FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

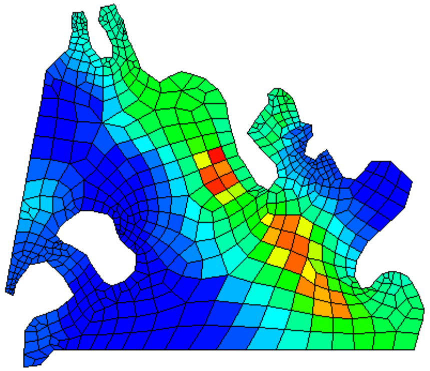
MODELACIÓN NUMÉRICA

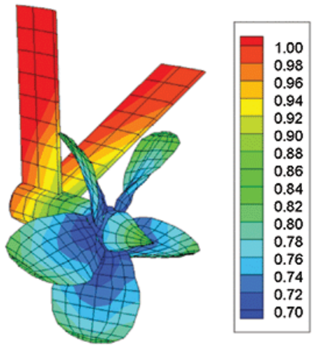
Profesor: **Dr. Angel N. Menéndez**

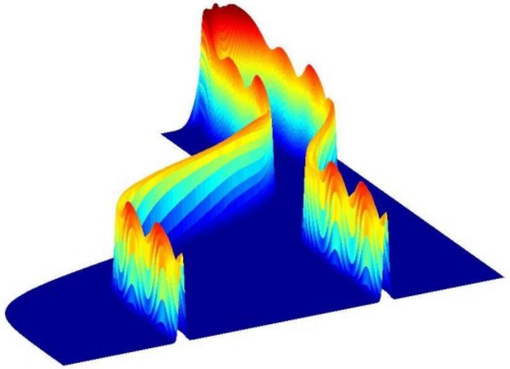
Tema: **1. Errores en el cálculo numérico**

Clase: **1a – Fuentes de errores**

Fecha: **Marzo/2020**





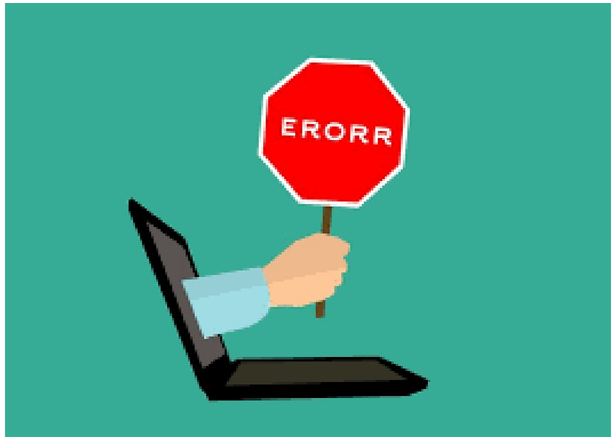


Fuentes de errores

	DATOS (ENTRADA)	PROCESO PRECISION	RESULTADOS (SALIDA)
PROCESO DE CALCULO	DATOS (ENTRADA) →	PROCESO PRECISION →	RESULTADOS (SALIDA)
PROCESO IDEAL	Exactos →	Infinito Infinita →	Exactos
ERRORES DE ENTRADA	Con errores →	Infinito Infinita →	Con errores
ERRORES DE TRUNCAMIENTO	Exactos →	Finito Infinita →	Con errores
ERRORES DE REDONDEO	Exactos →	Infinito Finita →	Con errores

Otras fuentes de errores

- Errores en el modelo
- Errores humanos



FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

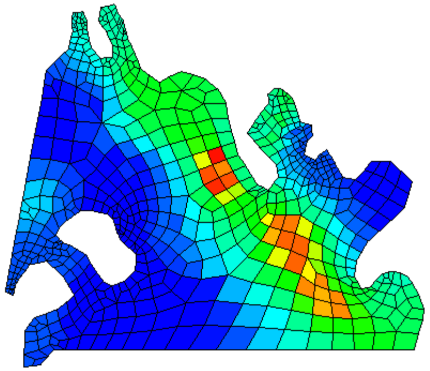
MODELACIÓN NUMÉRICA

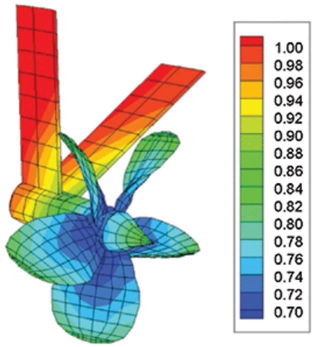
Profesor: **Dr. Angel N. Menéndez**

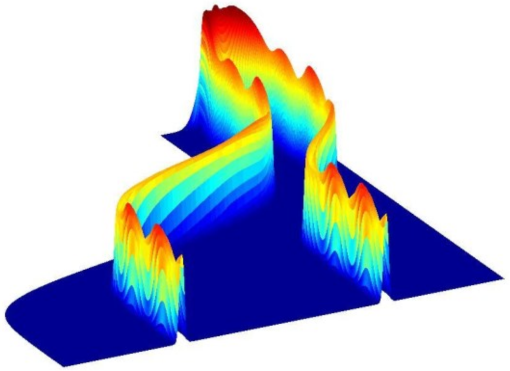
Tema: **1. Errores en el cálculo numérico**

Clase: **1b – Error absoluto y relativo**

Fecha: **Marzo/2020**







Definiciones

a : exacto

$\hat{a}$: estimado

$\delta a \equiv a - \hat{a}$: error absoluto exacto

$$r_a \equiv \frac{\delta a}{a}$$: error relativo exacto

$$a \equiv \frac{\hat{a}}{1 - r_a}$$: relación entre absoluto y relativo

Cotas

$$|\delta a| \le \Delta a$$

$$-\Delta a \le \delta a \le \Delta a$$

$$\hat{a} - \Delta a \le a \le \hat{a} + \Delta a \quad \Leftrightarrow \quad a = \hat{a} \pm \Delta a$$

$$|r_a| \equiv \frac{|\delta a|}{|a|} \le \frac{\Delta a}{|a|} \approx \frac{\Delta a}{|\hat{a}|} \equiv R_a$$

relativo

$$1 - R_a \le \frac{a}{\hat{a}} \le 1 - R_a \quad \Leftrightarrow \quad a = \hat{a}(1 \pm R_a)$$

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

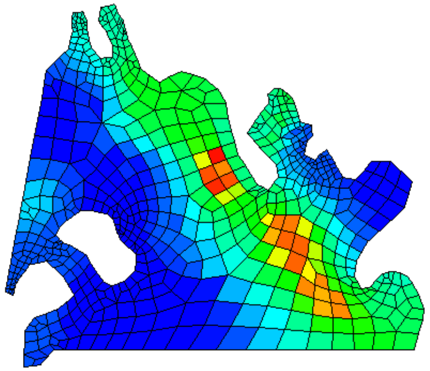
MODELACIÓN NUMÉRICA

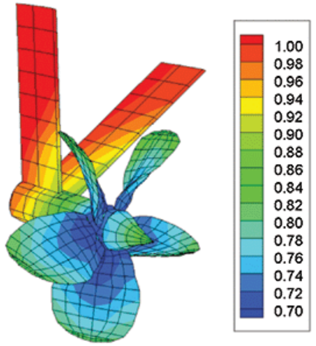
Profesor: **Dr. Angel N. Menéndez**

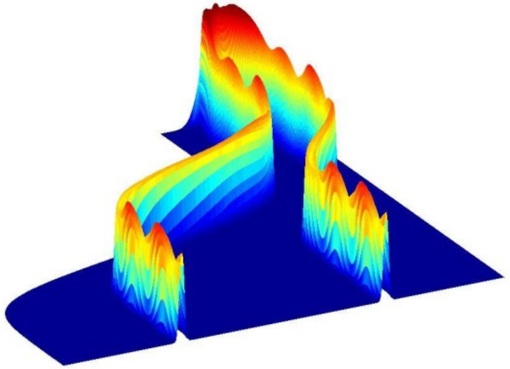
Tema: **1. Errores en el cálculo numérico**

Clase: **1c – Dígitos significativos**

Fecha: **Marzo/2020**







Sistema de numeración

$$a = d_1 b^{p_1} + d_2 b^{p_2} + d_3 b^{p3} + \ldots$$

d_i : dígitos; $\quad 0 \le d_i < b \quad$ d_1 : 1er dígito

b : base

p_i : potencia; $\quad p_{k+1} = p_k + 1$

$p_k = -1 \Rightarrow d_k$: 1er decimal

$$a = d_1 d_2 \ldots d_n , d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{n+m}$$

n : cantidad de dígitos enteros

m : cantidad de decimales

$n + m$: cantidad de dígitos

Ejemplo 1

$$a = 3 \text{ x } 10^{2} + 1 \text{ x } 10^{1} + 9 \text{ x } 10^{0} + 2 \text{ x } 10^{-1} + 5 \text{ x } 10^{-2}$$

3 : 1^er^ dígito

2 : 1^er^ decimal

2 decimales

5 dígitos

$$a = 319,25$$

Ejemplo 2

$$a = 4 \text{ x } 10^{-3} + 5 \text{ x } 10^{-4} + 1 \text{ x } 10^{-5}$$

4 : 1er dígito

0 : 1er decimal

5 decimales

3 dígitos

$$a = 0,00451$$

Significación

$$\Delta a = 0,5 \text{ x } 10^{-t}; \quad t \geq 1$$

$\Rightarrow a$ tiene t decimales significativos (DeS)

$$0,5 \text{ x } 10^{-t-1} < \Delta a < 0,5 \text{ x } 10^{-t}; \quad t \geq 1$$

$\Rightarrow a$ tiene t DeS y 1 medianamente significativo (DeMS)

Cantidad de dígitos significativos (DiS) = cantidad dígitos enteros + DeS

Ejemplo 3

$$\hat{a} = 124,3257058$$

1) $\Delta a = 0,5 \text{ x } 10^{-3} = 0,0005$

3 DeS; 6 DiS

2) $\Delta a = 0,2 \text{ x } 10^{-3} = 0,0002$

3 DeS+1DeMS; 6 DiS y 1 DiMS

3) $\Delta a = 0,7 \text{ x } 10^{-3} = 0,0007$

2 DeS+1DeMS; 5 DiS y 1 DiMS

Ejemplo 3 (Continúa)

$$\hat{a} = 124,3257058$$

4) $\Delta a = 0,5 \text{ x } 10^1 = 5$

5) $\Delta a = 0,2 \text{ x } 10^1 = 2$

1S

3) $\Delta a = 0,7 \text{ x } 10^1 = 7$

0 DeS; 1 DiS y 1 DiMS

Redondeo

Se conservan sólo los dígitos significativos (se incluye el MS si existe)

- **Simétrico:** el último dígito significativo se mantiene si el siguiente es menor que 5, y se incrementa en 1 si el siguiente es mayor o igual a 5;

$$\Delta a \leq 0,5 \text{ x } 10^{-(n+m)}$$

- **Truncado:** el último díg mantiene su valor;

$$\Delta a \leq 10^{-(n+m)}$$

Ejemplo 3bis

$$\hat{a} = 124,3257058$$

1) $$\Delta a = 0,5 \text{ x } 10^{-3} = 0,0005$$

$$\Rightarrow a = 124,326 \pm 0,0005$$

2) $$\Delta a = 0,2 \text{ x } 10^{-3} = 0,0002$$

$$\Rightarrow a = 124,3257 \pm 0,0002$$

3) $$\Delta a = 0,7 \text{ x } 10^{-3} = 0,0007$$

$$\Rightarrow a = 124,326 \pm 0,0007$$

Ejemplo 3bis (Continúa)

$$\hat{a} = 124,3257058$$

4) $\Delta a = 0,5 \text{ x } 10^{1} = 5$

$$\Rightarrow a = 120 \pm 5$$

$$a = 120 \text{ x } (1 \pm 4 \text{ x } 10^{-2})$$

5) $\Delta a = 0,2 \text{ x } 10^{1} = 2$

$$\Rightarrow a = 124 \pm 2$$

3) $\Delta a = 0,7 \text{ x } 10^{1} = 7$

$$\Rightarrow a = 120 \pm 7$$

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

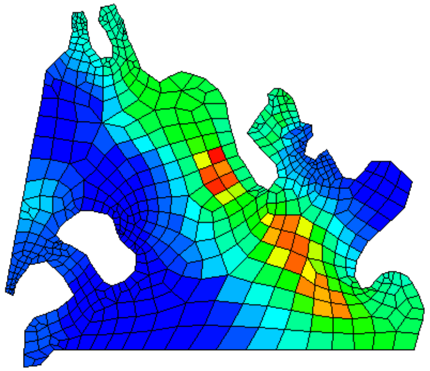
MODELACIÓN NUMÉRICA

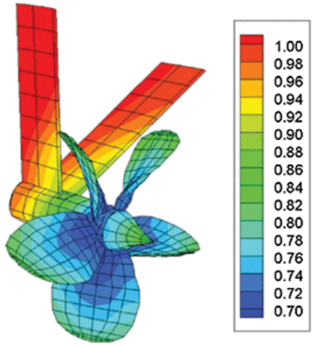
Profesor: **Dr. Angel N. Menéndez**

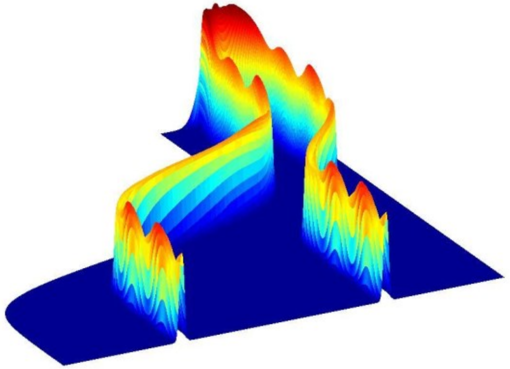
Tema: **1. Errores en el cálculo numérico**

Clase: **1d – Propagación de errores**

Fecha: **Marzo/2020**







Operaciones elementales

$$x_1 = \widehat{x_1} + \delta x_1; \quad r_1 = \delta x_1 / x_1; \quad |\delta x_1| \le \Delta x_1; \quad |r_1| \le R_1$$

$$x_2 = \widehat{x_2} + \delta x_2; \quad r_2 = \delta x_2 / x_2; \quad |\delta x_2| \le \Delta x_2; \quad |r_2| \le R_2$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x_1 + x_2 \\ y = x_1 - x_2 \\ y = x_1 * x_2 \\ y = x_1 / x_2 \end{array}\right\} \hat{y}?; \quad \delta y?; \quad \Delta y?; \quad r_y?; \quad R_y?$$

Suma y resta

$$y = x_1 + x_2 = \left(\widehat{x_1} + \widehat{x_2}\right) + \left(\delta x_1 + \delta x_2\right)$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \widehat{x_1} + \widehat{x_2}; \quad \delta y = \delta x_1 + \delta x_2$$

$$\left|\delta y\right| \le \left|\delta x_1\right| + \left|\delta x_2\right| \le \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$y = x_1 - x_2 = \left(\widehat{x_1} - \widehat{x_2}\right) + \left(\delta x_1 - \delta x_2\right)$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \widehat{x_1} - \widehat{x_2}; \quad \delta y = \delta x_1 - \delta x_2$$

$$\left|\delta y\right| \le \left|\delta x_1\right| + \left|\delta x_2\right| \le \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Multiplicación y división

$$y = x_1 * x_2 = \left(\widehat{x_1} * \widehat{x_2}\right) * \left(1 + r_1 + r_2 + r_1 * r_2\right)$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \widehat{x_1} * \widehat{x_2}; \quad r_y \approx r_1 + r_2$$

$$\left|r_y\right| \le \left|r_1\right| + \left|r_2\right| \le R_1 + R_2 \quad \Rightarrow \quad R_y = R_1 + R_2$$

$$y = x_1 / x_2 \approx \left(\widehat{x_1} / \widehat{x_2}\right) * \left(1 + r_1 - r_2\right)$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \widehat{x_1} / \widehat{x_2}; \quad r_y \approx r_1 - r_2$$

$$\left|r_y\right| \le \left|r_1\right| + \left|r_2\right| \le R_1 + R_2 \quad \Rightarrow \quad R_y = R_1 + R_2$$

Ejemplo 1

$$x_1 = 23,5 \pm 0,2 \quad \rightarrow \quad R_1 = 8,5 \text{ x } 10^{-3} = 0,0085$$

$$x_2 = 11,7 \pm 0,3 \quad \rightarrow \quad R_2 = 2,6 \text{ x } 10^{-2} = 0,026$$

$$y = x_1 + x_2; \quad \hat{y} = 35,2; \quad \Delta y = 0,5 \quad y = 35 \pm 0,5$$

$$y = x_1 - x_2; \quad \hat{y} = 11,8; \quad \Delta y = 0,5 \quad y = 12 \pm 0,5$$

$$y = x_1 * x_2; \hat{y} = 274,95; R_y = 3,5 \text{ x } 10^{-2} \Rightarrow \Delta y = 9 \Rightarrow y = 270 \pm 9$$

$$y = x_1 / x_2; \hat{y} = 2,00854; R_y = 3,5 \text{ x } 10^{-2} \Rightarrow \Delta y = 0,07 \Rightarrow y = 2,0 \pm 0,07$$

Fórmula general de propagación

$$y = F\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$$

$$\hat{y} = F\left(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \ldots \widehat{x_n}\right)$$

$$\delta y = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_{\left(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \ldots \widehat{x_n}\right)} \delta x_j$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_{\left(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \ldots \widehat{x_n}\right)} \Delta x_j$$

Ejemplo 2

$$x_1 = 23,5 \pm 0,2 \quad \rightarrow \quad R_1 = 8,5 \text{ x } 10^{-3} = 0,0085$$

$$x_2 = 11,7 \pm 0,3 \quad \rightarrow \quad R_2 = 2,6 \text{ x } 10^{-2} = 0,026$$

$$y = x_1 * x_2^{\,2}; \quad \hat{y} = 3216,915$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = x_2^{\,2}; \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{(\hat{x}_1,\hat{x}_2)} = 140 \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_1x_2; \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{(\hat{x}_1,\hat{x}_2)} = 550$$

$$\Delta y = 140 * 0,2 + 550 * 0,3 = 200$$

$$\Rightarrow \quad y = 3200 \pm 200$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

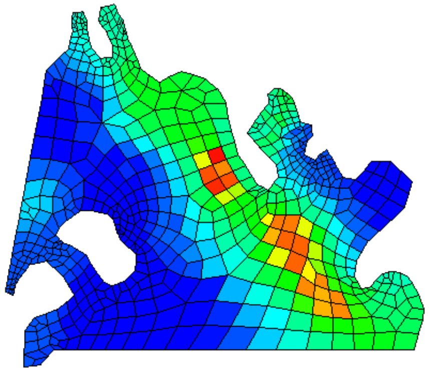
MODELACIÓN NUMÉRICA

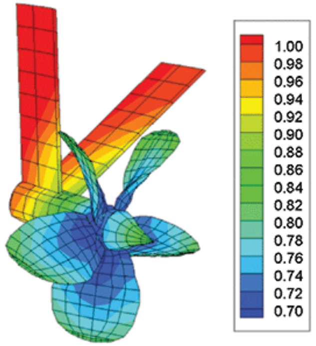
Profesor: **Dr. Angel N. Menéndez**

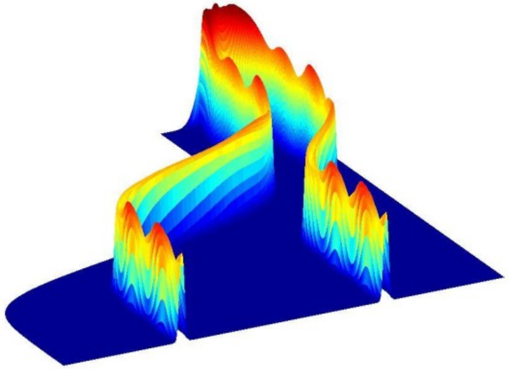
Tema: **1. Errores en el cálculo numérico**

Clase: **1e – Cancelación de términos**

Fecha: **Marzo/2020**







Cancelación de términos

$$y = x_1 - x_2; \quad |x_1| \approx |x_2| \quad \Rightarrow \quad |y| \ll |x_1|, |x_2|$$

$$R_y = \frac{\Delta y}{|\hat{y}|} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{|\hat{x}_1 - \hat{x}_2|}$$ grande

Ejemplo 1

$$x_1 = 0,5764 \pm 0,00005; \quad x_2 = 0,5763 \pm 0,00005$$

$$y = x_1 - x_2 = 0,0001 \pm 0,0001 \quad \rightarrow \quad R_y = 1 \ (100\%)$$

Ejemplo 2

$$x^2 - 56x + 1 = 0$$

$$x_1 = 28 + \sqrt{783} = 28 + (27{,}982 \pm 0{,}0005) = 55{,}982 \pm 0{,}0005$$

$$x_2 = 28 - \sqrt{783} = 28 - (27{,}982 \pm 0{,}0005) = 0{,}018 \pm 0{,}0005$$

$$x^2 - 56x + 1 = (x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1/x_1$$

$$\widehat{x_2} = 1/\widehat{x_1} = 0{,}017862884$$

$$R_2 = R_1 = 8{,}9 \text{ x } 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = 2 \text{ x } 10^{-7}$$

$$x_2 = 0{,}0178629 \pm 0{,}0000002$$

Algoritmos algebraicamente equivalentes

Algoritmos equivalentes en el álgebra (precisión infinita) no son numéricamente equivalentes (precisión finita)

Ejemplos

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$$

$$\cos(x_1) - \cos(x_2) = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

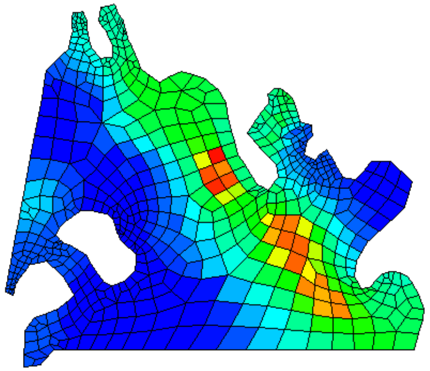
MODELACIÓN NUMÉRICA

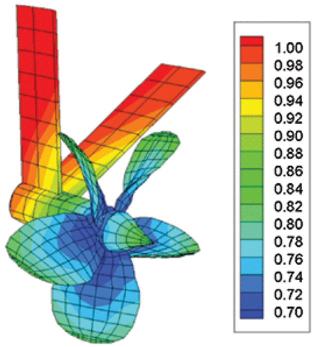
Profesor: **Dr. Angel N. Menéndez**

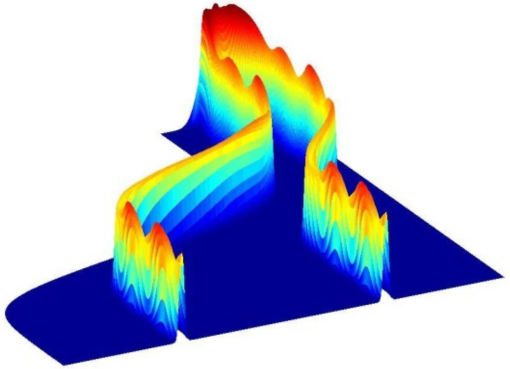
Tema: **1. Errores en el cálculo numérico**

Clase: **1f – Errores de truncamiento**

Fecha: **Marzo/2020**







Método de estimación

Diferencia entre el valor calculado y el recalculado con mayor precisión

$$\Delta_t y = \left| \widehat{y_N} - \widehat{y_{N+1}} \right|$$

N : orden de precisión

Ejemplo 1

a) $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \widehat{y_N} = \sum_{i=1}^{N} a_i \quad \Delta_t y = \left| a_{N+1} \right|$

b) $a_i = \frac{1}{i^2},\ N = 10,\ \widehat{y_{10}} = 1{,}549767,\ \Delta_t y = 8 \text{ x } 10^{-3},\ y = 1{,}55 \pm 0{,}008$

Cancelación de términos

$$y = f(x_1) - f(x_2); \quad |x_1| \approx |x_2| \quad \Rightarrow \quad |y| \ll |x_1|, |x_2|$$

Algoritmo alternativo con truncamiento

$$\widehat{y_1} = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$\Delta_t y = |f''(x_1)| \frac{(x_2 - x_1)^2}{2}$$

FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

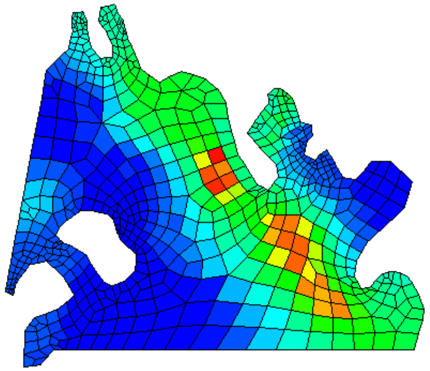
MODELACIÓN NUMÉRICA

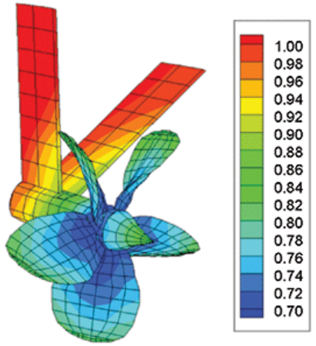
Profesor: **Dr. Angel N. Menéndez**

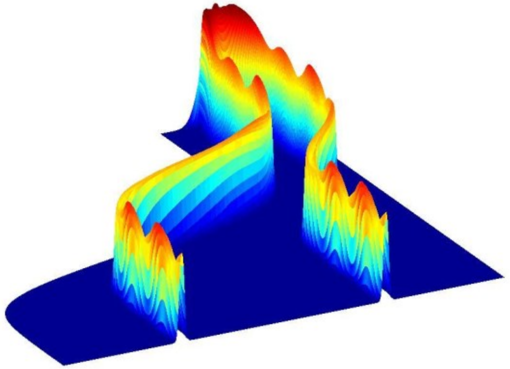
Tema: **1. Errores en el cálculo numérico**

Clase: **1g – Errores de redondeo**

Fecha: **Marzo/2020**







Representación interna de reales

$$a = m\ 10^q$$

m : mantisa normalizada $\qquad 0,1 \le |m| < 1$

q : exponente (entero)

$$\hat{a} = \hat{m}\ 10^q$$

$\hat{m}$ redondeada a t decimales (dígitos de a)

$$|\hat{m} - m| \le 0,5 \text{ x } 10^{-t}$$

La computadora sólo puede representar una cantidad finita de números

Representación interna de reales

$$-q_{\max} \leq |q| \leq q_{\max}$$

La computadora tiene un límite inferior y uno superior para representar números

$$\left|\frac{\hat{a}-a}{a}\right| = \frac{|\hat{m}-m|}{|m|} \leq \frac{0,5 \text{ x } 10^{-t}}{10^{-1}} = 0,5 \text{ x } 10^{-t+1} \equiv u$$

La unidad de máquina es la cota del error relativo de representación interna de un número real

Redondeo en operaciones elementales

$$z = a + b + c; \quad \hat{a} = 0{,}1234567; \quad \hat{b} = 4711{,}325; \quad \hat{c} = -\hat{b} \quad (t = 7)$$

Algoritmo 1: $\xi = a + b; \; z = \xi + c$

Memoria		Procesador
$\hat{a} = 0{,}1234567 \text{ x } 10^0$	→	$\hat{a} = 0{,}00001234567 \text{ x } 10^4$
$\hat{b} = 0{,}4711325 \text{ x } 10^4$	→	$\hat{b} = 0{,}47113250000 \text{ x } 10^4$ (+)
	←	$\hat{\xi} = 0{,}47114484567 \text{ x } 10^4$
$\hat{\xi} = 0{,}4711448 \text{ x } 10^4$	→	$\hat{\xi} = 0{,}4711448 \text{ x } 10^4$
$\hat{c} = -0{,}4711325 \text{ x } 10^4$	→	$\hat{c} = -0{,}4711325 \text{ x } 10^4$ (−)
$\hat{z} = 0{,}1230000 \text{ x } 10^0$	←	$\hat{z} = 0{,}0000123 \text{ x } 10^4$

Redondeo en operaciones elementales

$$z = a + b + c; \quad \hat{a} = 0{,}1234567; \quad \hat{b} = 4711{,}325; \quad \hat{c} = -\hat{b} \quad (t = 7)$$

Algoritmo 1: $\xi = a + b; \quad z = \xi + c$

$$\hat{z} = 0{,}1230000 \text{ x } 10^0$$

Algoritmo 2: $\eta = b + c; \quad z = a + \eta$

$$\hat{z} = \hat{a} = 0{,}1234567 \text{ x } 10^0$$

Con algoritmo 1 se pierden 4 dígitos de precisión

Observación: suma de términos disímiles

Sumatoria de serie truncada: más conveniente en sentido inverso

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

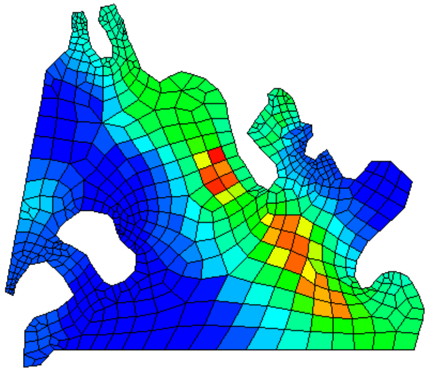
MODELACIÓN NUMÉRICA

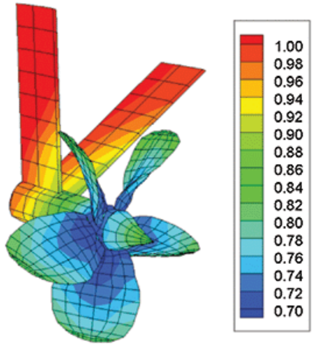
Profesor: **Dr. Angel N. Menéndez**

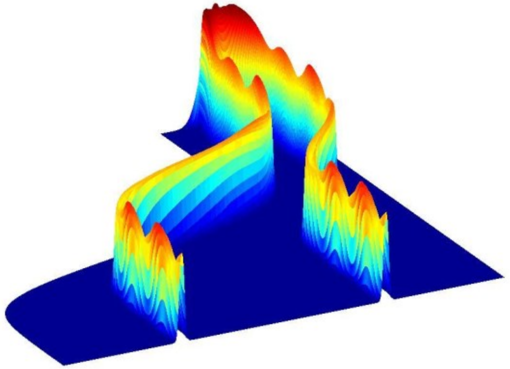
Tema: **1. Errores en el cálculo numérico**

Clase: **1h – Amplificación de errores**

Fecha: **Marzo/2020**







Factores de amplificación

$$y = x_1 \vartheta x_2; \quad \vartheta = +, -, *, /$$

r_1, r_2 : errores relativos exactos

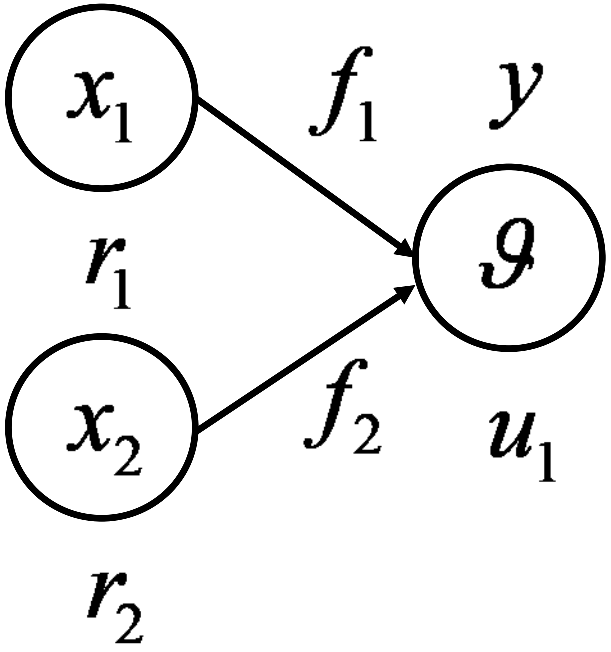
$$r_y = f_1 r_1 + f_2 r_2$$

f_1, f_2: factores de amplificación

ϑ	$+$	$-$	$*$	$/$
f_1	x_1 / y	x_1 / y	1	1
f_2	x_2 / y	$-x_2 / y$	1	-1

Gráfica de proceso

$$y = x_1 \vartheta x_2; \quad \vartheta = +, -, *, /$$

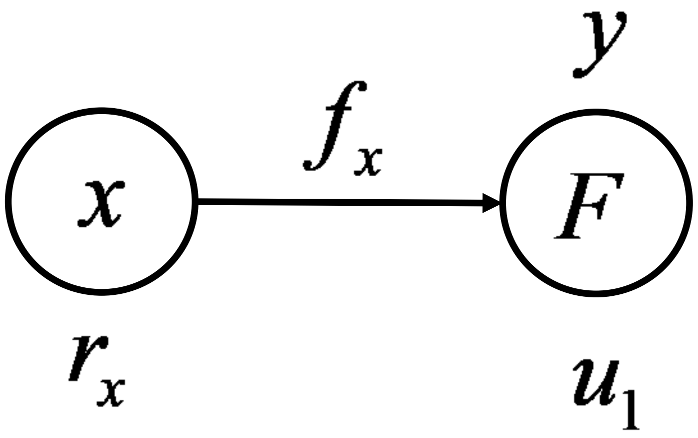


$$r_y = f_1 r_1 + f_2 r_2 + u_1$$

u_1 : error relativo de redondeo $\quad |u_1| \leq u$

Gráfica de proceso

$$y = F(x)$$



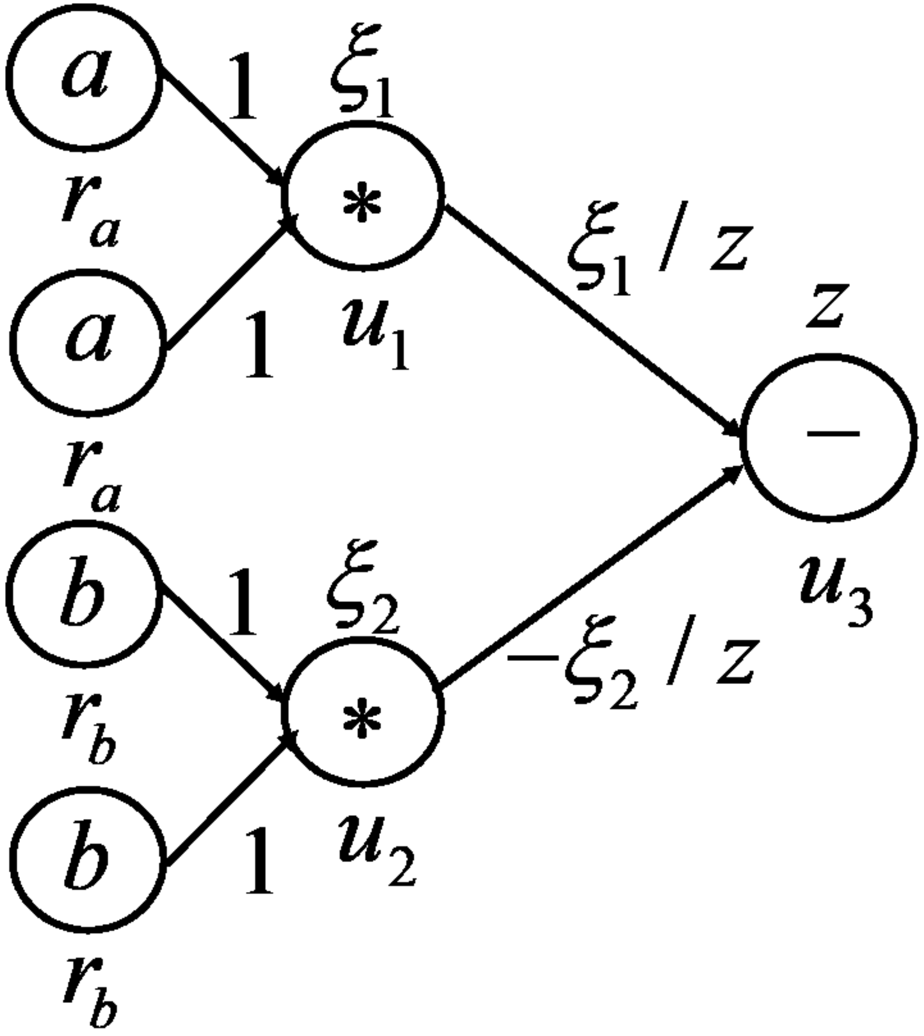
$$r_y = f_x r_x + u_1$$

$$\delta y = F'(x)\delta x \;\Rightarrow\; r_y = \frac{F'(x)}{y} x r_x \;\Rightarrow\; f_x = \frac{x}{y} F'(x)$$

Si $F(x) = \ln(x) \;\Rightarrow\; f_x = \dfrac{1}{y}$

Gráfica de proceso

$$z = a^2 - b^2; \quad \xi_1 = a^2; \quad \xi_2 = b^2$$



$$r_z = (r_a + r_a + u_1)\frac{\xi_1}{z} + (r_b + r_b + u_2)\left(-\frac{\xi_2}{z}\right) + u_3$$

$$|r_a| \leq R_a; \quad |r_b| \leq R_b$$

$$|u_1|, |u_2|, |u_3| \leq u$$

Acotamiento del error

$$z = a^2 - b^2; \quad \xi_1 = a^2; \quad \xi_2 = b^2$$

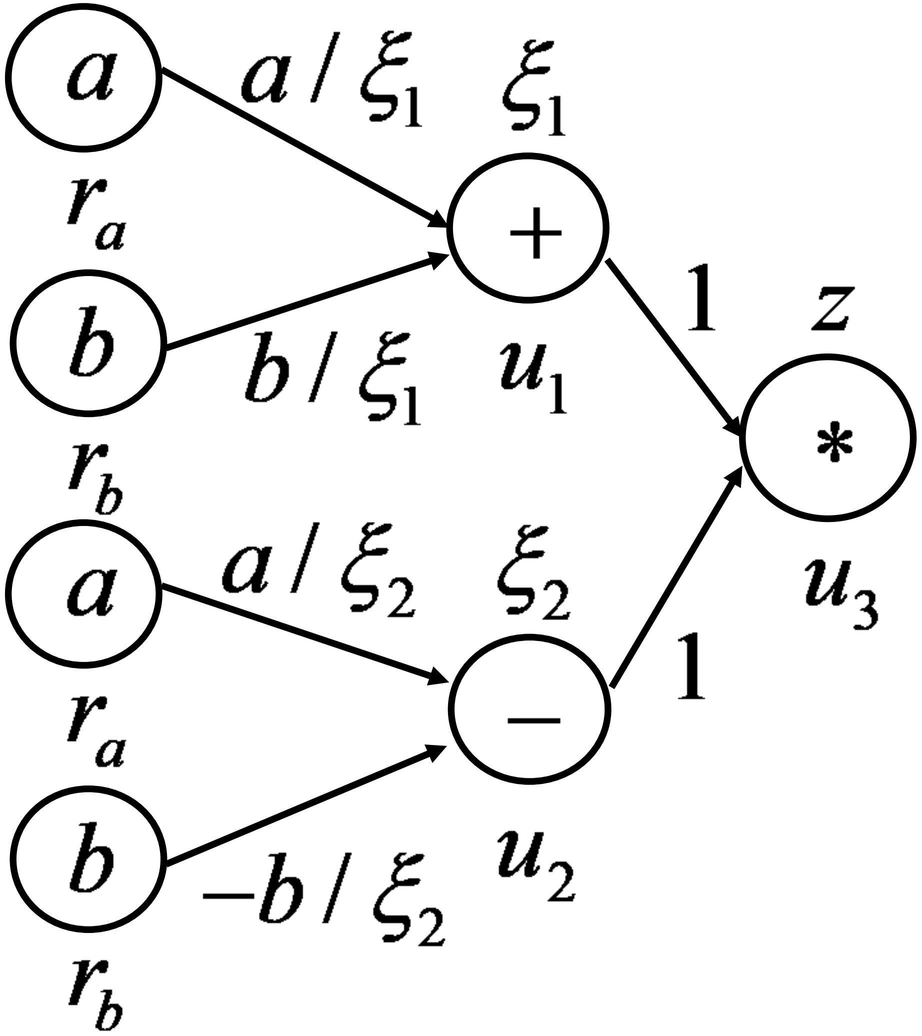
$$r_z = (r_a + r_a + u_1)\frac{\xi_1}{z} + (r_b + r_b + u_2)\left(-\frac{\xi_2}{z}\right) + u_3$$

$$= 2\frac{\xi_1}{z} r_a - 2\frac{\xi_2}{z} r_b + \left(\frac{\xi_1}{z} u_1 - \frac{\xi_2}{z} u_2 + u_3\right) \quad \rightarrow \quad f_a = 2\frac{a^2}{z}, f_b = -2\frac{b^2}{z}$$

$$|r_z| \le |f_a| R_a + |f_b| R_b + \left(\left|\frac{\xi_1}{z}\right| + \left|\frac{\xi_2}{z}\right| + 1\right) u \equiv R_z \quad \rightarrow \quad F_u = \left|\frac{a^2}{z}\right| + \left|\frac{b^2}{z}\right| + 1$$

Gráfica de proceso

$$z=(a+b)(a-b); \quad \xi_1=(a+b); \quad \xi_2=(a-b)$$



$$r_z=\left(\frac{a}{\xi_1}r_a+\frac{b}{\xi_1}r_b+u_1\right)$$

$$+\left(\frac{a}{\xi_2}r_a-\frac{b}{\xi_2}r_b+u_2\right)+u_3$$

$$|r_a|\le R_a; \quad |r_b|\le R_b$$

$$|u_1|,|u_2|,|u_3|\le u$$

Acotamiento del error

$$z=(a+b)(a-b);\quad \xi_1=(a+b);\quad \xi_2=(a-b)$$

$$r_z=\left(\frac{a}{\xi_1}r_a+\frac{b}{\xi_1}r_b+u_1\right)+\left(\frac{a}{\xi_2}r_a-\frac{b}{\xi_2}r_b+u_2\right)+u_3$$

$$=a\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)r_a+b\left(\frac{1}{\xi_1}-\frac{1}{\xi_2}\right)r_b+(u_1+u_2+u_3)$$

$$f_a=a\left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}\right)=a\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)=2\frac{a^2}{z};\; f_b=-2\frac{b^2}{z}$$

$$|r_z|\le|f_a|R_a+|f_b|R_b+F_u u\equiv R_z\quad\rightarrow\quad F_u=3$$

Errores de entrada

$$z = a^2 - b^2; \quad \xi_1 = a^2; \quad \xi_2 = b^2$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial a}\delta a + \frac{\partial z}{\partial b}\delta b = 2a(ar_a) - 2b(br_b) = 2a^2 r_a - 2b^2 r_b$$

$$\Rightarrow \quad r_z = 2\frac{a^2}{z}r_a - 2\frac{b^2}{z}r_b \quad \rightarrow \quad f_a = 2\frac{a^2}{z}, f_b = -2\frac{b^2}{z}$$

La amplificación de los errores de entrada es independiente del algoritmo

Errores de redondeo

$$z = a^2 - b^2$$

$$F_u = \left|\frac{a^2}{z}\right| + \left|\frac{b^2}{z}\right| + 1$$

$$z = (a+b)(a-b)$$

$$F_u = 3$$

La amplificación de los errores de redondeo está condicionada por el algoritmo

Ejemplo 1

$$a = 43,21; \quad b = 43,11$$

$$z = a^2 - b^2; \quad f_a = f_b = 420; \quad F_u = 420$$

$$z = (a+b)(a-b); \quad f_a = f_b = 420; \quad F_u = 3$$

El primer algoritmo amplifica más el error de redondeo, en un factor mayor a 100 (hay cancelación de términos)

Planteo general

$$y = F\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$$

$$r_y = \sum_{j=1}^{n} f_j r_j + \sum_{i=1}^{m} g_i u_i \qquad \left|r_j\right| \leq R_j, \qquad \left|u_i\right| \leq u$$

f_j : factores de amplificación de datos de entrada

g_i : factores de amplificación de errores de redondeo

f_j : dependen del problema

g_i, m : dependen del algoritmo

$$R_y = \sum_{j=1}^{n} \left|f_j\right| R_j + \left(\sum_{i=1}^{m} \left|g_i\right|\right) u \qquad F_u \equiv \sum_{i=1}^{m} \left|g_i\right|$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

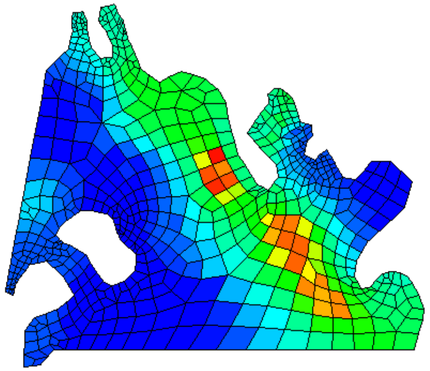
MODELACIÓN NUMÉRICA

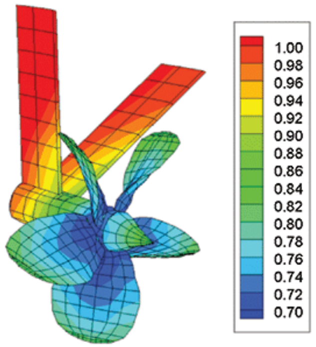
Profesor: **Dr. Angel N. Menéndez**

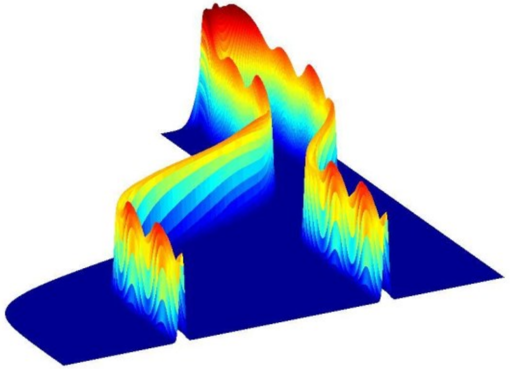
Tema: **1. Errores en el cálculo numérico**

Clase: **1i – Estabilidad numérica**

Fecha: **Marzo/2020**







Estabilidad del problema

Sensibilidad del resultado a variaciones en los datos de entrada

Indicador

$\left|f_j\right| \tilde{<} 1$: problema estable o bien condicionado para x_j

$\left|f_j\right| \gg 1$: problema inestable o mal condicionado para x_j

Número de condición del problema

Si $R_j \leq R \quad \Rightarrow R_y^{(E)} = \sum_{j=1}^{n} |f_j| R_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j| \right) R$

$$C_P = \sum_{j=1}^{n} |f_j| \quad \rightarrow \qquad R_y^{(E)} = C_P R$$

$|C_P| \tilde{<} n$: problema estable o bien condicionado

$|C_P| \gg n$: problema inestable o mal condicionado

Estabilidad del algoritmo

Sensibilidad del resultado a errores de redondeo en las operaciones

Indicador

F_u : depende tanto del algoritmo como del problema

Número de condición del algoritmo

$C_A = \dfrac{F_u}{C_P}$: depende principalmente del algoritmo

Estabilidad numérica relativa

$C_A^{(I)} < C_A^{(II)}$: algoritmo (I) más estable o mejor condicionado que (II)

Estabilidad numérica aceptable

Si $R_j \leq R \Rightarrow R_y \leq C_P R + F_u u = C_P \left(R + C_A u \right)$

$$\left. \begin{aligned} C_A &\ll \frac{R}{u} \\ u &\ll \frac{R}{C_A} \end{aligned} \right\}$$: condición de aceptabilidad

Ejemplo 1

$$a = 43,21; \quad b = 43,11 \quad \rightarrow \quad R = 10^{-4}$$

Aceptable si $\quad u \leq 0,01 \dfrac{R}{C_A}$

$$z = a^2 - b^2; \quad C_P = 840; \quad C_A = 0,5;$$

$$R / C_A = 0,002 \quad \rightarrow \quad t \geq 6$$

$$z = (a+b)(a-b); \quad C_P = 840; \quad C_A = 4 \text{ x } 10^{-3}$$

$$R / C_A = 0,25 \quad \rightarrow \quad t \geq 4$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

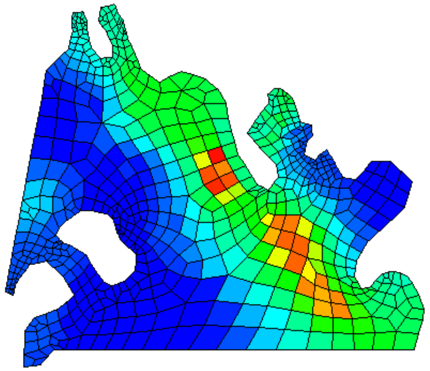
MODELACIÓN NUMÉRICA

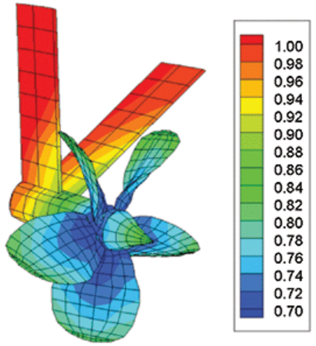
Profesor: **Dr. Angel N. Menéndez**

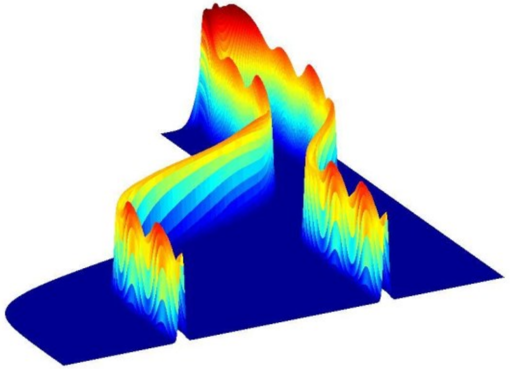
Tema: **1. Errores en el cálculo numérico**

Clase: **1j – Perturbaciones experimentales**

Fecha: **Marzo/2020**







Concepto

Cuantificación empírica de la sensibilidad mediante cálculos con datos y/o parámetros perturbados

Es la única forma práctica de proceder frente a procesos de cálculo extensos y complejos (generalmente implementados en software)

Estabilidad del problema

$$y = F\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right); \qquad x_j = \widehat{x_j} \pm \Delta x_j = \widehat{x_j}\left(1 \pm R_j\right)$$

$$\rightarrow \quad \hat{y} = F\left(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \ldots \widehat{x_n}\right)$$

Estimación de factor de amplificación:

$$\hat{y}^{(j)} = F\left(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \ldots \widehat{x_j} + \Delta x_j, \ldots \widehat{x_n}\right) \rightarrow \Delta y^{(j)} \approx \left|\hat{y}^{(j)} - \hat{y}\right|$$

$$R_y^{(j)} = \frac{\Delta y^{(j)}}{\left|\hat{y}\right|} \qquad \rightarrow \qquad \left|f_j\right| \approx \frac{R_y^{(j)}}{R_j}$$

Estabilidad del problema

Si $|f_j| \ll 1$: problema estable para x_j

Además se infiere que algoritmo estable

Si $|f_j| \gg 1 \ \forall j$: problema inestable o algoritmo inestable?

Estabilidad del algoritmo

$$\hat{y}^{(2t)} = F\left(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \ldots \widehat{x_n}\right) \rightarrow \qquad \Delta y^{(2t)} \approx \left|\hat{y}^{(2t)} - \hat{y}\right|$$

$$R_y^{(2t)} = \frac{\Delta y^{(2t)}}{\left|\hat{y}\right|} \rightarrow \qquad F_u \approx \frac{R_y^{(2t)}}{u}$$

Si $F_u \ll \left|f_j\right| \quad \forall j$: algoritmo estable