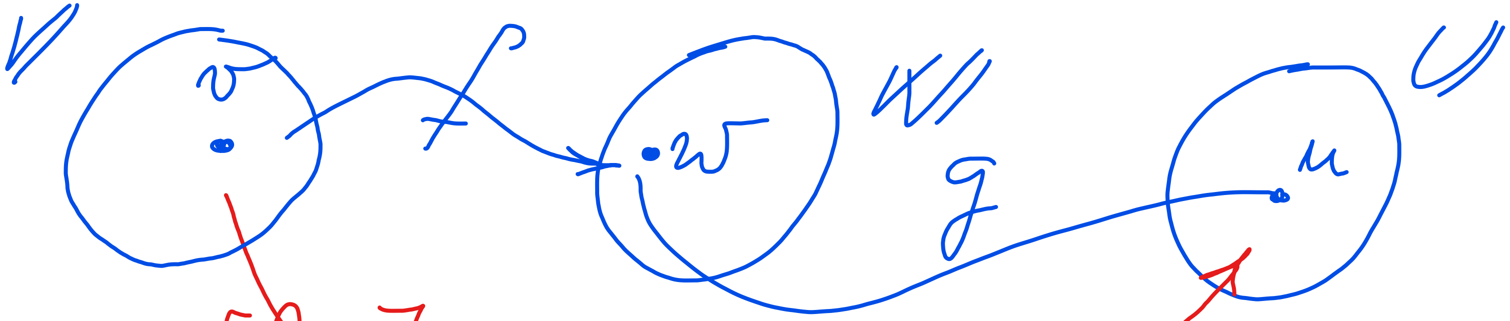
4. Sea $f : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ y $\alpha \in K$. Entonces la función $\alpha f : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ es una transformación lineal.

Composición de transformaciones lineales

Definición: Sean $f : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ y $g : \mathbb{W}_K \to \mathbb{U}_K$ dos transformaciones lineales sobre el mismo cuerpo de escalares K. Entonces se define la *composición* de g con f, y se denota $g \circ f$, como

$$(g \circ f) : \mathbb{V}_K \to \mathbb{U}_K : (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right), \quad \forall x \in \mathbb{V}_K$$

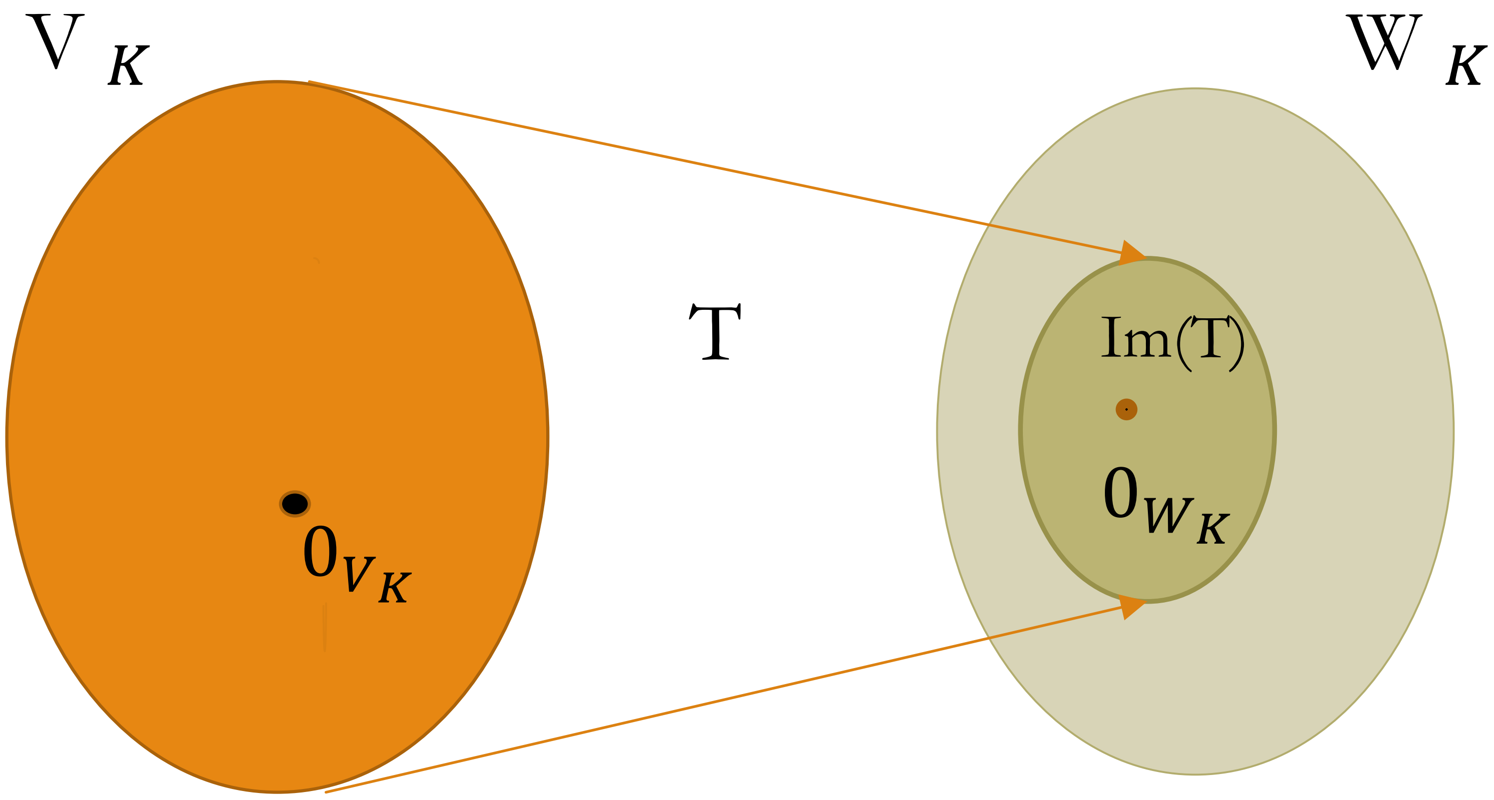
Propiedad: La composición de transformaciones lineales es también una transformación lineal.



$(g \circ f)(v) = g[f(v)] = g(w) = u$

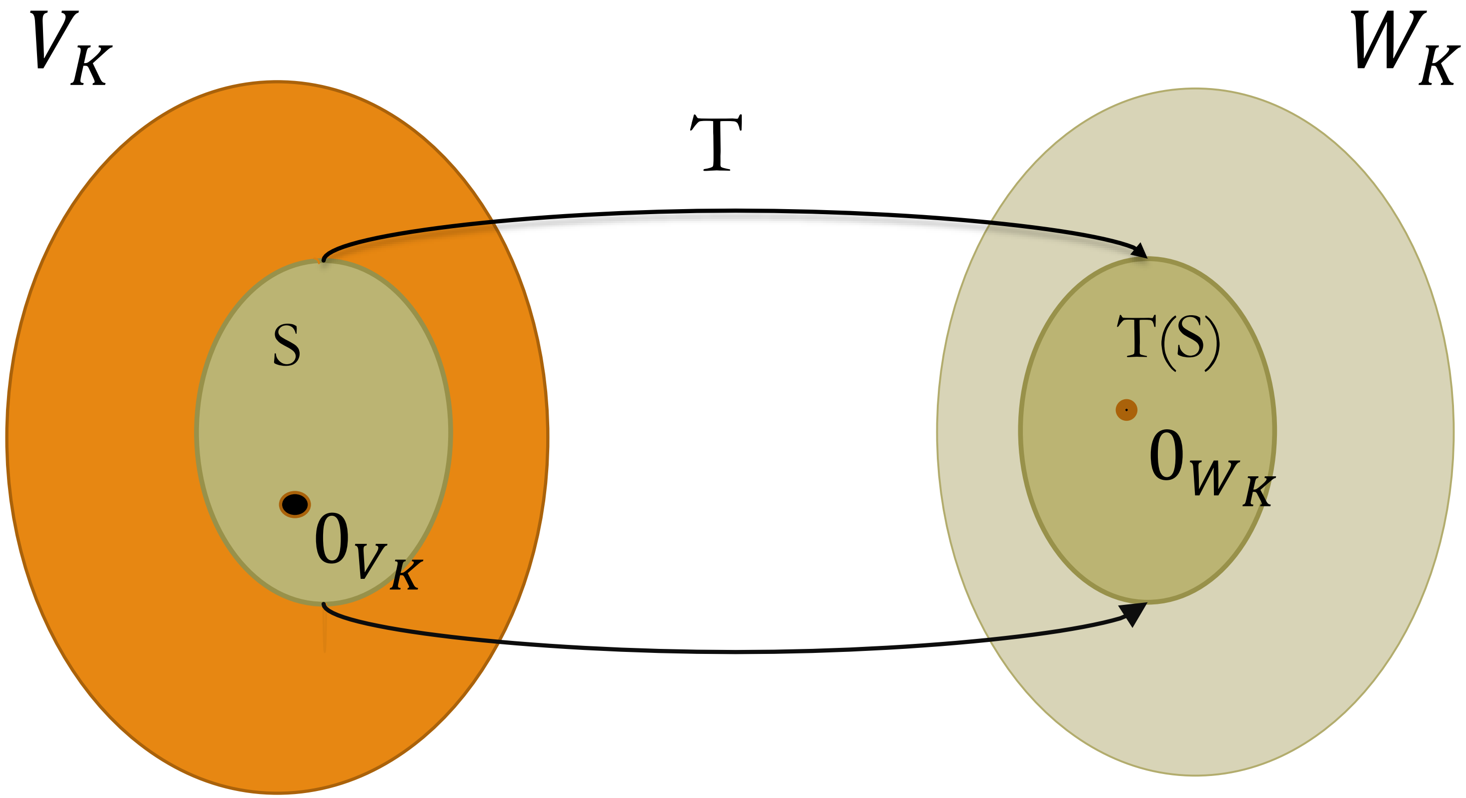
$(g \circ f)(v) = u$

Imagen de una transformación lineal



Definición: La *imagen* de una transformación lineal $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ es el subconjunto de $\mathbb{W}_K$, denotado $\mathrm{Im}(T)$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \{w \in \mathbb{W}_K : w = T(x),\ x \in \mathbb{V}_K\}$.

Imagen de un subespacio de $\boldsymbol{V_K}$



Definición: La imagen de un subespacio $S \subseteq \mathbb{V}_K$ a través de una transformación lineal $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ es el subconjunto de $\mathbb{W}_K$, denotado $T(S)$ tal que
$T(S) = \{w \in \mathbb{W}_K : w = T(x),\ x \in S\}$.

Proposición

Si $S = \mathbb{V}_K$ $\quad Im(T)$

Sea $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ una transformación lineal. Entonces, si S es un subespacio de $\mathbb{V}_K$, se verifica que $T(S)$, la imagen del subespacio S a través de la transformación T, es un subespacio de $\mathbb{W}_K$.

Demostración:

i. $0_{\mathbb{W}_K} \in T(S)$ porque como S es subespacio de $\mathbb{V}_K$, $0_{\mathbb{V}_K} \in S$ y $T(0_{\mathbb{V}_K}) = 0_{\mathbb{W}_K}$, por ser T transformación lineal.

ii. $\forall x, y \in T(S)$: queremos probar que $x + y \in T(S)$.

Si $x \in T(S)$: $x = T(u)$ para algún $u \in S$; (1)
Si $y \in T(S)$: $y = T(v)$ para algún $v \in S$; (2)

de (1) y (2) resulta: $x + y = T(u) + T(v)$; como T es lineal entonces

$$x + y = T(u + v)$$

y como $u + v \in S$ ya que S es subespacio de $\mathbb{V}_K$, resulta que $x + y$ es la imagen de $u + v$, que pertenece a S.

iii. $\forall \alpha \in K, \forall x \in T(S)$: queremos probar que $\alpha x \in T(S)$.

Si $x \in T(S)$: $x = T(u)$ para algún $u \in S$. Entonces $\alpha x = \alpha T(u)$; como T es lineal, entonces

$$\alpha x = T(\alpha u)$$

y como $\alpha u \in S$ ya que S es subespacio de $\mathbb{V}_K$, resulta que αx es la imagen de αu, que pertenece a S.

Corolario: La imagen de una transformación lineal es un subespacio de $\mathbb{W}_K$.

Es el caso en que $S = V$

Ejemplo

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

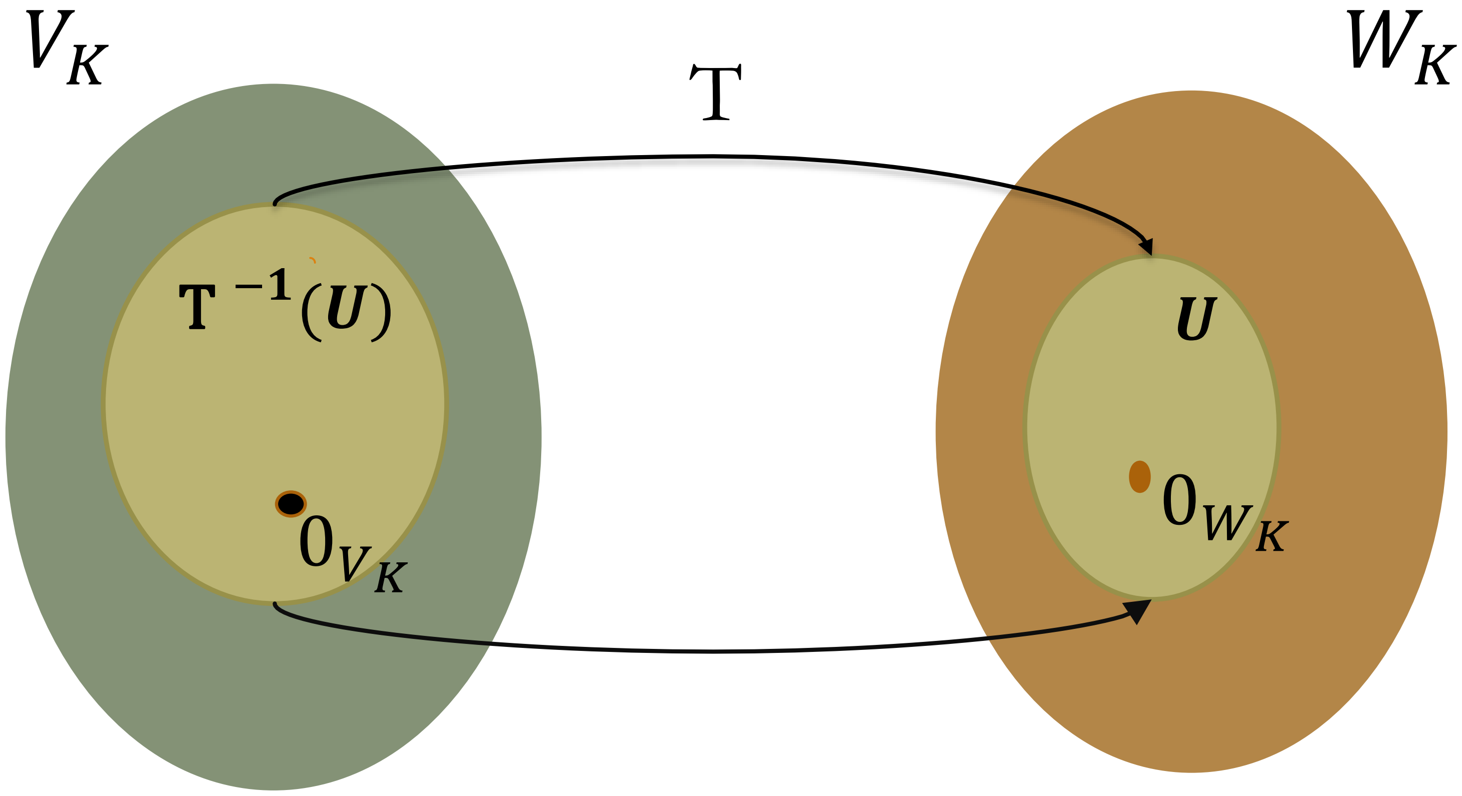
Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que: $T\left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T\right] = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_1 & x_3 - 2x_2 \end{pmatrix}^T$ y $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$.
Los elementos de S son la la forma $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}^T = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$;
aplicando la transformación lineal T a ambos miembros:

$$T(x) = x_1 \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}^T + x_2 \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}^T$$

Luego:

$$T(S) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T\right\} = \mathbb{R}^2$$

Preimagen de un subespacio de $\boldsymbol{W_K}$



Definición: La *preimagen* de un subconjunto de W_K a través de una transformación lineal $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ consta de todos los vectores de $\mathbb{V}_K$ que se transforman en vectores de U a través de la transformación lineal T, y se denota $T^{-1}(U)$ (no confundir con inversa, que, de hecho, podría no existir).

La preimagen de un subespacio

Proposición: Sea $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ una transformación lineal. Entonces, si U es un subespacio de $\mathbb{W}_K$, se verifica que $T^{-1}(U)$, la preimagen del subespacio U a través de la transformación T, es un subespacio de $\mathbb{V}_K$.

Demostración:

i. $0_{\mathbb{V}_K} \in T^{-1}(U)$ porque como U es subespacio de $\mathbb{W}_K$, $0_{\mathbb{W}_K} \in U$ y $T(0_{\mathbb{V}_K}) = 0_{\mathbb{W}_K}$, por ser T transformación lineal.

ii. $\forall u, v \in T^{-1}(U)$: queremos probar que $u + v \in T^{-1}(U)$.

Si $u \in T^{-1}(U)$: $T(u) = x$ para algún $x \in U$ (1)
si $v \in T^{-1}(U)$: $T(v) = y$ para algún $y \in U$ (2) de (1) y (2) resulta: $T(u) + T(v) = x + y$;
como T es lineal entonces

$$T(u+v) = x + y$$

y como $x + y \in U$ ya que U es subespacio de $\mathbb{W}_K$, resulta que $u + v$ es la preimagen de $x + y$.

iii. $\forall \alpha \in K, \forall u \in T^{-1}(U)$: queremos probar que $\alpha u \in T^{-1}(U)$.

Si $u \in T^{-1}(U)$: $T(u) = x$ para algún $x \in U$; entonces $\alpha T(u) = \alpha x$ y como T es lineal

$$T(\alpha u) = \alpha x$$

y como $\alpha x \in U$ porque U es subespacio, resulta que αu pertenece a $T^{-1}(U)$.

¿Cómo obtener la imagen de una transformación lineal?

Propiedad: Sea $\mathbb{V}_K$ un espacio vectorial de dimensión finita n y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathbb{V}_K$. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$,

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$$

Demostración: $y \in \operatorname{Im}(T)$ si y sólo si $y = T(x)$ para algún $x \in \mathbb{V}_K$, es decir,

$$y = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$$

Ejemplo: Sean $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3 : T(p) = \begin{pmatrix} p(1) \\ 2p(1) \\ p(0) \end{pmatrix}$ y la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, $E_{\mathbb{R}_2[x]} = \{1, t, t^2\}$.

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\{T(1), T(t), T(t^2)\} = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

¿En qué caso una transformación lineal está bien definida?

Teorema fundamental de las transformaciones lineales

Sean $\mathbb{V}_K$ y $\mathbb{W}_K$ dos espacios vectoriales, siendo $\mathbb{V}_K$ de dimensión finita n, y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}_K$ y $w_1, \dots, w_n$ vectores cualesquiera de $\mathbb{W}_K$.
Entonces existe una única transformación lineal $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ tal que $T(v_i) = w_i$, $1 \leq i \leq n$.

Ejemplo

Fórmula de T

Hallar la expresión analítica de la transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(t^2 - t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ T(t-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ T(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

como $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ y $\{t^2 - t, t - 1, 1\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}_2[x]$, este conjunto constituye una base de $\mathbb{R}_2[x]$. De este modo T está bien definida. En efecto, expresemos un elemento cualquiera de $\mathbb{R}_2[x]$ como combinación lineal de esta base:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = \alpha\left(t^2 - t\right) + \beta\,(t-1) + \gamma\,(1)$$

$-\alpha + \beta = a_1$

$\beta = a_1 + a_2$

obtenemos así los escalares de esta combinación lineal:

$$\alpha = a_2; \quad \beta = a_1 + a_2; \quad \gamma = a_0 + a_1 + a_2$$

$-\beta + \gamma = a_0$

reemplazando en la expresión de $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ y aplicando a ambos miembros la transformación T, resulta:

$\gamma = a_0 + a_1 + a_2$

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = a_2 T\left(t^2 - t\right) + (a_1 + a_2)\,T\,(t-1) + (a_0 + a_1 + a_2)\,T\,(1)$$

reemplazando las imágenes de $t^2 - t$, $t - 1$, 1:

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a_0 + a_1 + a_2) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

finalmente:

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \begin{pmatrix} a_2 - a_0 \\ -a_0 - 2a_1 - a_2 \end{pmatrix}$$

UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL QUEDA PERFECTAMENTE DETERMINADA SI TENEMOS LOS TRANSFOMADOS DE LOS VECTORES DE UNA BASE DEL ESP. DE SALIDA

Clasificación de transformaciones lineales

Definición: Sean $\mathbb{V}_K$ y $\mathbb{W}_K$ dos espacios vectoriales y $T : \mathbb{V}_K \to \mathbb{W}_K$ una transformación lineal. Entonces:

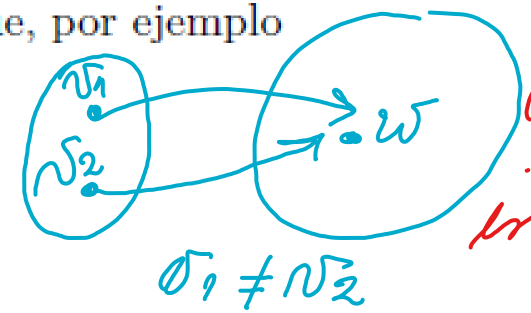
1. T es *inyectiva* (o monomorfismo) si $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in \mathbb{V}_K$
2. T es *sobreyectiva* (o epimorfismo) si $\forall y \in \mathbb{W}_K \quad \exists x \in \mathbb{V}_K : y = T(x)$ $\quad Im(T) = W$
3. T es *biyectiva* (o isomorfismo) si es inyectiva y sobreyectiva.

Transformaciones inyectivas y no inyectivas

1. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : T(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ es inyectiva, ya que si $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$, resulta $x = y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$ no es inyectiva, ya que, por ejemplo

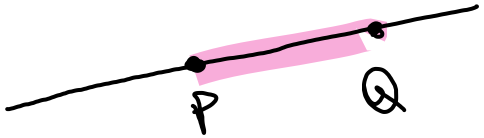
$$T\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = T\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pero } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



No es inyectiva

Una aplicación geométrica

¿Cuál es la imagen del segmento $[P,Q] = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = P + \mathrm{t}(Q-P),\ 0 \leq \mathrm{t} \leq 1\}$ a través de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, donde P y Q son dos puntos distintos de $\mathbb{R}^2$?



$P + t(Q-P)$

$t \in \mathbb{R}$

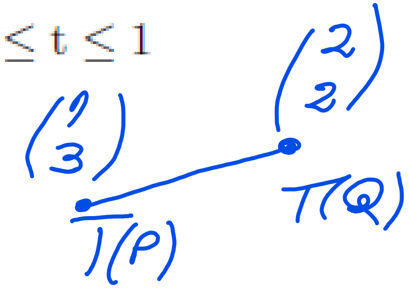
En primer lugar, dado que T es lineal,

$$\forall x \in [P,Q] : T(x) = T(P + \mathrm{t}(Q-P)) = T(P) + \mathrm{t}T(Q-P),\ 0 \leq \mathrm{t} \leq 1$$

Consideremos por ejemplo, $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces $Q - P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, y así

$$\forall x \in [P,Q] : T(x) = T\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \mathrm{t}T\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right],\ 0 \leq \mathrm{t} \leq 1$$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ 0 \leq \mathrm{t} \leq 1$$



Se observa que la imagen de $[P,Q]$ es otro segmento en $\mathbb{R}^2$ y que T es inyectiva (verificarlo).

¿Cuál es la imagen del mismo segmento si la transformación lineal no es inyectiva?

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix}$ que ya hemos visto que no es inyectiva.

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\forall x \in [P, Q] : T(x) = T\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + tT\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right], \; 0 \leq t \leq 1$$

$T(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = T(Q)$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \; 0 \leq t \leq 1$$

La imagen del segmento $[P, Q]$ es ahora el punto $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Transformaciones sobreyectivas y no sobreyectivas

1. La transformación $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2 : T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = \begin{pmatrix} a_0 - a_2 \\ a_0 + a_1 \end{pmatrix}$ es sobreyectiva, ya que $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \exists\, p \in \mathbb{R}_2[x] : T(p) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. En efecto, $p(t) = x_1 + (x_2 - x_1)\, t$ verifica $T(p) = T\left(x_1 + (x_2 - x_1)\, t\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$a_0 - a_2 = x_1$

$a_0 + a_1 = x_2$

$\begin{cases} a_0 \quad - a_2 = x_1 \\ a_0 + a_1 \quad = x_2 \end{cases} \quad E_2 - E_1 \quad \begin{cases} a_0 - a_2 = x_1 \\ a_1 + a_2 = x_2 - x_1 \end{cases}$

Si $a_2 = 0$

2. Por otra parte, $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2} : T(a_0 + a_1 t) = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 - a_1 \\ a_1 & a_1 - a_0 \end{pmatrix}$ no es sobreyectiva, ya que por ejemplo, no existe $p \in \mathbb{R}_1[x]$ tal que $\begin{pmatrix} a_0 & a_0 - a_1 \\ a_1 & a_1 - a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$a_0 = 0$

$-x_1 = a_2$

$a_1 = x_2 - x_1 + x_1$

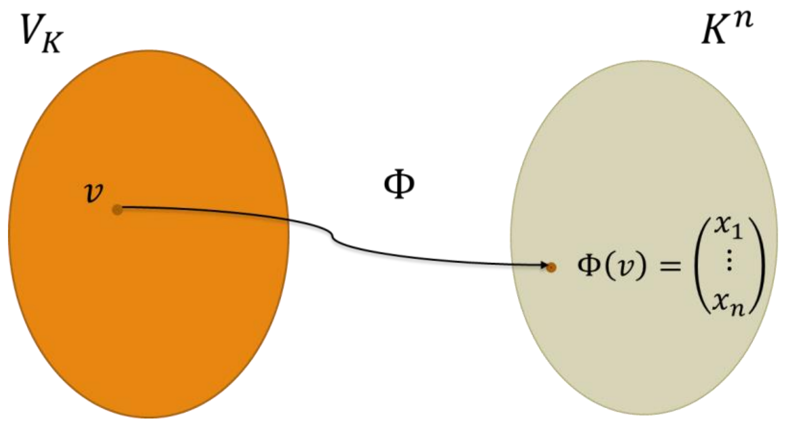
$a_1 = x_2$

$p(t) = x_2 t - x_1 t^2$

Observemos que el sistema $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 - a_1 = -2 \\ a_1 = -1 \\ a_1 - a_0 = 1 \end{cases}$ es incompatible.

Transformaciones biyectivas Uno a uno

Como ejemplo de transformación biyectiva recordemos la función de coordenadas. Sea $\mathbb{V}_K$ un K-espacio vectorial de dimensión finita n y $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathbb{V}_K$. $\Phi : \mathbb{V}_K \to K^n$ es la transformación lineal que asigna a cada vector de $\mathbb{V}_K$ su vector de coordenadas en la base B. Φ es biyectiva.



Efectivamente, como cada vector $v \in \mathbb{V}_K$ se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores de la base B, Φ es inyectiva. Por otra parte, para cualquier vector de K^n es posible formar una combinación lineal de vectores de la base B, empleando sus componentes como los escalares de esta combinación lineal. Por lo tanto, Φ es sobre yectiva.