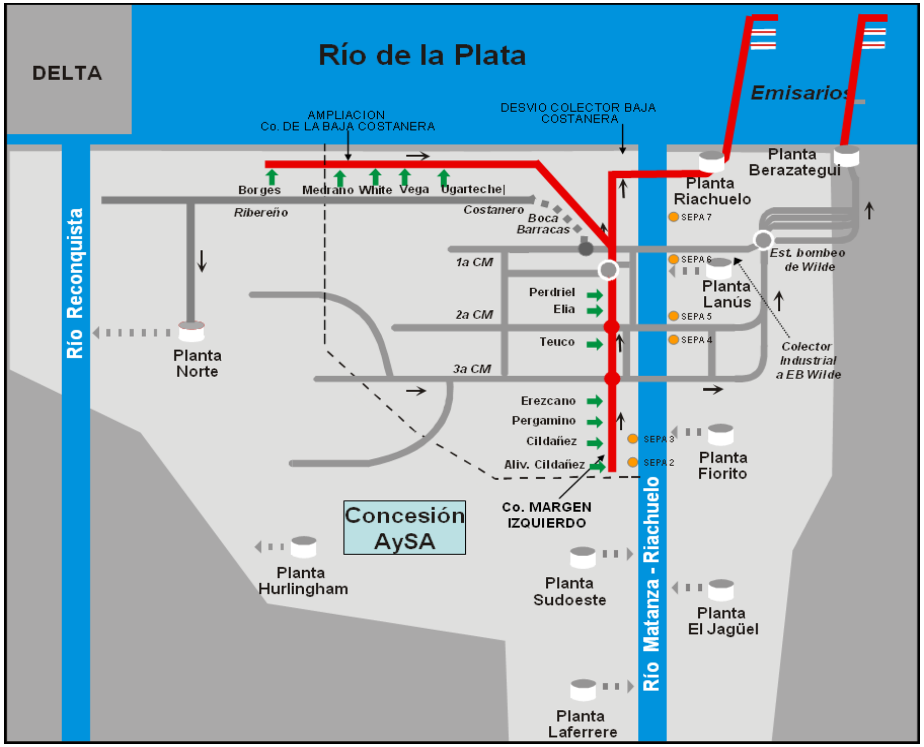
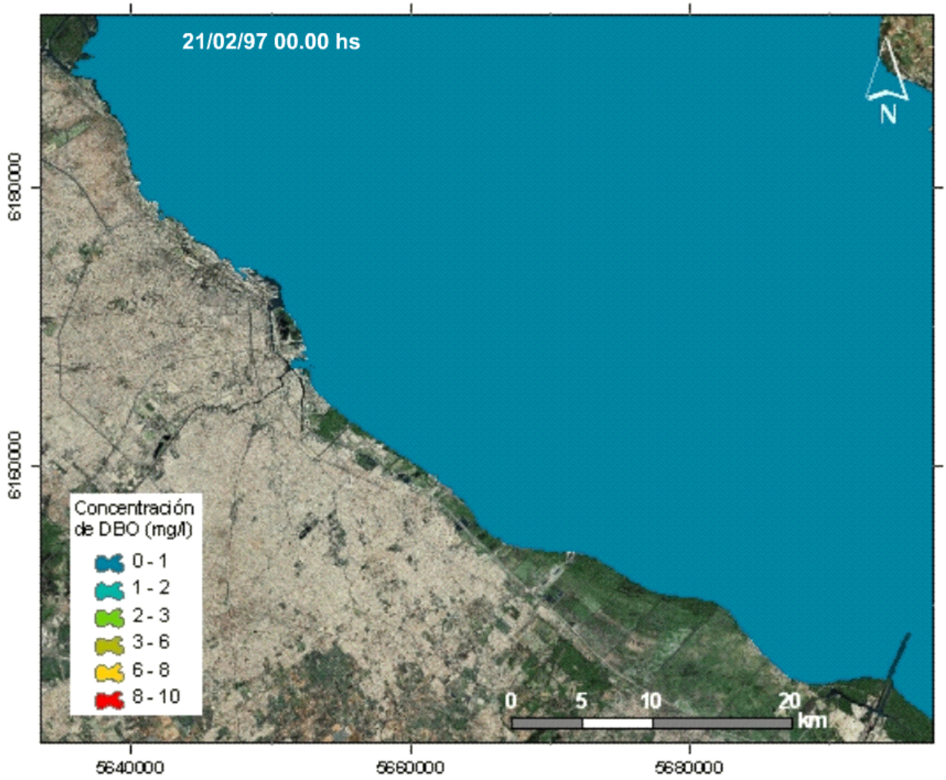
FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

# Ecuaciones no lineales

# Raíces – Ejemplos - Determinación DBO asintótica

## Estudio Plan Matanza-Riachuelo



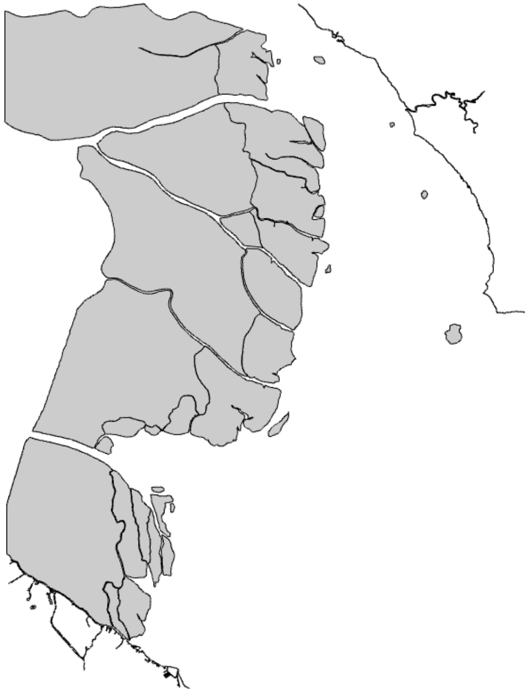

$$y_n(t)=DBO_u-\left(\frac{1}{DBO_u^{n-1}}+(n-1)\cdot K\cdot t\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

(Metcalf, 1998)

# Raíces – Ejemplos – Dinámica sedimento

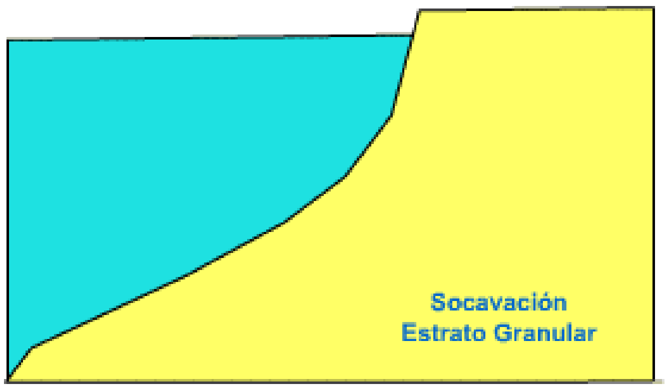
## Modelo avance del Delta

$$LogC_D = -2LogRe + Log\left[\frac{4\Delta\rho g D_p^3 \rho}{3\mu^2}\right]$$



# Raíces – Ejemplos – Dinámica sedimento

## Modelo morfológico de márgenes




$$|\vec{u}_\Delta|\left(u_b^* - v_p^*\cos\psi\right) - a\tau_{C0}^*\left(|\cos\beta|\cos\psi - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\mu_C}\right) = 0$$

$$|\vec{u}_\Delta|\, v_p^*\ \operatorname{sen}\psi + a\tau_{C0}^*\left(|\cos\beta|\operatorname{sen}\psi - \frac{1}{\mu_C}\frac{\operatorname{sen}\ \omega\cos^2\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\omega\cos^2\alpha + \cos^2\omega}}\right) = 0$$

(Laciana & García, 2006)

# Raíces – Métodos

## Métodos

### Cerrados

Bisección

Regula-Falsi

### Abiertos

Punto Fijo

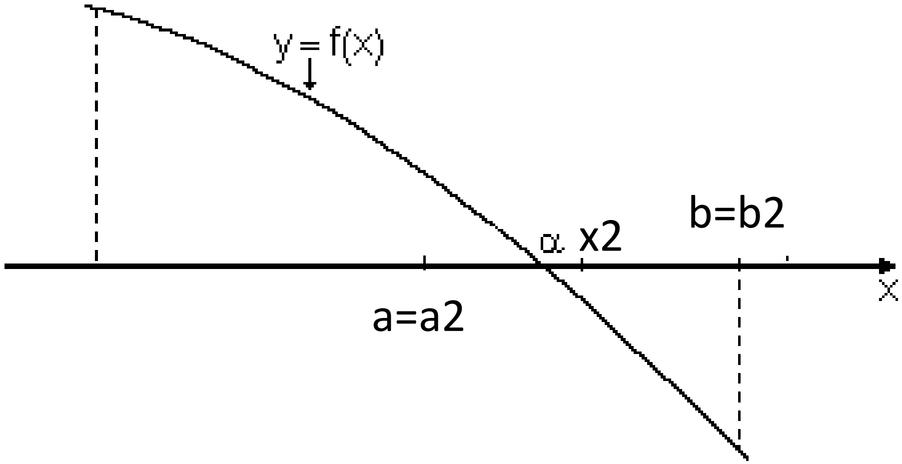
Newton-Raphson

Secante

Secante modificado

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

# Método Cerrado - Bisección



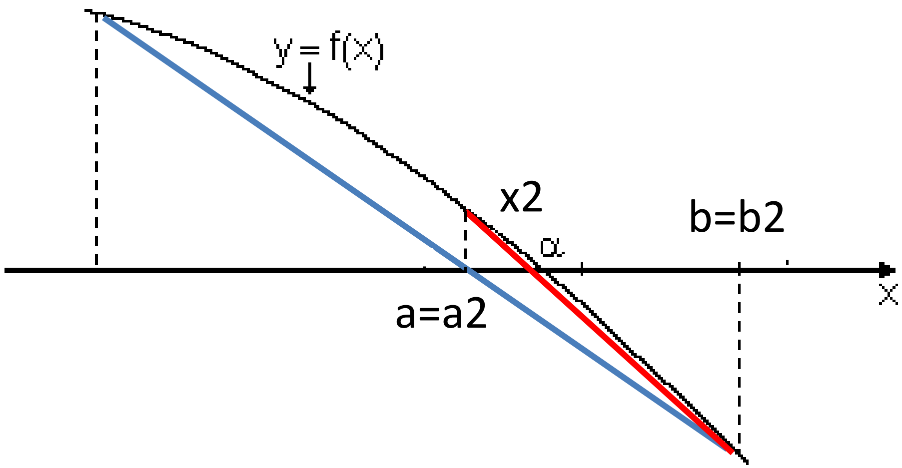

$$f(x) = 0$$

$$si\ f(\alpha) = 0 \qquad \alpha\ es\ raíz$$

$$x_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$$

$Si\ f(a_n).f(x_n) < 0, \quad b_{n+1} = x_n$, de lo contrario, $a_{n+1} = x_n$

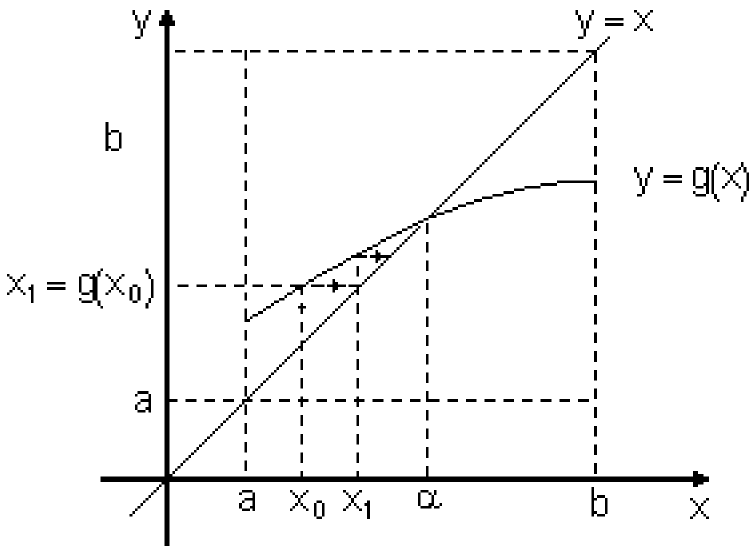
# Método Cerrado – Regula Falsi




$$x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

$Si\ f(a_n).f(x_n) < 0, \quad b_{n+1} = x_n$, de lo contrario, $a_{n+1} = x_n$

# Método Abierto – Punto Fijo



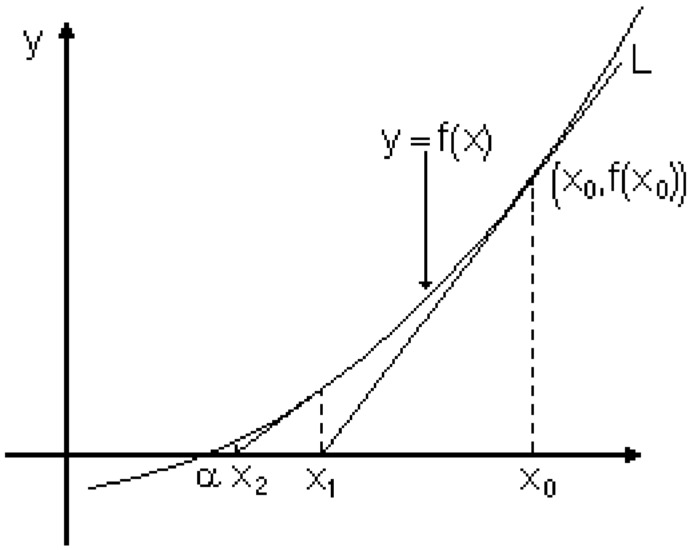

$$f(x) = 0 \qquad x = g(x)$$

$$f(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad f(\alpha) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \alpha = g(\alpha)$$

La función g se dice una **función de iteración de punto fijo**.

$$x_{n+1} = g(x_n)$$ n=1,2,........

# Método Abierto – Newton Raphson



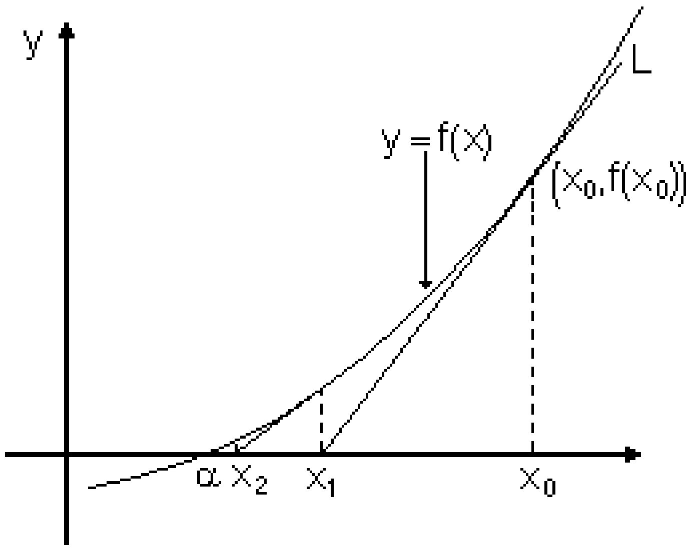

$$f(x) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ n=1,2,........

NR es un caso especial de **iteración de punto fijo** cuando se toma como función de iterción:

$$x = g(x) \qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

# Método Abierto – Secante




$$f(x) = 0$$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$ n=1,2,........

# Raíces – Orden de Convergencia

Definiendo $E_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{E_{n+1}}{E_n^p} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = L$

la sucesión $\{x_n\}$ converge a $\alpha$ con **orden de convergencia p** y error asintótico L

Si n es muy grande $E_{n+1} = L E_n^p$

$$p = \frac{\ln(E_{n+1}) - \ln(E_n)}{\ln(E_n) - \ln(E_{n-1})}$$

# Raíces – Aplicación – Estudio Crecida Río Matanza

Determinar la altura del agua en una sección del Río Matanza para una crecida extraordinaria

$$Q = \frac{1}{n}\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}}S^{1/2}$$

Q = 800 m3/s
b = 30 m
n = 0.022
S = 0.003
Error < $1.10^{5}$

# Método Cerrado - Bisección

GNU Octave

$$Q = \frac{1}{n}\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}}S^{1/2}$$

$$f(h) = \frac{1}{n}\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}}S^{1/2} - Q = 0$$

| n | $a_n$ | $b_n$ | $f(a_n)$ | $f(b_n)$ | $x_n$ | $f(x_n)$ | $x_n$-$x_{n-1}$ | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 30 | -800 | 9600.33007 | 15 | 3492.64166 | - | - |
| 1 | 0 | 15 | -800 | 3492.64166 | 7.5 | 837.949348 | 7.5 | - |
| 2 | 0 | 7.5 | -800 | 837.949348 | 3.75 | -217.398893 | 3.75 | 1 |
| ….. | ….. | ….. | ….. | ….. | ….. | ….. | ….. | ….. |
| ….. | ….. | ….. | ….. | ….. | ….. | ….. | ….. | ….. |
| 20 | 4.61880684 | 4.61883545 | -0.00369681 | 0.00378445 | 4.61882114 | 4.3819E-05 | 1.4305E-05 | 1 |
| 21 | 4.61880684 | 4.61882114 | -0.00369681 | 4.3819E-05 | 4.61881399 | -0.0018265 | 7.1526E-06 | 1 |

# Método Cerrado – Regula Falsi

$$Q = \frac{1}{n} \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} S^{1/2}$$

$$f(h) = \frac{1}{n} \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} S^{1/2} - Q = 0$$

| n | $a_n$ | $b_n$ | $f(a_n)$ | $f(b_n)$ | $x_n$ | $f(x_n)$ | $x_n$-$x_{n-1}$ | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 30 | -800 | 9600.33007 | 2.30761907 | -526.408865 | | - |
| 1 | 2.30761907 | 30 | -526.408865 | 9600.33007 | 3.74712639 | -218.083321 | 1.43950732 | - |
| 2 | 3.74712639 | 30 | -218.083321 | 9600.33007 | 4.33024645 | -74.4241751 | 0.58312006 | 1.1982 |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |
| 11 | 4.6187964 | 30 | -0.0064268 | 9600.33007 | 4.61881339 | -0.00198383 | 1.6991E-05 | 1.0001 |
| 12 | 4.61881339 | 30 | -0.00198383 | 9600.33007 | 4.61881863 | -0.00061237 | 5.2448E-06 | 1.0001 |

# Método Abierto – Newton Raphson

$$f(h) = \frac{1}{n}\frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}}S^{1/2} - Q = 0$$

$$f^{(1)}(h) = -\frac{1}{n}S^{1/2}\left[\frac{5}{3}b\left(\frac{bh}{b+2h}\right)^{2/3} - \frac{4}{3}\left(\frac{bh}{b+2h}\right)^{5/3}\right]$$

| n | $x_n$ | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ | $x_{n+1}$ | $x_{n+1}-x_n$ | p |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | -728.455972 | 116.259045 | 7.26580042 | 6.26580042 | - |
| 1 | 7.26580042 | 764.46892 | 312.023717 | 4.81576577 | -2.45003465 | 2.69 |
| 2 | 4.81576577 | 51.9649458 | 266.189842 | 4.62054815 | -0.19521761 | 1.87 |
| 3 | 4.62054815 | 0.45167447 | 261.531239 | 4.61882112 | -0.00172704 | 1.99 |
| 4 | 4.61882112 | 3.6315E-05 | 261.489181 | 4.61882098 | -1.3888E-07 | 1.99 |
| 5 | …… | …… | …… | …… | …… | …… |

# Método Abierto – Secante

$$f(h) = \frac{1}{n} \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} S^{1/2} - Q = 0$$

| n | $x_n$ | $f(x_n)$ | $x_{n+1}$ | $f(x_{n+1})$ | $x_{n+2}$ | $x_{n+2}-x_{n+1}$ | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | -728.455972 | 10 | 1666.19096 | 3.73781644 | -6.26218356 | |
| 1 | 10 | 1666.19096 | 3.73781644 | -220.29906 | 4.46909683 | 0.73128039 | 0.717 |
| 2 | 3.73781644 | -220.29906 | 4.46909683 | -38.875366 | 4.62579518 | 0.15669835 | 2.016 |
| 3 | 4.46909683 | -38.875366 | 4.62579518 | 1.82427008 | 4.61877152 | -0.00702365 | 1.596 |
| 4 | 4.62579518 | 1.82427008 | 4.61877152 | -0.01293109 | 4.61882096 | 4.9436E-05 | 1.621 |
| 5 | 4.61877152 | -0.01293109 | 4.61882096 | -4.1968E-06 | 4.61882098 | 1.605E-08 | 1.615 |

# Métodos – Análisis y Conclusiones

**Bisección**

- Converge siempre
- Fácil acotamiento error truncamiento
- Convergencia lenta (lineal)

**Regula-Falsi**

- Converge siempre que f sea contínua
- Suele converger + rápido que Bisección
- Longitud del subintervalo que contiene a la raíz en general no tiende a cero

# Métodos - Análisis

**NR**

No necesita intervalo de arranque
No siempre converge, pero de hacerlo, lo hace + rápido (converg. Cuadrática)
Conocer la derivada
Si f’(x)=0 no se puede aplicar

**Secante**

No es necesario conocer la derivada f’(x)
Convergencia + lenta que NR
(convergencia superlineal, número aúreo)