Clase Práctica

Tema: Errores Numéricos

Modelación Numérica (95.10)
Análisis Numérico (75.12)
Métodos Matemáticos y Numéricos (95.13)

Docente: Ing. Pablo E. García

Ejercicio 3

Expresar correctamente los siguientes números, utilizando redondeo simétrico

a) $0{,}123456789 \pm 0{,}01$

b) $0{,}123456789 \pm 0{,}005$

c) $0{,}123456789 \pm 0{,}00008$

d) $12{,}3456789 \pm 8$

e) $1.234{,}56789 \pm 50$

f) $123.456{,}789 \pm 100$

$$0{,}5.10^{-t-1} < \Delta a < 0{,}5.10^{-t}$$

t>=1	t decimales significativos, 1 decimal medianamente significativo
t<0	último dígito significativo en posición 10^{-t}, 1 dígito medianamente significativo en 10^{-t-1}

Ejercicio 3

Expresar correctamente los siguientes números, utilizando redondeo simétrico

$0,5.10^{-t-1} < \Delta a < 0,5.10^{-t}$

t>=1 t decimales significativos, 1 decimal medianamente significativo

t<0 último dígito significativo en posición 10^{-t}, 1 dígito medianamente significativo en 10^{-t-1}

a) 0,123456789 ± 0,01

$\Delta a = 0,01$ $0,5.10^{-t-1}$ (0,005) $< 0,01 <$ $0,5.10^{-t}$ (0,05)

$$\text{Si} \begin{cases} 0,5.10^{-t-1} = 0,005 \\ 0,5.10^{-t} = 0,05 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{t = 1}$$

$$\text{Como } t \geq 1 \rightarrow \begin{cases} \text{1 decimal significativo} \\ \text{1 decimal medianamente significativo} \end{cases}$$

$0,123456789 \pm 0,01$ Número correctamente expresado: **0,12 ± 0,01**

Ejercicio 3

Expresar correctamente los siguientes números, utilizando redondeo simétrico

$0,5.10^{-t-1} < \Delta a < 0,5.10^{-t}$	
t>=1	t decimales significativos, 1 decimal medianamente significativo
t<0	último dígito significativo en posición 10^{-t}, 1 dígito medianamente significativo en 10^{-t-1}

b) 0,123456789 ± 0,005

$\Delta a = 0,005$ $\qquad$ $0,005 = 0,5.10^{-2}$ $(0,005) \rightarrow t = 2$

Cuando $\Delta a = 0,5.10^{-t} \rightarrow$ ***Solo tenemos decimales signficativos***

$t = 2 \rightarrow$ ***2 decimales signficativos***

$0,123456789 \pm 0,005$ $\qquad$ Número correctamente expresado: **0,12 ± 0,005**

Ejercicio 3

Expresar correctamente los siguientes números, utilizando redondeo simétrico

$$0,5.10^{-t-1} < \Delta a < 0,5.10^{-t}$$

t>=1	t decimales significativos, 1 decimal medianamente significativo
t<0	último dígito significativo en posición 10^{-t}, 1 dígito medianamente significativo en 10^{-t-1}

c) 0,123456789 ± 0,00008

$$\Delta a = 0,00008 \qquad 0,5.10^{-t-1}\ (0,00005) < 0,00008 < 0,5.10^{-t}\ (0,0005)$$

$$\text{Si} \begin{cases} 0,5.10^{-t-1} = 0,00005 \\ 0,5.10^{-t} = 0,0005 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{t = 3} \qquad \text{Como } t \geq 1 \rightarrow \begin{cases} \text{3 decimales significativo} \\ \text{1 decimal medianamente significativo} \end{cases}$$

$$0,123456789 \pm 0,00008$$

Número correctamente expresado: **0,1235 ± 0,00008**

Ejercicio 3

Expresar correctamente los siguientes números, utilizando redondeo simétrico

$0,5.10^{-t-1} < \Delta a < 0,5.10^{-t}$	
t>=1	t decimales significativos, 1 decimal medianamente significativo
t<0	último dígito significativo en posición 10^{-t}, 1 dígito medianamente significativo en 10^{-t-1}

d) 12,3456789 ± 8

$$\Delta a = 8 \qquad 0,5.10^{-t-1}\ (5) < 8 < 0,5.10^{-t}\ (50)$$

$$\text{Si} \begin{cases} 0,5.10^{-t-1} = 5 \\ 0,5.10^{-t} = 50 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{t = -2}$$

$$\text{Como } t < 0 \rightarrow \begin{cases} \text{último dígito significativo en posición } 10^{-t} \text{ (centenas)} \\ \text{un dígito medianamente significativo en posición } 10^{-t-1} \text{ (decenas)} \\ \text{un dígito no significativo (unidades)} \end{cases}$$

$12,3456789 \pm 8$

Número correctamente expresado: **10 ± 8**

Ejercicio 3

Expresar correctamente los siguientes números, utilizando redondeo simétrico

$0,5.10^{-t-1} < \Delta a < 0,5.10^{-t}$

t>=1	t decimales significativos, 1 decimal medianamente significativo
t<0	último dígito significativo en posición 10^{-t}, 1 dígito medianamente significativo en 10^{-t-1}

e) $1.234,56789 \pm 50$

$\Delta a = 50$

Cuando $\Delta a = 0,5.10^{-t}$ $\rightarrow$ ***Solo tenemos digitos signficativos***

$50 = 0,5.10^{2}$ (50) $\rightarrow$ $t = -2$

$$\text{Como } t < 0 \rightarrow \begin{cases} \text{último dígito significativo en posición } 10^{-t} \text{ (centenas)} \\ \text{no hay dígitos medianamente significativos} \\ \text{dos dígitos no significativo (decenas y unidades)} \end{cases}$$

$1.234,56789 \pm 50$

Número correctamente expresado: **1200 ± 50**

Ejercicio 3

Expresar correctamente los siguientes números, utilizando redondeo simétrico

$0,5.10^{-t-1} < \Delta a < 0,5.10^{-t}$

t>=1 t decimales significativos, 1 decimal medianamente significativo

t<0 último dígito significativo en posición 10^{-t}, 1 dígito medianamente significativo en 10^{-t-1}

f) 123.456,789 ± 100

$$\Delta a = 100 \qquad 0,5.10^{-t-1}\ (50) < 100 < 0,5.10^{-t}\ (500) \qquad \text{Si} \begin{cases} 0,5.10^{-t-1} = 5 \\ 0,5.10^{-t} = 50 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{t = -3}$$

$$\text{Como } t < 0 \rightarrow \begin{cases} \text{último dígito significativo en posición } 10^{-t} \text{ (unidad de mil)} \\ \text{un dígito medianamente significativo en posición } 10^{-t-1} \text{ (centenas)} \\ \text{dos dígitos no significativo (decenas y unidades)} \end{cases}$$

$123.456,789 \pm 100$ Número correctamente expresado: **123.500 ± 100**

Ejercicio 5

Calcular las siguientes expresiones, incluyendo sus cotas de error absoluto, donde x= 2,00, y = 3,00 y z = 4,00 (estos valores están correctamente redondeados):

a) w = 3x + y - z

Al estar correctamente redondeados $\rightarrow t = 2$ $\qquad \Delta x_i = 0,5.10^{-t}$ $\qquad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5.10^{-2} = 0,005$

$w = \hat{w} \pm \Delta w$ $\qquad \hat{w} = 3 \,.\, 2 + 3 - 4 = 5$

Fórmula general de propagación de errores $\qquad y = F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_N) \rightarrow \Delta y = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_P \Delta x_i$

$$\Delta w = \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \Delta z = |3|.0,005 + |1| 0,005 + |1| 0,005 = 0,025 \cong 0,03$$

Las cotas de error las vamos expresar con un solo dígito

$$\Delta w = 0,03 \rightarrow t = 1 \rightarrow \begin{cases} \text{1 decimal significativo} \\ \text{1 decimal medianamente significativo} \end{cases}$$

Número correctamente expresado:

$$w = 5,00 \pm 0,03$$

Ejercicio 5

Calcular las siguientes expresiones, incluyendo sus cotas de error absoluto, donde x= 2,00, y = 3,00 y z = 4,00 (estos valores están correctamente redondeados):

b) w = x sen (y/40)

$$\Delta x_i = 0,5.10^{-t} \qquad \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5.10^{-2} = 0,005$$

$$w = \hat{w} \pm \Delta w \qquad \hat{w} = 2,00.\sin\left(\frac{3,00}{40}\right) = 0,149859414$$

$$\Delta w = \sum_{i=1}^{2}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|\Delta x_i = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|\Delta y = \left|\sin\left(\frac{y}{40}\right)\right|\Delta x + \left|\frac{x}{40}\cos\left(\frac{y}{40}\right)\right|\Delta y$$

$$\Delta w = \sum_{i=1}^{2}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|\Delta x_i = \left|\sin\left(\frac{3,00}{40}\right)\right|0,005 + \left|\frac{2,00}{40}\cos\left(\frac{3,00}{40}\right)\right|0,005 = 0,000623 \cong 0,0006$$

$$\Delta w = 0,0006 \rightarrow t = 2 \rightarrow \begin{cases} \text{2 decimales significativos} \\ \text{1 decimal medianamente significativo} \end{cases}$$

Número correctamente expresado:

$$w = 0,150 \pm 0,0006$$

Ejercicio 7

Se dispone de un algoritmo para computar la siguiente integral:

$$I(a,b)=\int_0^1 e^{\frac{-b.x}{(a+x^2)}}dx$$

Utilizando dicho algoritmo se obtuvo la siguiente tabla :

a	b	I
0,39	0,34	1,425032
0,40	0,32	1,408845
$\boxed{0,40}$	$\boxed{0,34}$	$\boxed{1,398464}$
0,40	0,36	1,388198
0,41	0,34	1,372950

Ahora bien, se midieron las cantidades físicas *z* e *y*, obteniéndose: $z = 0{,}400 \pm 0{,}003$ e $y = 0{,}340 \pm 0{,}005$

Estimar el error en *I(z,y)* y expresar el resultado final.

Ejercicio 7

a	b	I
0,39	0,34	1,425032
0,40	0,32	1,408845
0,40	0,34	1,398464
0,40	0,36	1,388198
0,41	0,34	1,372950

$$I(a,b)=\int_0^1 e^{\frac{-b.x}{(a+x^2)}}dx \qquad I(a,b)=F(z,y)$$

$$\Delta I=\left|\frac{\partial I}{\partial z}\right|_P \Delta z+\left|\frac{\partial I}{\partial y}\right|_P \Delta y=\left|\frac{\partial F(z,y)}{\partial z}\right|_P \Delta z+\left|\frac{\partial F(z,y)}{\partial y}\right|_P \Delta y$$

z = 0,400 $\pm$ 0,003 $\qquad$ y = 0,340 $\pm$ 0,005

$$\frac{\partial F(z,y)}{\partial z}\approx\frac{\delta I}{\delta a}=\frac{1{,}372950-1{,}425032}{0{,}41-0{,}39}=-2{,}6041$$

$$\frac{\partial F(z,y)}{\partial y}\approx\frac{\delta I}{\delta b}=\frac{1{,}388198-1{,}408845}{0{,}36-0{,}32}=-0{,}516175$$

$$\Delta I=2{,}6041\ .\ 0{,}003+0{,}516175\ .\ 0{,}005=0{,}01039$$

Adoptando un solo dígito para la cota, la misma nos queda

$$\Delta I=0{,}01$$

Ejercicio 7

a	b	I
0,39	0,34	1,425032
0,40	0,32	1,408845
0,40	0,34	1,398464
0,40	0,36	1,388198
0,41	0,34	1,372950

$z = 0,400 \pm 0,003$ $\quad$ $y = 0,340 \pm 0,005$

$\Delta I = 0.01$

$$\Delta I = 0,01 \quad \rightarrow \quad 0,5\ 10^{-t-1} < \Delta x < 0,5\ 10^{-t} \quad \rightarrow \quad 0,005 < \Delta x < 0,05 \quad \rightarrow \quad t = 1$$

$I = \hat{I} \pm \Delta I$ $\qquad$ $\hat{I} = 1,398464$

Por lo tanto, la forma correcta de expresar el resultado es $\quad I = \hat{I} \pm \Delta I = 1,40 \pm 0,01$

Ejercicio 7

a	b	I
0,39	0,34	1,425032
0,40	0,32	1,408845
0,40	0,34	1,398464
0,40	0,36	1,388198
0,41	0,34	1,372950

$z = 0{,}400 \pm 0{,}003$ $\quad$ $y = 0{,}340 \pm 0{,}005$

Podemos tomar otros puntos para aproximar las derivadas, por ejemplo:

$$\frac{\partial F(z,y)}{\partial z} \approx \frac{\delta I}{\delta a} = \frac{1{,}372950 - 1{,}398464}{0{,}41 - 0{,}40} = -2{,}5514$$

$$\frac{\partial F(z,y)}{\partial y} \approx \frac{\delta I}{\delta b} = \frac{1{,}388198 - 1{,}398464}{0{,}36 - 0{,}34} = -0{,}5133$$

$$\Delta I = 2{,}5514 \,.\, 0{,}003 + 0{,}5133 \,.\, 0{,}005 = 0{,}0102207$$

$$\Delta I = 0{,}01 \quad \rightarrow \quad 0{,}5\ 10^{-t-1} < \Delta x < 0{,}5\ 10^{-t} \quad \rightarrow \quad 0{,}005 < \Delta x < 0{,}05 \quad \rightarrow \quad t = 1$$

$$I = \hat{I} \pm \Delta I \qquad \hat{I} = 1{,}398464 \qquad I = \hat{I} \pm \Delta I = 1.40 \pm 0.01$$

Ejercicio 10

Determinar las cotas para los errores relativos de v y w (que son dos expresiones algebraicamente equivalentes) en los siguientes casos, utilizando la gráfica de proceso:

a) $v = a + a$, $w = 2a$ b) $v = a + a + a$, $w = 3a$

Suponer que a es positivo y que los números 2 y 3 tienen una representación exacta en la computadora. Comparar los resultados de las dos expresiones y extraer conclusiones. Calcular dichos errores para $a = 0,6992$ (correctamente redondeado), redondeando a 4 dígitos luego de cada operación aritmética.

Ejercicio 10

b) v = a + a + a,   w = 3.a

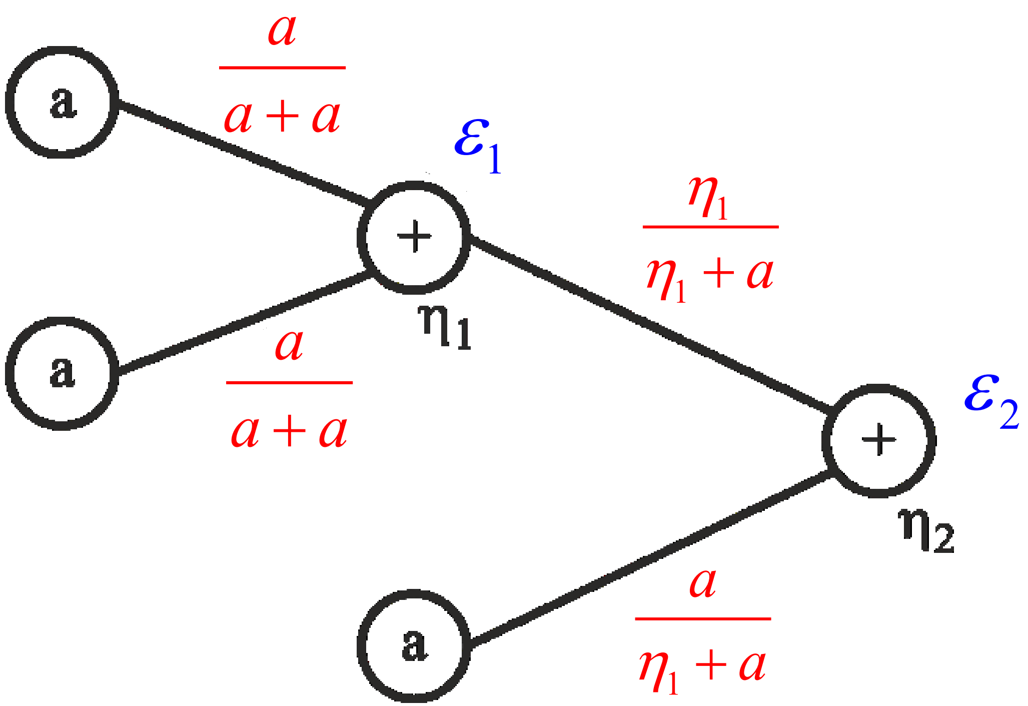
Gráfica de Procesos

$$y = x_1 \; op \; x_2$$
$$r_y = f_1 \, r_{x_1} + f_2 \, r_{x_2}$$

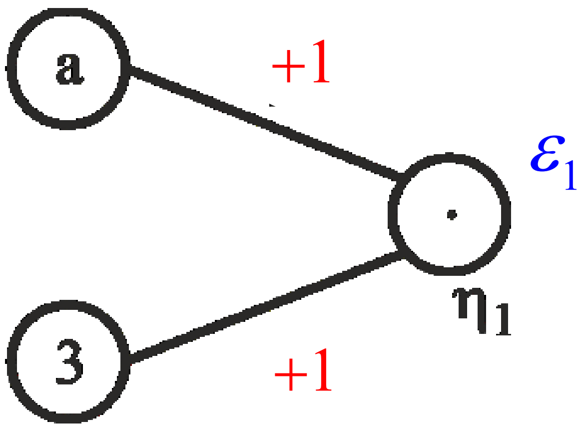
Factores de amplificación

op	+	-	*	/
f_1	$\frac{x_1}{y}$	$\frac{x_1}{y}$	1	1
f_2	$\frac{x_2}{y}$	$-\frac{x_2}{y}$	1	-1

v = a + a + a

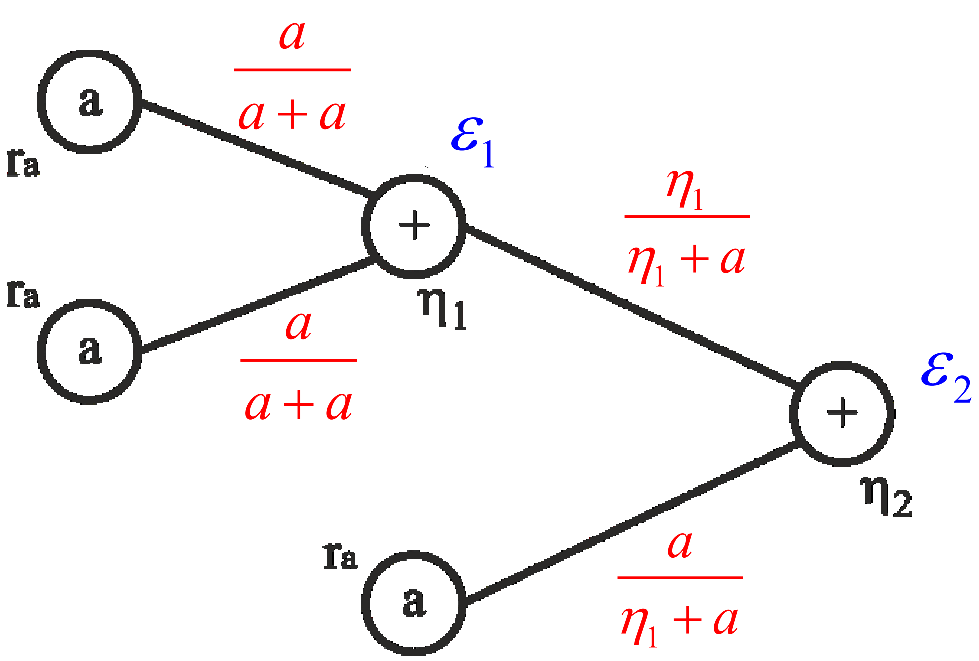


w = 3.a



Ejercicio 10

b) v = a + a + a,   w = 3.a



$$r_{\eta 1}=r_a\frac{1}{2}+r_a\frac{1}{2}+\varepsilon_1=r_a+\varepsilon_1$$

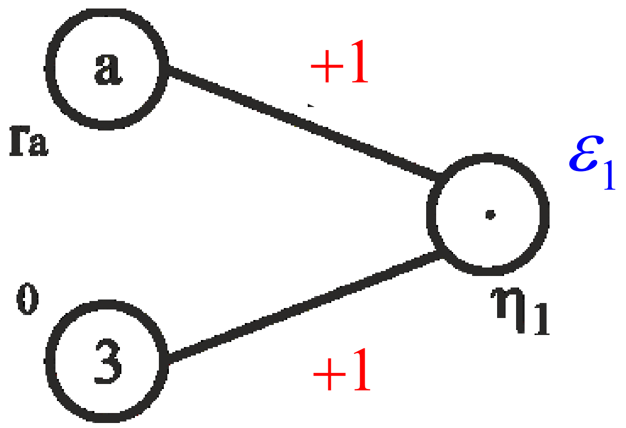
$$r_{\eta 2}=r_{\eta 1}\frac{\eta_1}{\eta_1+a}+r_a\frac{a}{\eta_1+a}+\varepsilon_2=\frac{r_{\eta_1}\eta_1+r_a a}{\eta_1+a}+\varepsilon_2=\frac{(r_a+\varepsilon_1)\eta_1+r_a a}{\eta_1+a}+\varepsilon_2$$

$$r_{\eta 2}=\frac{r_a(\eta_1+a)+\varepsilon_1\eta_1}{\eta_1+a}+\varepsilon_2=r_a+\frac{\varepsilon_1\eta_1}{\eta_1+a}+\varepsilon_2=r_a+\frac{2}{3}\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

$$r_{\eta 2}=r_a+\frac{2}{3}\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

Ejercicio 10

b) v = a + a + a,   w = 3.a



$$r_w = r_a + \varepsilon_1$$

Ejercicio 10

b) v = a + a + a,   w = 3.a

Acotando las expresiones

$$r_v = r_a + \frac{2}{3}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \rightarrow \quad \left|r_v\right| = \left|r_a + \frac{2}{3}\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right| \le \left|r_a\right| + \left|\frac{2}{3}\varepsilon_1\right| + \left|\varepsilon_2\right|$$

$$r_w = r_a + \varepsilon_1 \quad \rightarrow \quad \left|r_w\right| = \left|r_a + \varepsilon_1\right| \le \left|r_a\right| + \left|\varepsilon_1\right|$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \le \mu$ (unidad de máquina)

$$\left.\begin{array}{l} \left|r_v\right| \le 1.r_a + \frac{5}{3}.\mu \\ \left|r_w\right| \le 1.r_a + 1.\mu \end{array}\right\} \rightarrow r_v \ge r$$

Ejercicio 10

b) v = a + a + a,   w = 3.a

$$\left|r_v\right| \leq 1.r_a + \frac{5}{3}.\mu \qquad \left|r_w\right| \leq 1.r_a + 1.\mu \qquad Ry \leq Cp.R + F_\mu.\mu$$

C_p: El término que multiplica a r es designado con el nombre de Condición del Problema (Cp), y es el factor de amplificación de los errores de relativos inherentes. La condición del problema depende exclusivamente del problema numérico, es decir que para cualquier algoritmo que elijamos para resolver nuestro problema, la condición del problema será la misma.

$F_{\mathbf{m}}$: Término de estabilidad (factor global de amplificación de errores de redondeo). Depende del problema numérico y del algoritmo elegido.

$$Ca = \frac{F_\mu}{Cp}$$

Ca: Número de condición del algoritmo

Ca<=1 Estable,   Ca>>1 Inestable (o mal condicionado)

Ejercicio 12

Calcular (v^2 - w^2) usando aritmética de punto flotante de 4 dígitos de precisión, con v = 43,21 y w = 43,11, utilizando los siguientes algoritmos:

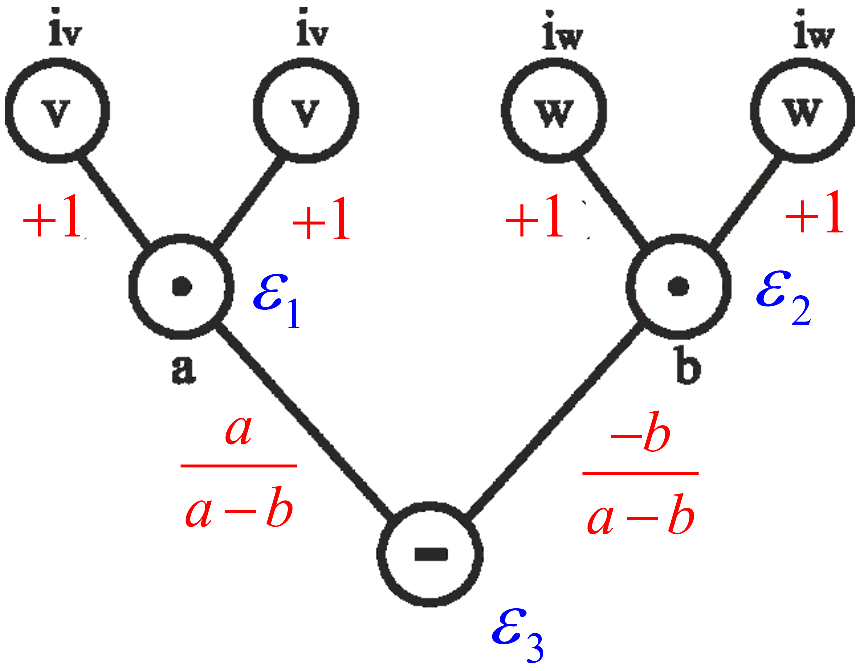
a) ((v * v) - (w * w)) b) ((v + w) * (v – w))

Indicar cuál algoritmo es más conveniente y justificar.

Ejercicio 12

Algoritmo A): $y_A = (v.v) - (w.w)$

Llamaremos i_v, i_w a los errores inherentes relativos; y a los errores relativos de redondeo en cada operación $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$



$$er_a = i_v.(+1) + i_v.(+1) + \varepsilon_1 = 2i_v + \varepsilon_1$$

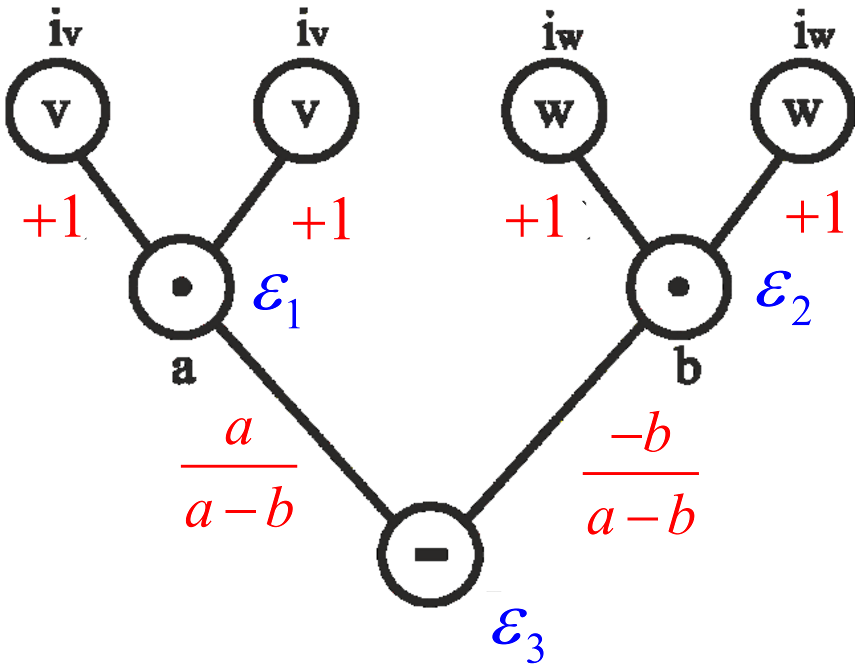
$$er_b = i_w.(+1) + i_w.(+1) + \varepsilon_2 = 2i_w + \varepsilon_2$$

$$er_{yA} = \frac{er_a.a}{a-b} + \frac{er_b.(-b)}{a-b} + \varepsilon_3 = \frac{(2i_v + \varepsilon_1).a}{a-b} + \frac{(2i_w + \varepsilon_2).(-b)}{a-b} + \varepsilon_3$$

$$er_{yA} = \frac{(2i_v + \varepsilon_1)a - (2i_w + \varepsilon_2)b}{a-b} + \varepsilon_3$$

Ejercicio 12

Algoritmo A): $y_A = (v.v) - (w.w)$



Separando los términos que dependen del error inherente de los términos que dependen del error de redondeo, tenemos:

$$er_{yA} = \frac{2ai_v - 2bi_w}{a-b} + \frac{a\varepsilon_1 - b\varepsilon_2}{a-b} + \varepsilon_3 = \frac{2v^2 i_v - 2w^2 i_w}{v^2 - w^2} + \frac{v^2\varepsilon_1 - w^2\varepsilon_2}{v^2 - w^2} + \varepsilon_3$$

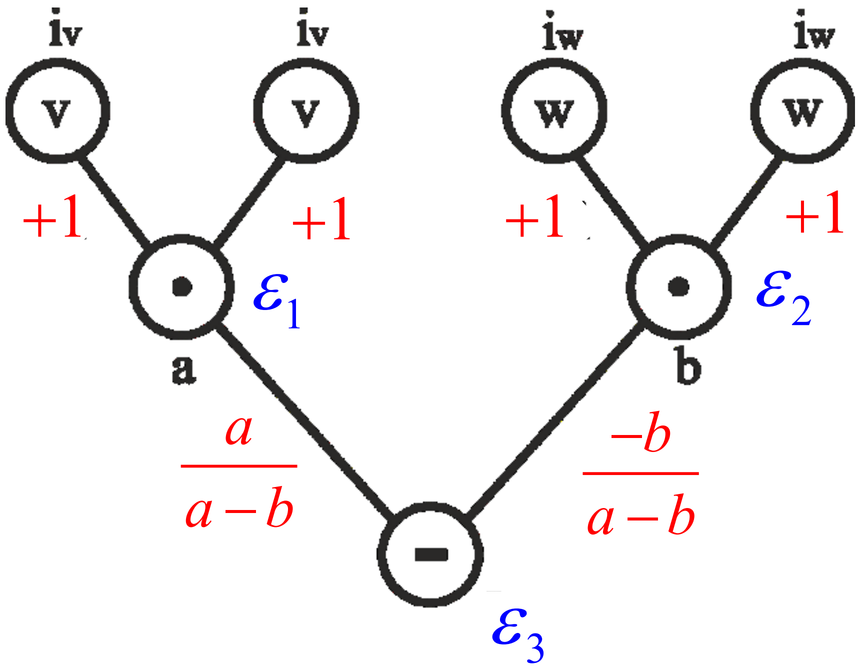
Acotando y recordando que:

$$|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \le \mu \qquad |i_v|, |i_w| \le r$$

$$|er_{yA}| \le \frac{2v^2 + 2w^2}{|v^2 - w^2|} r + \left(1 + \frac{v^2 + w^2}{|v^2 - w^2|}\right)\mu$$

Ejercicio 12

Algoritmo A): $y_A = (v.v) - (w.w)$



$$\left|er_{yA}\right| \leq \boxed{\frac{2v^2 + 2w^2}{\left|v^2 - w^2\right|}}\, r + \boxed{\left(1 + \frac{v^2 + w^2}{\left|v^2 - w^2\right|}\right)} \mu$$

El término que multiplica a ***r*** es designado con el nombre de **Condición del Problema (Cp)**, y es el factor de amplificación de los errores de relativos inherentes. La condición del problema depende exclusivamente del problema numérico, es decir que para cualquier algoritmo que elijamos para resolver nuestro problema, la condición del problema será la misma.

El término que multiplica a **m** se denomina **Término de Estabilidad (Te)**, y depende del problema numérico y del algoritmo elegido.

La condición del problema vale:

$$C_{pA} = \frac{2v^2 + 2w^2}{\left|v^2 - w^2\right|} \cong 863$$

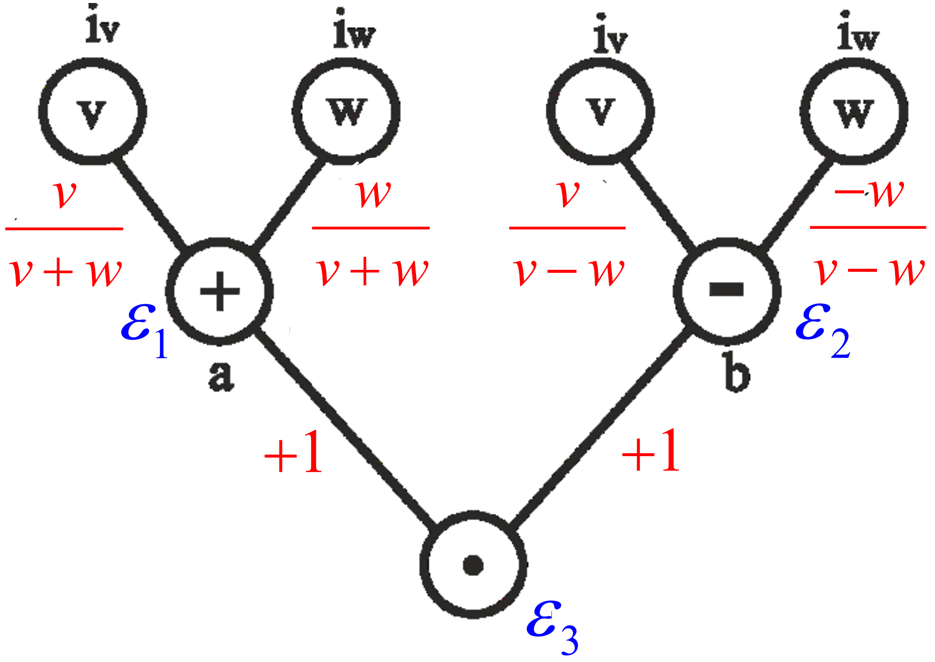
Término de estabilidad vale:

$$Te_A = \frac{v^2 + w^2}{\left|v^2 - w^2\right|} + 1 \cong 432$$

Ejercicio 12

Algoritmo B): $y_A = (v+w).(v-w)$

Llamaremos i_v, i_w a los errores inherentes relativos; y a los errores relativos de redondeo en cada operación $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$



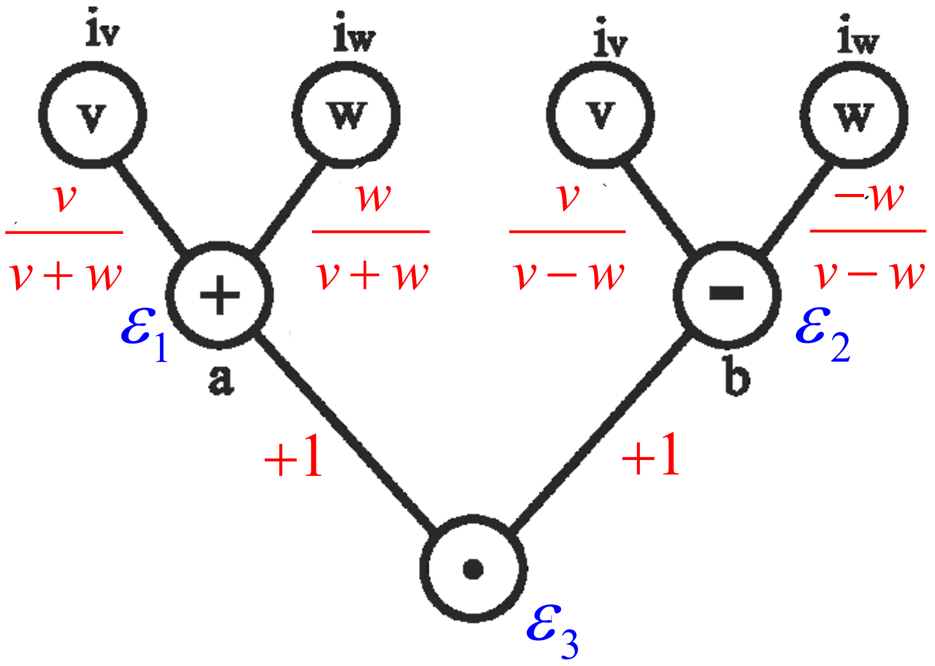
$$er_a = i_v \frac{v}{v+w} + i_w \frac{w}{v+w} + \varepsilon_1 \qquad er_a = \frac{i_v v + i_w w}{v+w} + \varepsilon_1$$

$$er_b = i_v \frac{v}{v-w} - i_w \frac{w}{v-w} + \varepsilon_2 \qquad er_b = \frac{i_v v - i_w w}{v-w} + \varepsilon_2$$

$$er_{yB} = er_a + er_b + \varepsilon_3 = \frac{i_v v + i_w w}{v+w} + \frac{i_v v - i_w w}{v-w} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Ejercicio 12

Algoritmo B): $y_A = (v+w).(v-w)$



Separando los términos que dependen del error inherente de los términos que dependen del error de redondeo, tenemos:

$$er_{yB} = \frac{(v-w)(i_v v + i_w w) + (v+w)(i_v v - i_w w)}{(v^2 - w^2)} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$er_{yB} = \frac{(2v^2 i_v + 2w^2 i_w)}{(v^2 - w^2)} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

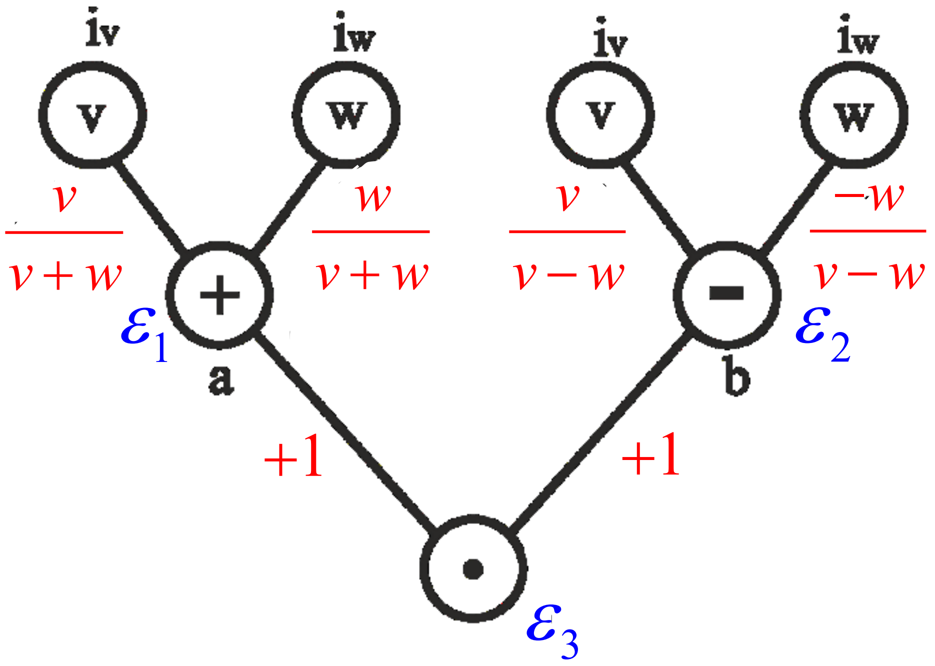
Acotando y recordando que:

$$|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \le \mu \qquad |i_v|, |i_w| \le r$$

$$|er_{yB}| \le \frac{2v^2 + 2w^2}{|v^2 - w^2|} r + (3)\mu$$

Ejercicio 12

Algoritmo B): $y_A = (v+w).(v-w)$



$$\left|er_{yB}\right| \leq \boxed{\frac{2v^2+2w^2}{\left|v^2-w^2\right|}}\, r + \boxed{(3)}\, u$$

El término que multiplica a ***r*** es designado con el nombre de **Condición del Problema (Cp)**, y es el factor de amplificación de los errores de relativos inherentes. La condición del problema depende exclusivamente del problema numérico, es decir que para cualquier algoritmo que elijamos para resolver nuestro problema, la condición del problema será la misma.

El término que multiplica a **m** se denomina **Término de Estabilidad (Te)**, y depende del problema numérico y del algoritmo elegido.

La condición del problema vale: $$C_{pB} = \frac{2v^2+2w^2}{\left|v^2-w^2\right|} \cong 863$$

Término de estabilidad vale: $$Te_B = 3$$

Ejercicio 12

	Algoritmo A): $y_A = (v.v) - (w.w)$	**Algoritmo B):** $y_B = (v+w).(v-w)$
Condición del problema	$C_{pA} = \dfrac{2v^2 + 2w^2}{\left\|v^2 - w^2\right\|} \cong 863$	$C_{pB} = \dfrac{2v^2 + 2w^2}{\left\|v^2 - w^2\right\|} \cong 863$
Término de estabilidad	$Te_A = \dfrac{v^2 + w^2}{\left\|v^2 - w^2\right\|} + 1 \cong 432$	$Te_B = 3$

Tal como vimos anteriormente, el Cp es igual en casos, independientemente del algoritmo. Lo que disminuye notablemente es el término de estabilidad. Esto nos muestra que el segundo algoritmo es el más conveniente, ya que operando como él indica, el error de redondeo propagado será mucho menor.

Ejercicio 12

Calcular (v^2 - w^2) usando aritmética de punto flotante de 4 dígitos de precisión, con v = 43,21 y w = 43,11

Valor exacto 8,632

Algoritmo A): $y_A = (v.v) - (w.w)$

$v = 0{,}4321\,0000 \; 10^2$

$v = 0{,}4321\,0000 \; 10^2$

$v^2 = 0{,}1867\,1041 \; 10^4$

Se almacena: $0{,}1867 \; 10^4$

$w = 0{,}4311\,0000 \; 10^2$

$w = 0{,}4311\,0000 \; 10^2$

$w^2 = 0{,}1858\,4721 \; 10^4$

Se almacena: $0{,}1858 \; 10^4$

$v^2 = 0{,}1867\,0000 \; 10^2$

$w^2 = 0{,}1858\,0000 \; 10^2$

$v^2 - w^2 = 0{,}0009\,0000 \; 10^4$

Se almacena: $0{,}9000 \; 10^1$

Los cálculos se hacen con doble precisión (2*t* = 8dígitos) pero el resultado se almacenan en simple precisión (*t* = 4 dígitos)

Ejercicio 12

Calcular (v^2 - w^2) usando aritmética de punto flotante de 4 dígitos de precisión, con v = 43,21 y w = 43,11

Valor exacto 8,632

Algoritmo B): $$y_B = (v+w).(v-w)$$

v = 0,4321 0000 10^2

w = 0,4311 0000 10^2

$v+w =$ 0,8632 0000 10^4

Se almacena: 0,8632 10^2

v = 0,4321 0000 10^2

w = 0,4311 0000 10^2

$v-w =$ 0,0010 0000 10^2

Se almacena: 0,1000 10^0

$v+w$ = 0,8632 0000 10^2

$v-w$ = 0,0010 0000 10^2

$(v+w)(v-w) =$ 0,0008 6320 10^4

Se almacena: 0,8632 10^1

Los cálculos se hacen con doble precisión (2*t* = 8dígitos) pero el resultado se almacenan en simple precisión (*t* = 4 dígitos)

Ejercicio Parcial

La igualdad algebraica

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \ \cos\beta - \cos\alpha \ \text{sen}\beta$$

constituye dos formas distintas de efectuar el cálculo numérico.

a) Establecer cuál de las dos formas es más estable numéricamente. Utilizar los valores $\alpha = 2{,}50$ y $\beta = 2{,}51$.
b) Analizar la estabilidad del problema para los mismos valores de los datos de entrada. ¿Lo considera estable o inestable?
c) ¿Aumenta ó disminuye el valor del resultado si se aumenta levemente el valor de α por sobre el dado?

Para establecer cuál es la forma más estable numéricamente vamos a realizar la gráfica de procesos. Antes que nada veamos como sacar los factores de propagación de errores relativos para cualquier función:

$$\begin{cases} y = \text{sen}(x) \\ e_y = \dfrac{\partial y}{\partial x} e_x = \cos(x).e_x \end{cases} \rightarrow \quad e_{ry} = \frac{e_y}{y} = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}.e_x = \text{cotg}(x).e_x = x.\text{cotg}(x).e_{rx}$$

$$\begin{cases} y = \cos(x) \\ e_y = \dfrac{\partial y}{\partial x} e_x = -\text{sen}(x).e_x \end{cases} \rightarrow \quad e_{ry} = \frac{e_y}{y} = \frac{-\text{sen}(x)}{\cos(x)}.e_x = -\text{tg}(x).e_x = -x.\text{tg}(x).e_{rx}$$

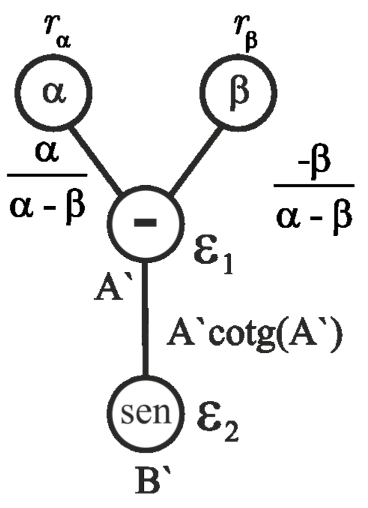
Ejercicio Parcial

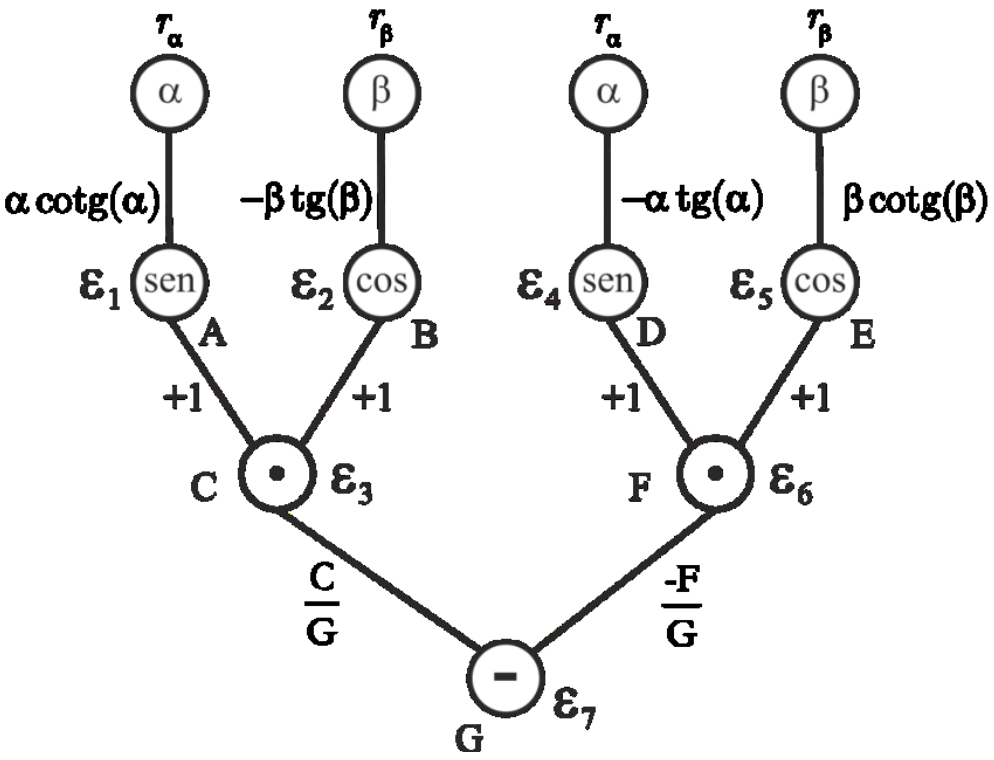
La igualdad algebraica

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \ \cos\beta - \cos\alpha \ \operatorname{sen}\beta$$

constituye dos formas distintas de efectuar el cálculo numérico.

a) Establecer cuál de las dos formas es más estable numéricamente. Utilizar los valores $\alpha = 2{,}50$ y $\beta = 2{,}51$.
b) Analizar la estabilidad del problema para los mismos valores de los datos de entrada. ¿Lo considera estable o inestable?
c) ¿Aumenta ó disminuye el valor del resultado si se aumenta levemente el valor de α por sobre el dado?





La resolución completa del ejercicio se encuentra en el material complementario subido al campus de la materia